

DIPLOMAMUNKA

Stacionárius és Rádiófrekvenciás Elektromágneses Terek Vizsgálata a Momentumok Módszerének Segítségével

Unger Tamás István

**Villamosmérnöki M.Sc. szak
Távközlési rendszerek és szolgáltatások szakirány**

2016

Feladat-kiíró lap diplomamunkához

Hallgató adatai

Név: Unger Tamás István

Neptun-kód: FTD1YJ

Szak: villamosmérnöki M.Sc.

Specializáció: Távközlési rendszerek és szolgáltatások

Tagozat: levelező

A diplomamunka adatai

Kezdő tanév és félév: 2014/15/2

Nyelv: magyar

Típus: nyilvános

Stacionárius és Rádiófrekvenciás Elektromágneses Terek Vizsgálata a Momentumok Módszerének Segítségével

Feladatok részletezése:

A Maxwell-egyenletek teljes rendszerének ismertetése, a sugárzási egyenletek levezetése, idő- és frekvenciatartománybeli alakjuk. Green-függvények és szerepük. A momentumok módszerének alapjai, alkalmazhatósága, előnyei és hátrányai egyéb numerikus technikákhoz képest. Elektrosztatikai problémák megoldása egy- és kétdimenziós geometrián saját Matlab-scriptek segítségével. A Hallén- és Pocklington-egyenlet levezetése, szerepe. Félhullámú dipólusantenna terének vizsgálata a momentumok módszerének segítségével saját Matlab-script segítségével.

Belső konzulens adatai

Külső konzulens adatai

Név: Prof. Dr. habil. Kuczmann Miklós,
D.Sc., Ph.D.

Név: Friedl Gergely

Tanszék: Automatizálási Tanszék

Munkahely: Robert Bosch Kft.

Beosztás: dékán, tanszékvezető egyetemi tanár

Beosztás: szimulációs mérnök

Győr, 2016. április 1.

belső konzulens

külső konzulens

Távközlési Tanszék, dr. Borbély Gábor tanszékvezető

Nyilatkozat

Alulírott, Unger Tamás István (FTD1YJ), villamosmérnöki M.Sc. szakos hallgató kijelentem, hogy a Stacionárius és Rádiófrekvenciás Elektromágneses Terek Vizsgálata a Momentumok Módszerének Segítségével című diplomamunka feladat kidolgozása a saját munkám, abban csak a megjelölt forrásokat, és a megjelölt mértékben használtam fel, az idézés szabályainak megfelelően, a hivatkozások pontos megjelölésével.

Eredményeim saját munkán, számításokon, kutatáson, valós méréseken alapulnak, és a legjobb tudásom szerint hitelesek.

Győr, 2016. november 10.

hallgató

Kivonat

Stacionárius és Rádiófrekvenciás Elektromágneses Terek Vizsgálata a Momentumok Módszerének Segítségével

Dolgozatom a stacionárius és rádiófrekvenciás elektromágneses terek numerikus szimulációjával foglalkozik, elsődleges célja, hogy bemutassa az elektromágneses terek szimulációjához alkalmazott momentumok módszerének alapgondolatát, megvalósítását és alkalmazhatóságát különböző geometriai elrendezésű és komplexitású problémák esetén.

Rövid áttekintést nyújtok a munkám során alkalmazott, az elektromágneses terek jelenségeit leíró Maxwell-egyenletekről, a segítségükkel levezetett elektrosztatikai és sugárzási összefüggésekről, különös tekintettel azok frekvenciatartománybeli alakjaira. Bemutatom a módszer használata során kiemelkedő szereppel bíró Green-függvényeket, legfontosabb tulajdonságait. Ismertetem a momentumok módszerének alapjait, alkalmazásának legfontosabb lépéseit, összefüggéseit, hasonlóságait és különbségeit az eltérő numerikus technikákhoz, kiemelten a végeselem-módszerhez képest.

