

Populációdinamika kurzus, projektfeladat

Aszimptotikus viselkedés egy determinisztikus járványterjedési modellben

Előadó:

UNGER TAMÁS ISTVÁN
okleveles villamosmérnök
matematika B.Sc. szakos hallgató

Szeged
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

Szeged
2019. MÁJUS 25.

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 Az alkalmazott modell: SIS
 - Alapvető összefüggések
 - A modell módosítása
- 3 Periodikus érintkezési ráta
 - A differenciálegyenlet és megoldása
 - A modell implementálása
 - Matlab-kód
 - A modell viselkedése
- 4 Hordozó egyedek hatása
 - Konstans számú hordozó
 - A modell viselkedése
 - "Csak hordozók" esete
 - Exponenciálisan csökkenő hordozószám
 - Matlab-kód, a modell viselkedése
- 5 Összefoglalás

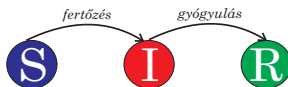
Bevezetés

A feldolgozott cikk:

(9) H. W. Hethcote: Asymptotic Behavior in a Deterministic Epidemic Model. Bulletin of Mathematical Biology, 35(5-6), 607-614, 1973.

Előzmények:

- Determinisztikus járványterjedési modellek alapjai: Bailey (1957);
- Dietz (1967) matematikai munkái (újabb, pontosabb modellek);
- Klasszikus megközelítés: SIR-modell.



ábra: SIR-modell

- Nem alkalmazható olyan járványok modellezésére, melyek esetén a gyógyult egyed ismét fogékonná válhat.

Tartalom

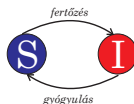
- 1 Bevezetés
- 2 Az alkalmazott modell: SIS
 - Alapvető összefüggések
 - A modell módosítása
- 3 Periodikus érintkezési ráta
 - A differenciálegyenlet és megoldása
 - A modell implementálása
 - Matlab-kód
 - A modell viselkedése
- 4 Hordozó egyedek hatása
 - Konstans számú hordozó
 - A modell viselkedése
 - "Csak hordozók" esete
 - Exponenciálisan csökkenő hordozószám
 - Matlab-kód, a modell viselkedése
- 5 Összefoglalás

A SIS-modell alapjai

Weiss és Dishon (1971)

- N : teljes populáció;
- $S(t)$: fogékony egyedek száma;
- $I(t)$: fertőzött egyedek száma.

$$N = S(t) + I(t), I(0) = I_0 \neq 0.$$



ábra: SIS-modell

$$I'(t) = \beta I(t) S(t) - \gamma I(t), S(t) = N - I(t). \quad (1)$$

- β : érintkezési ráta (*infection* vagy *contact rate*);
- γ : gyógyulási ráta (*recovery rate*).

Módosított modell

Első módosítás: periodikus érintkezési ráta

β konstans helyett $\beta(t)$: időfüggő, periodikus.

- $N >$ átlagos relatív gyógyulási ráta ($\bar{\rho}$): $I(t)$ asz. periodikus, $t \rightarrow \infty$;
- $N \leq$ átlagos relatív gyógyulási ráta ($\bar{\rho}$): $I(t) \rightarrow 0$ osc., $t \rightarrow \infty$.

Második módosítás: a fertőzés hordozó egyedek általi elterjesztése

- Konstans számú hordozó (*carrier*) egyed: $I(t) \rightarrow K$, $K \in \mathbb{R}^+$, $t \rightarrow \infty$;
- Exponenciálisan csökkenő hordozószám: $I(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Hordozó: *"Egy egyed, aki egy patogén mikroorganizmust hordoz klinikai tünetek nélkül, a fertőzésnek egy potenciális forrását szolgáltatva."*

Mire jó ez a modell?

Fertőző légúti betegségek, megfázás, influenza, ..., a speciális vagy gyorsan megszűnő immunitás miatt.