Bemutatom a momentumok módszerének alkalmazási lehetőségeit egydimenziós és kétdimenziós elektrosztatikai problémák megoldására, valamint a munkám során implementált `Matlab`-scripteket, azok működését.

Ismertetem, levezetem az elektrosztatika általános alapegyenletét, a Laplace-Poisson-egyenlet megoldását. Ismertetem az egydimenziós szimuláció segítségével vizsgálható töltött huzal problémáját, annak megoldását és a megoldó mátrix-szintű implementálását. Bevezetem a megoldáshoz szükséges egydimenziós Gauss-kvadraturát, annak egyenleteit. Ismertetem a szimulációs eredményeket, azok kiértékelését.

Bemutatom a probléma kétdimenziós megvalósítását egy általános töltött lemez segítségével. Ismertetem a kétdimenziós egyenleteket, különös tekintettel az impedanciamátrix elemeinek kiértékelésének módját. Részletesen ismertetem a munkám során alkalmazott, `Matlab`-scriptben megvalósított kétdimenziós Gauss-kvadrátúra egyenleteit, mely kvadrátúra-technika segítségével az impedanciamátrix főátlóinak elemei is kiértékelhetők.

Ismeretem a módszer alkalmazását rádiófrekvenciás problémák vizsgálatára. Bevezetem a vékony huzal általános problémáját, levezetem a Hallén- és Pocklington-egyenleteket. Részletesen ismertetem a Hallén-egyenlet megoldásának lépéseit.

Bemutatom a rádiófrekvenciás problémák alapvető építőelemének, a félhullámú dipólusantennának vizsgálatát Hallén-egyenlet segítségével. Ismeretem a gerjesztés megadásának általam alkalmazott módját, a peremfeltételek beállításának technikáját valamint az eredményeket, azok kiértékelését. Bemutatom az antenna-iránykarakterisztika felvételének kéttípusú módszerét, melyeket `Matlab`-script formájában meg is valósítottam.

Abstract

Examination of Static and Radiofrequency Electromagnetic Fields with the Method of Moments

My thesis deals with the examination of static and radiofrequency electromagnetic fields by simulation techniques. Its primary object is to present the root ideas of the Method of Moments used for simulating different type of electromagnetic fields, with special emphasis of the implementation of the method and its applicability on different problems having different type of geometries and complexities.

I offer a brief overview of the Maxwell-equations describing the phenomena of the electromagnetic fields, and also touch on the question of deduction of the main electrostatic and radiation equations, with special priority of their aspects in the frequency-domain, which I used and implemented during my work. I introduce the Green-functions and their significant relationship with the Method of Moments. I present the basic theories and the most important steps of the Method of Moments, the essential equations of the method and the fundamental analogies and differences according to other numerical techniques, especially to the Finite Element Method.

I exposit the application opportunities of the Method of Moments for solving one- and two dimensional electrostatic problems, and I also introduce the `Matlab`-scripts which I implemented during my work with their essential functions.

I present the deduction of the main, global electrostatic equation and the solution of the Laplace-Poisson's equation. I summarize the one-dimensional charged wire problem, its solution and implementation on the level of matrices by using the Method of Moments. I summarize the basics of the implemented one-dimensional Gaussian quadrature and its equations. I evaluate the results and the characteristics of modelling and simulation.

I introduce the implementation of a two-dimensional electrostatic problem by analyzing a two-dimensional charged plate. I summarize the equations, with special emphasis of the evaluation of the elements of the impedance matrix. I particularly present the two-dimensional Gaussian quadrature, which I implemented in `Matlab`-script, and which can also handle the evaluation of the elements in the main diagonal of the impedance matrix.

I describe the applicability of the method for solving and examining radiofrequency problems. I also present the problem of the thin wire. And the solution of the Hallén's equation in detail.

Last, but not least I overview the problem of the half-wave dipole antenna – which is an essential tool in the field of radiofrequency problems – and its analysis by using the Hallén's equation. I also introduce the used excitation method, the set up of the boundary conditions and the results as well. Through two implemented particular cases I outline the procedure of the identification of the radiation patterns.

DIPLOMAMUNKA

STACIONÁRIUS ÉS RÁDIÓFREKVENCIÁS ELEKTROMÁGNESES TEREK VIZSGÁLATA A MOMENTUMOK MÓDSZERÉNEK SEGÍTSÉGÉVEL

Írta:

UNGER TAMÁS ISTVÁN

M.Sc. szakos villamosmérnök hallgató

Konzulens:

PROF. DR. HABIL. KUCZMANN MIKLÓS, D.Sc., Ph.D.

egyetemi tanár

Széchenyi István Egyetem

Távközlési Tanszék

2016

"LYUKAS ZSEBEMBŐL RÉG KIHULLTAK
AZ ÖSSZEGYŰJTÖTT, ÖSSZEGYŰRT JEGYEK,
DE LÁBAIM MINDIG VISZNEK TOVÁBB;
MIT NEKEM TÁV? MEZÍTLÁB MEGYEK!"
/NAGY VIKTOR (TÉVESZME)/

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, köszönetnyilvánítás	3
2. A Maxwell-egyenletek	4
2.1. Időtartománybeli egyenletek integrális és differenciális alakjai	4
2.2. Áttérés a frekvenciatartományba	6
3. Sugárzási összefüggések	8
3.1. Az elektromos és mágneses térerősség formulái	8
3.2. Megoldás a Green-függvények alkalmazásával	9
3.3. A Green-függvények meghatározása	11
3.4. A mágneses vektorpotenciál	13
4. A momentumok módszere	15
4.1. A probléma általánosítása	15
4.2. A momentum fogalma	16
4.3. Galerkin-módszer és a pont-illesztés	17
4.4. Bázisfüggvények	17
4.5. A momentumok módszere és a végeselem-módszer	19
5. Stacionárius problémák vizsgálata	21
5.1. Az elektrosztatika általános alapegyenlete	21
5.2. A Laplace-Poisson-egyenlet megoldása	22
5.3. Egydimenziós probléma: töltött huzal	22
5.3.1. Egydimenziós Gauss-kvadratúra	24
5.3.2. Eredmények, kiértékelés	25
5.4. Kétdimenziós probléma: töltött lemez	26
5.4.1. Az impedanciamátrix elemeinek kiértékelése	28
5.4.2. A problémátér diszkretizálása	29
5.4.3. Eredmények, kiértékelés	30
6. Rádiófrekvenciás problémák vizsgálata	31
6.1. A vékony huzal problémája	31

6.2.	A Hallén-egyenlet és a Pocklington-egyenlet	33
6.3.	A Hallén-egyenlet megoldása	33
6.4.	Félhullámú dipólus vizsgálata szimmetrikus Hallén-egyenlettel	35
6.4.1.	Vizsgált geometria	35
6.4.2.	Az összefüggés levezetése és implementálása	36
6.4.3.	A gerjesztés megadása	37
6.4.4.	Peremfeltétel érvényesítése	37
6.4.5.	Eredmények, kiértékelés	38
6.5.	Iránykarakterisztika meghatározása	39
6.6.	Az elektromos térerősség integrálegyenletének megoldása	42
7.	Összefoglalás, jövőbeni tervek	44
A.	Stacionárius problémák Matlab-kódja	1
A.1.	toltott_huzal_1D.m	1
A.2.	esztatika_2D.m	2
B.	Rádiófrekvenciás problémák Matlab-kódja	5
B.1.	lambdafeldipol_1D.m	5
B.2.	dipolter_hallen.m	6
B.3.	dipolter_eife.m	9