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 Az alkalmazott modell: SIS
 - Alapvető összefüggések
 - A modell módosítása
- 3 Periodikus érintkezési ráta
 - A differenciálegyenlet és megoldása
 - A modell implementálása
 - Matlab-kód
 - A modell viselkedése
- 4 Hordozó egyedek hatása
 - Konstans számú hordozó
 - A modell viselkedése
 - "Csak hordozók" esete
 - Exponenciálisan csökkenő hordozószám
 - Matlab-kód, a modell viselkedése
- 5 Összefoglalás

Periodikus érintkezési ráta

Legyen $\beta = \beta(t)$ pozitív, folytonos és p -vel periodikus függvény, γ konstans, p periódusidő pedig legyen 1 év.

$$I'(t) = \beta(t) I(t) [N - I(t)] - \gamma I(t) = [\beta(t) N - \gamma] I(t) - \beta(t) I^2(t). \quad (2)$$

Állítás:

A fenti differenciálegyenlet megoldása az $I(t=0) = I_0 \neq 0$ kezdeti feltétel mellett:

$$I(t) = \frac{\exp \left[N \int_0^t \beta(u) du - \gamma t \right]}{\int_0^t \beta(v) \exp \left[N \int_0^v \beta(u) du - \gamma v \right] dv + \frac{1}{I_0}}. \quad (3)$$

Bizonyítás:

Nehéz, a cikk nem is részletezi. ■

A modell implementálása

Legyen $\beta(t) = A - B \cos(Ct)$, $A, B, C \in \mathbb{R}$. Ekkor

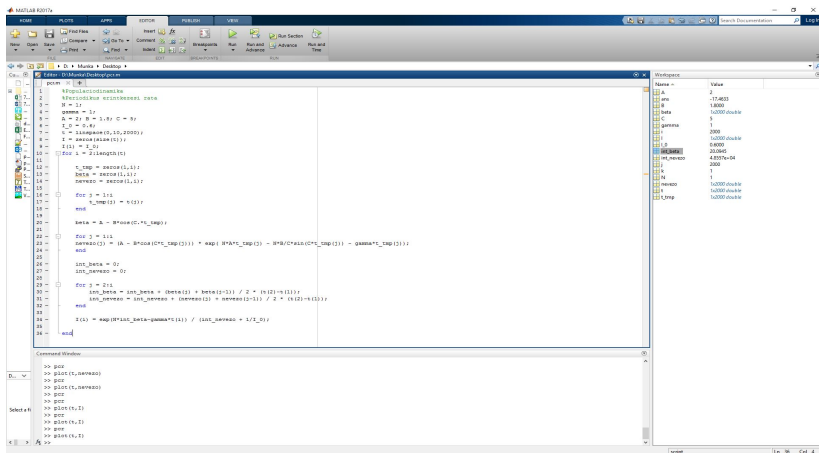
$$\int_0^t \beta(u) \, du = \int_0^t (A - B \cos(Cu)) \, du = At - \frac{B}{C} \sin(Ct). \quad (4)$$

Ezt felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\exp \left[N \int_0^t \beta(u) \, du - \gamma t \right]}{\int_0^t \beta(v) \exp \left[N \int_0^v \beta(u) \, du - \gamma v \right] \, dv + \frac{1}{I_0}} = \\ &= \frac{\exp \left[NAt - \frac{NB}{C} \sin(Ct) - \gamma t \right]}{\int_0^t (A - B \cos(Cv)) \cdot e^{NAv - \frac{NB}{C} \sin(Cv) - \gamma v} \, dv + \frac{1}{I_0}}. \end{aligned} \quad (5)$$

A nevezőben szereplő integrál numerikusan – például trapézszabály segítségével – könnyen meghatározható, így $I(t)$ numerikusan számítható.

Matlab-kód



```

1 clear
2 %Periodikus érintkezési ráta
3 N = 1;
4 gamma = 1;
5 A = 2; B = 1.5; C = 3;
6 I_0 = 0.4;
7 t = linspace(0,10,2000);
8 I = zeros(size(t));
9 I(1) = I_0;
10 for i = 2:length(t)
11     t_tmp = zeros(1,i);
12     beta = zeros(1,i);
13     newero = zeros(1,i);
14     for j = 1:i
15         t_tmp(j) = t(i);
16         beta(j) = A - B*cos(C*t_tmp(j));
17         newero(j) = (A - B*cos(C*t_tmp(j))) * exp(-B*A*t_tmp(j)) - B*B/C*exp(-C*t_tmp(j)) - gamma*t_tmp(j);
18     end
19     int_beta = 0;
20     int_newero = 0;
21     for j = 2:i
22         int_beta = int_beta + (beta(j) + beta(j-1)) / 2 * (t(j)-t(j-1));
23         int_newero = int_newero + (newero(j) + newero(j-1)) / 2 * (t(j)-t(j-1));
24     end
25     I(i) = exp(-int_beta-gamma*t(i)) / (int_newero + 1/t_0);
26 end