1. fejezet

Bevezetés, köszönetnyilvánítás

Dolgozatom a stacionárius és rádiófrekvenciás elektromágneses terek numerikus analízisének témakörében íródott. Munkám elsődleges célkitűzése, hogy átfogó részletességgel ismertesse az elektromágneses terek szimulációjához alkalmazott momentumok módszerének alapgondolatát, megvalósítását és alkalmazhatóságát különböző geometriai elrendezésű és komplexitású problémák esetén. Napjaink kutatási-fejlesztési munkája mára már elképzelhetetlenné vált a különböző szimulációs eljárások és programcsomagok napi használata nélkül, melyek az eszközök paramétereit – legyen az villamos vagy mechanikai – konkrét megvalósítás nélkül, számítógépes környezetben teszik vizsgálhatóvá. A szimulációs eljárások ismerete és gyakorlati szintű alkalmazása éppen ezért vált szinte a mindennapi életünk részévé a villamosmérnöki gyakorlatban is.

Az értekezés első szakaszában ismertetem a munkám során alkalmazott, az elektromágneses terek jelenségeit leíró Maxwell-egyenleteket, a segítségükkel levezetett elektrosztatikai és sugárzási összefüggéseket, különös tekintettel azok frekvenciatartománybeli alakjaira. Ismertetem a módszer használata során kiemelkedő szereppel bíró Green-függvényeket, azok legfontosabb tulajdonságait. A második fejezetben bemutatam a momentumok módszerét, alkalmazásának legfontosabb lépéseit, hasonlóságait és különbségeit a különböző numerikus technikákhoz (például a végeselem-módszerhez) képest. A harmadik részben ismertetem a módszer használatának módját egydimenziós és kétdimenziós elektrosztatikai példák megoldására, kitérve a programkód-szintű megvalósítás lépéseire is, valamint ismertetem a szimulációs eredményeket. A negyedik szakaszban bemutatam a módszer széleskörű alkalmazását rádiófrekvenciás problémák vizsgálatára, levezetem a Hallén- és Pocklington-egyenletet, részletesen ismertetem előbbi megvalósítását a momentumok módszerének segítségével az alapvető építőelemnek számító félhullámú dipólus-antennán.

Dolgozatomat levelező mesterszakos villamosmérnök hallgatóként írtam. Ezúton szeretném megköszönni az értékes támogatást és segítséget konzulensemnek, Kuczmann Miklósnak. Köszönetemet fejezem ki továbbá a volt Elektromágneses Terek Laboratórium minden egykori kollégájának, különös tekintettel Budai Tamásnak és Friedl Gergelynek a sokéves közös munkából fakadó támogatásért. Köszönöm közvetlen kollégáimnak és vezetőimnek, hogy a napi feladatok ellátása mellett nemcsak megértőek voltak, hanem lehetőségeik szerint támogatták is munkámat.

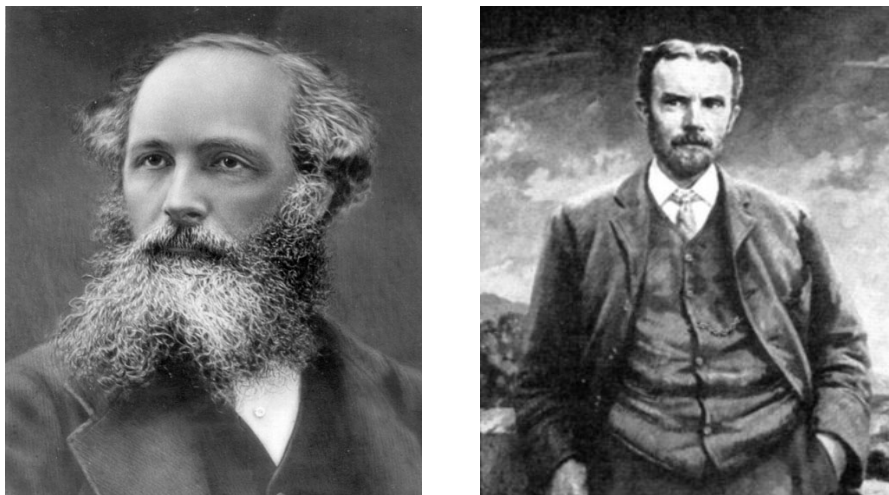
A dolgozatot L^AT_EX szövegszerkesztőben készítettem el.

2. fejezet

A Maxwell-egyenletek

2.1. Időtartománybeli egyenletek integrális és differenciális alakjai

James Clerk Maxwell (1831 - 1879) kiváló skót elméleti matematikus-fizikus életének legfontosabb tevékenysége az elektromossághoz köthető. Elsődleges szerepe abban áll, hogy kiterjesztette és matematikai formulákba öntötte a korábbi fizikusok (például *Michael Faraday* és *André-Marie Ampère*) kísérleti tapasztalatait, és egy összekapcsolódó, egységes parciális differenciálegyenlet-rendszerbe foglalta őket, melyeket 1861-ben publikált először *On Physical Lines of Force* című cikkében [1]. Maxwell egyenletrendszere húsz egyenletet és húsz változó mennyiséget tartalmaz.



2.1. ábra. James Clerk Maxwell [2] és Oliver Heaviside [3]

zott. Az egyenletek mai formáját egy óriási formátumú, kiemelkedő, de méltatlanul elfelejtett autodidakta angol villamosmérnöknek, *Oliver Heaviside*-nak (1850-1925) köszönhetjük, aki munkája során kifejlesztette és a villamosmérnöki gyakorlatba illesztette a vektoranalízist, a rotáció és a divergencia operátorok segítségével tizenkét egyenletet átalakított, így az egyenletrendszert négy egyenletté redukálta négy változóval.

A Maxwell-egyenletek olyan közelhatási törvényeket definiáló, evolúciós, parciális differenciálegyenletek, melyek a tér egy adott pontjában, annak infinitezimálisan

szűk környezetében megadják az egyes térjellemező mennyiségek változásának kapcsolatát. Segítségükkel tehát bármely térjellemező (legyen az akár elektromos, akár mágneses) meghatározható, hiszen azok összefüggést teremtenek a gerjesztő mennyiségek (töltés, áram), a térintenzitások (elektromos térerősség, mágneses indukció) és a gerjesztettségi mennyiségek (elektromos eltolás, mágneses térerősség) között [4]. Az egyenletek integrális alakban:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}, \quad (2.1)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}, \quad (2.2)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (2.3)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV. \quad (2.4)$$

Az első Maxwell-egyenlet (2.1) az Ampère-féle gerjesztési törvény, fizikai jelentése, hogy az áram és az elektromos tér változása mágneses teret kelt (értelemszerűen a két mennyiség egyszerre is létrehozhatja a teret, de külön-külön is képesek mágneses teret kelteni). A második egyenlet (2.2) a Faraday-féle indukciós törvény, fizikai jelentése, hogy a mágneses tér változása elektromos teret kelt. A harmadik egyenlet (2.3) a mágneses Gauss-törvény, jelentése, hogy az indukcióvonalak forrásmentesek, önmagukban záródnak. A negyedik egyenlet (2.4) az elektrosztatika Gauss törvénye, jelentése, hogy a elektromos tér forrásos, erővonalai töltéseken kezdődnek, töltéseken végződnek.

Munkám során minden esetben izotrop, lineáris közeget feltételeztem. Ebben az esetben a térjellemező mennyiségek között kapcsolatot teremtő konstitúciós relációk a következőképpen alakulnak:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{E}_b \right), \quad (2.7)$$

ahol μ_0 a vákuum permeabilitása, értéke $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, ε_0 a vákuum permittivitása, értéke közelítőleg $8,8541 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$, μ_r és ε_r pedig a vizsgált közeg vákuumhoz viszonyított relatív permeabilitása és permittivitása.