```

Command Window:

```

>> par
>> plot(t,newero)
>> par
>> plot(t,newero)
>> par
>> plot(t,I)
>> par
>> plot(t,I)
>> par
>> plot(t,I)

```

Workspace:

Name	Value
A	2
B	1.5
C	3
gamma	1
I	2000 double
I_0	0.4000
int_beta	23.0845
int_newero	4.8376e-04
N	1
t	2000 double
t_tmp	2000 double
newero	2000 double
newero_j	2000 double
newero_j_1	2000 double
newero_j_2	2000 double
newero_j_3	2000 double
newero_j_4	2000 double
newero_j_5	2000 double
newero_j_6	2000 double
newero_j_7	2000 double
newero_j_8	2000 double
newero_j_9	2000 double
newero_j_10	2000 double
newero_j_11	2000 double
newero_j_12	2000 double
newero_j_13	2000 double
newero_j_14	2000 double
newero_j_15	2000 double
newero_j_16	2000 double
newero_j_17	2000 double
newero_j_18	2000 double
newero_j_19	2000 double
newero_j_20	2000 double
newero_j_21	2000 double
newero_j_22	2000 double
newero_j_23	2000 double
newero_j_24	2000 double
newero_j_25	2000 double
newero_j_26	2000 double
newero_j_27	2000 double
newero_j_28	2000 double
newero_j_29	2000 double
newero_j_30	2000 double
newero_j_31	2000 double
newero_j_32	2000 double
newero_j_33	2000 double
newero_j_34	2000 double
newero_j_35	2000 double
newero_j_36	2000 double
newero_j_37	2000 double
newero_j_38	2000 double
newero_j_39	2000 double
newero_j_40	2000 double
newero_j_41	2000 double
newero_j_42	2000 double
newero_j_43	2000 double
newero_j_44	2000 double
newero_j_45	2000 double
newero_j_46	2000 double
newero_j_47	2000 double
newero_j_48	2000 double
newero_j_49	2000 double
newero_j_50	2000 double
newero_j_51	2000 double
newero_j_52	2000 double
newero_j_53	2000 double
newero_j_54	2000 double
newero_j_55	2000 double
newero_j_56	2000 double
newero_j_57	2000 double
newero_j_58	2000 double
newero_j_59	2000 double
newero_j_60	2000 double
newero_j_61	2000 double
newero_j_62	2000 double
newero_j_63	2000 double
newero_j_64	2000 double
newero_j_65	2000 double
newero_j_66	2000 double
newero_j_67	2000 double
newero_j_68	2000 double
newero_j_69	2000 double
newero_j_70	2000 double
newero_j_71	2000 double
newero_j_72	2000 double
newero_j_73	2000 double
newero_j_74	2000 double
newero_j_75	2000 double
newero_j_76	2000 double
newero_j_77	2000 double
newero_j_78	2000 double
newero_j_79	2000 double
newero_j_80	2000 double
newero_j_81	2000 double
newero_j_82	2000 double
newero_j_83	2000 double
newero_j_84	2000 double
newero_j_85	2000 double
newero_j_86	2000 double
newero_j_87	2000 double
newero_j_88	2000 double
newero_j_89	2000 double
newero_j_90	2000 double
newero_j_91	2000 double
newero_j_92	2000 double
newero_j_93	2000 double
newero_j_94	2000 double
newero_j_95	2000 double
newero_j_96	2000 double
newero_j_97	2000 double
newero_j_98	2000 double
newero_j_99	2000 double
newero_j_100	2000 double

ábra: A modell Matlab-kódja

A modell viselkedése

Legyen $k = N\hat{\beta} - \gamma$, ahol $\hat{\beta} = \frac{1}{p} \int_0^p \beta(u) \, du$, továbbá $\bar{\rho} = \frac{\gamma}{\beta}$.

$$\hat{\beta} = \int_0^1 (A - B \cos(Cu)) \, du = A - \frac{B \sin C}{C}.$$

Állítás:

Ha $k \leq 0$, akkor $N \leq \bar{\rho}$ és $I(t) \rightarrow 0$ oszc., $t \rightarrow \infty$.

Bizonyítás:

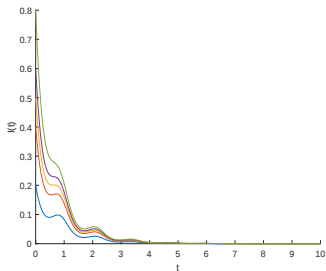
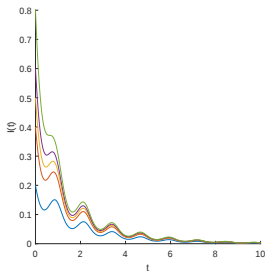
Tfh. $k \leq 0$. $k \leq 0 \Leftrightarrow N\hat{\beta} - \gamma \leq 0 \Leftrightarrow N\hat{\beta} \leq \gamma$. Mivel $\hat{\beta} = \frac{\gamma}{\bar{\rho}}$, ezért

$$N \frac{\gamma}{\bar{\rho}} \leq \gamma \Leftrightarrow N \leq \bar{\rho}. \blacksquare$$

$I(t)$ viselkedése az implementált Matlab-script segítségével vizsgálható.

A modell viselkedése

Pl.: $N = 1, A = 2, B = 1.8, C = 5$ és $\gamma = 2.4$ esetén $\hat{\beta} \approx 2.345, k \approx -0.055$.



ábra: A megoldás $(I(t))$ $\gamma = 2.4$ és $\gamma = 3$ esetén, különböző I_0 értékekre

A modell viselkedése

Állítás:

Ha $k > 0$, akkor $N > \bar{\rho}$ és $I(t)$ asz. periodikus, $t \rightarrow \infty$.

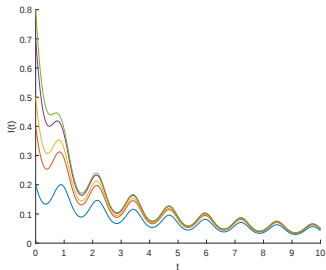
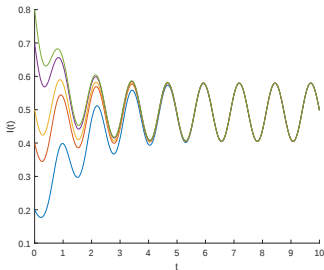
Bizonyítás:

Tfh. $k > 0$. $k > 0 \Leftrightarrow N\hat{\beta} - \gamma > 0 \Leftrightarrow N\hat{\beta} > \gamma$. Mivel $\hat{\beta} = \frac{\gamma}{\bar{\rho}}$, ezért

$$N\frac{\gamma}{\bar{\rho}} > \gamma \Leftrightarrow N > \bar{\rho}. \blacksquare$$

$I(t)$ viselkedése az implementált Matlab-script segítségével vizsgálható.

Pl.: $N = 1, A = 2, B = 1.8, C = 5$ és $\gamma = 1$ esetén $\hat{\beta} \approx 2.345$, $k \approx 1.3455$.



ábra: A megoldás ($I(t)$) $\gamma = 1$ és $\gamma = 2$ esetén, különböző I_0 értékekre

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 Az alkalmazott modell: SIS
 - Alapvető összefüggések
 - A modell módosítása
- 3 Periodikus érintkezési ráta
 - A differenciálegyenlet és megoldása
 - A modell implementálása
 - Matlab-kód
 - A modell viselkedése
- 4 Hordozó egyedek hatása
 - Konstans számú hordozó
 - A modell viselkedése
 - "Csak hordozók" esete
 - Exponenciálisan csökkenő hordozószám
 - Matlab-kód, a modell viselkedése
- 5 Összefoglalás

Konstans számú hordozó

Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ konstans számú hordozó egyed. Ekkor

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta(I(t) + C)S(t) - \gamma I(t) = \beta(I(t) + C)(N - I(t)) - \gamma I(t) = \\ &= \dots = \beta NC + (\beta N - \beta C - \gamma) - \beta I^2(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Bevezetve $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$ relatív gyógyulási rátát:

$$I'(t) = \beta NC + \beta(N - C - \rho)I(t) - \beta I^2(t). \quad (7)$$

Állítás:

Megoldása $I(t=0) = I_0 \neq 0$ kezdeti feltétel mellett:

$$I(t) = \frac{1}{\beta} \frac{\alpha_1 (\beta I_0 + \alpha_2) e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 (\beta I_0 - \alpha_1) e^{-\alpha_2 t}}{(\beta I_0 + \alpha_2) e^{\alpha_1 t} - (\beta I_0 - \alpha_1) e^{-\alpha_2 t}}, \quad (8)$$

ahol

$$\alpha_{1,2} = \frac{\beta}{2} \left\{ \left[(N - C - \rho)^2 + 4CN \right]^{\frac{1}{2}} \pm (N - C - \rho) \right\}. \quad (9)$$

Bizonyítás:

Nem nehéz, csak hosszadalmas, a cikk nem is részletezi. ■

- └ Hordozó egyedek hatása
- └ Konstans számú hordozó

Konstans számú hordozó

Állítás:

Konstans számú hordozó egyed: $I(t) \rightarrow K, K \in \mathbb{R}^+, t \rightarrow \infty$.

Bizonyítás:

Vegyük észre, hogy $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \forall N, C, \rho$. Így:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \frac{e^{\alpha_1 t}}{e^{\alpha_1 t}} \frac{\alpha_1 (\beta I_0 + \alpha_2) + \alpha_2 (\beta I_0 - \alpha_1) e^{(-\alpha_2 - \alpha_1)t}}{(\beta I_0 + \alpha_2) - (\beta I_0 - \alpha_1) e^{(-\alpha_2 - \alpha_1)t}} = \frac{\alpha_1}{\beta} = K. \blacksquare$$

Matlab-kód:

```

% Model parameters
alpha1 = 0.1;
alpha2 = 0.1;
beta = 0.001;
rho = 0.001;
C = 0.001;
N = 1000;
I0 = 1;
S0 = N - I0;
R0 = 0;

% Initial conditions
I0 = 1;
S0 = N - I0;
R0 = 0;

% Time span
tspan = [0 100];

% Solver options
options = odeset('RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-6);

% Solve the ODE
[t, y] = ode45(@(t,y) model(t,y,alpha1,alpha2,beta,rho,C,N,I0,S0,R0), tspan, [I0; S0; R0], options);

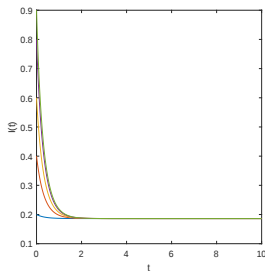
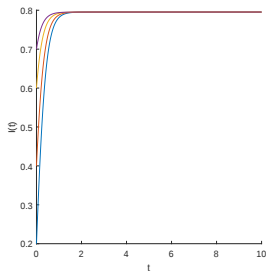
% Plot the results
figure;
plot(t, y(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
plot(t, y(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
plot(t, y(:,3), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time (t)');
ylabel('Population');
legend('Infected (I)', 'Susceptible (S)', 'Recovered (R)');

```

ábra: A modell Matlab-kódja

A modell viselkedése

$$N = 1, C = 0.5.$$



ábra: A megoldás $(I(t))$ $(\beta, \gamma) = (3, 1)$ és $(\beta, \gamma) = (1, 3)$ esetén, különböző I_0 értékekre

"Csak hordozók" esete

$$I'(t) = \beta C S(t) - \gamma I(t) = \beta C (N - I(t)) - \gamma I(t) = \beta C N - I(t) (\beta C + \gamma),$$

$$I(t=0) = I_0 \neq 0.$$

Homogén általános megoldás:

$$I_h(t) = M e^{\lambda t}, \quad I'_h(t) = M \lambda e^{\lambda t},$$

$$M \lambda e^{\lambda t} = -M e^{\lambda t} (\beta C + \gamma) \rightarrow \lambda = -(\beta C + \gamma).$$

$$I_h(t) = M e^{-(\beta C + \gamma)t}.$$

Partikuláris megoldás:

$$I_p(t) = K, \quad K \in \mathbb{R}, \quad I'_p(t) = 0, \quad 0 = \beta C N - K (\beta C + \gamma) \rightarrow K = I_p(t) = \frac{\beta C N}{\beta C + \gamma}.$$

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) = M e^{-(\beta C + \gamma)t} + \frac{\beta C N}{\beta C + \gamma}.$$

Kezdeti feltétel:

$$I(0) = I_0 = M + \frac{\beta C N}{\beta C + \gamma} \Leftrightarrow M = I_0 - \frac{\beta C N}{\beta C + \gamma}.$$

$$I(t) = \left(I_0 - \frac{\beta C N}{\beta C + \gamma} \right) e^{-(\beta C + \gamma)t} + \frac{\beta C N}{\beta C + \gamma} \rightarrow \frac{\beta C N}{\beta C + \gamma}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Exponenciálisan csökkenő hordozószám

A hordozószám az időnek csökkenő exponenciális függvénye. Ekkor:

$$I'(t) = \beta C e^{-at} S(t) - \gamma I(t) = \beta C N e^{-at} - I(t) (\beta C e^{-at} + \gamma).$$

Állítás:

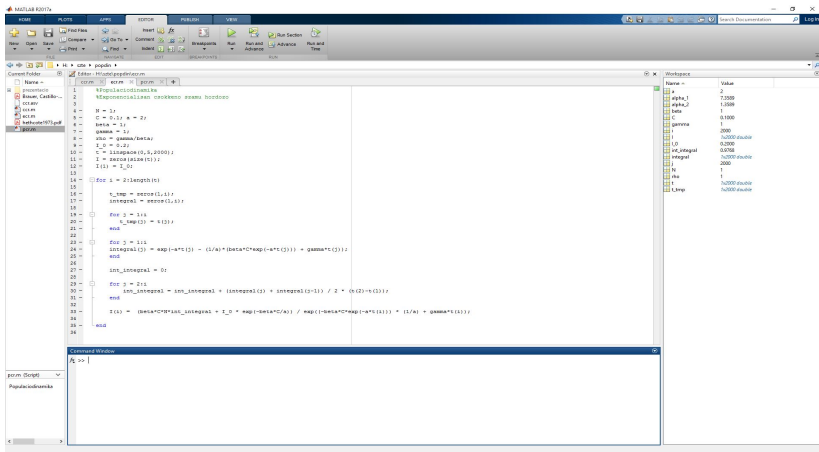
A differenciálegyenlet megoldása:

$$I(t) = \frac{\beta C N \int_0^t \exp\left(-av - \frac{\beta C e^{-av}}{a} + \gamma v\right) dv + I_0 e^{-\frac{\beta C}{a}}}{\exp\left(\frac{-\beta C e^{-at}}{a} + \gamma t\right)}. \quad (11)$$

Állítás:

Belátható, hogy $I(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

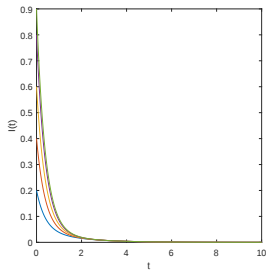
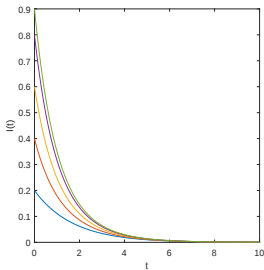
Matlab-kód



ábra: A modell Matlab-kódja

A modell viselkedése

$$N = 1, C(t) = 0.1e^{-0.65t}.$$



ábra: A megoldás $(I(t))$ $(\beta, \gamma) = (1, 1)$ és $(\beta, \gamma) = (1, 2.5)$ esetén, különböző I_0 értékekre

Tartalom

- 1 Bevezetés
- 2 Az alkalmazott modell: SIS
 - Alapvető összefüggések
 - A modell módosítása
- 3 Periodikus érintkezési ráta
 - A differenciálegyenlet és megoldása
 - A modell implementálása
 - Matlab-kód
 - A modell viselkedése
- 4 Hordozó egyedek hatása
 - Konstans számú hordozó
 - A modell viselkedése
 - "Csak hordozók" esete
 - Exponenciálisan csökkenő hordozószám
 - Matlab-kód, a modell viselkedése
- 5 Összefoglalás

Összefoglalás

- Módosított SIS-modell;
- 1. módosítás: periodikus érintkezési ráta;
- 2. módosítás: konstans/exponenciális számú hordozó egyed;
- $I(t)$ aszimptotikus viselkedése különböző módon, eltérő feltételek mellett.

Első módosítás: periodikus érintkezési ráta

- $N > \text{átlagos relatív gyógyulási ráta } (\bar{\rho}): I(t) \text{ asz. periodikus, } t \rightarrow \infty;$
- $N \leq \text{átlagos relatív gyógyulási ráta } (\bar{\rho}): I(t) \rightarrow 0 \text{ oszc., } t \rightarrow \infty.$

Második módosítás: a fertőzés hordozó egyedek általi elterjesztése

- Konstans számú hordozó (*carrier*) egyed: $I(t) \rightarrow K, K \in \mathbb{R}^+, t \rightarrow \infty;$
- Exponenciálisan csökkenő hordozószám: $I(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$

Köszönöm a figyelmet!
Kérdések