Az egyenletek így teljeseek és ellentmondásmentesek. Integrális alakjuk fizikailag szemléletes, de a numerikus számítások során ebben a formában alkalmazni őket nehéz, körülményes. Az egyenletek átírhatók differenciális alakba a Stokes-tétel:

$$\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A}, \quad (2.8)$$

és a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével [5]:

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV, \quad (2.9)$$

ahol ∇ az úgynevezett nabla vektoroperátor, mely segítségével egy $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x v_x(t) + \vec{e}_y v_y(t) + \vec{e}_z v_z(t)$ alakban felírható vektor rotációja és divergenciája kifejezhető Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = \text{rot}(\vec{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \\ &- \vec{e}_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (2.12)$$

A kifejezések alapján belátható, hogy a rotáció alkalmazása vektorból vektort, míg a divergencia vektoroperátor vektorból skalárt eredményez.

A Maxwell-egyenletek differenciális alakja az eddigieket felhasználva:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (2.16)$$

Az összefüggésekben $\vec{H}$ a mágneses térerősséget jelöli, dimenziója $\frac{A}{m}$, $\vec{J}$ az áram-sűrűség, dimenziója $\frac{A}{m^2}$, $\vec{D}$ az elektromos eltolás, dimenziója $\frac{C}{m^2}$, $\vec{E}$ az elektromos térerősség, dimenziója $\frac{V}{m}$, $\vec{B}$ a mágneses indukció, dimenziója Tesla, ρ a töltéssűrűség, dimenziója $\frac{C}{m^3}$.

2.2. Áttérés a frekvenciatartományba

A Maxwell-egyenletek időtartománybeli differenciális alakjaiból levezetett összefüggések numerikus kezelése a deriváltak miatt sokszor igen bonyolult feladat, melyekre bár léteznek konvergens technikák, azok stabilitása sokszor nehezen biztosítható [6]. Rádiófrekvenciás problémák vizsgálata esetén az egyenletek stacionárius közelítése ($\partial/\partial t \approx 0$) nem alkalmazható, így a feladat komplexitása tovább növekszik. Az

egyenleteket célszerű tehát a frekvenciatartományban vizsgálni, megoldani, melyhez az áttérést a Fourier-transzformáció biztosítja [7]. Definíció szerint egy $x(t)$ folytonos időfüggvény Fourier-transzformáltja az

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2.17)$$

összefüggés segítségével határozható meg. A frekvenciatartományba való áttérés legnagyobb előnye, hogy az idő szerinti deriválás a függvény változójával, tehát $j\omega$ -val történő szorzássá egyszerűsödik. Értelemszerűen az n -szeres idő szerinti deriválás $(j\omega)^n$ -el történő szorzással lesz ekvivalens. Ez könnyen belátható az inverz-transzformáció definíciójának felhasználásával, amely az

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (2.18)$$

összefüggéssel definiálható, melynek segítségével a frekvenciatartományban történő deriválás matematikai igazolása:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot \frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega X(j\omega)) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{j\omega X(j\omega)\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ezek alapján a Maxwell-egyenletek differenciális alakjai a frekvenciatartományban a következőképpen alakulnak:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}, \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (2.23)$$

A frekvenciatartománybeli analízis során mindig szem előtt kell tartani, hogy az inverz-transzformáció során előállított időfüggvény kizárólag stacionárius komponensből áll, a tranziens összetevőt nem tartalmazza. Másképpen fogalmazva: a megoldás során elveszítjük a vizsgált rendszer szabad válaszát. A szimulációs modell megalkotása és az alkalmazott számítási módszer kiválasztása során mindig figyelembe kell venni, hogy lehetséges-e eltekinteni a bekapcsolási jelenségek vizsgálatától. Amennyiben a tranziens komponens elvesztése nem nyújt teljeskörű vizsgálódásra lehetőséget, úgy a frekvenciatartománybeli analízis alkalmazása kerülendő. Általánosan elmondható, hogy a rádiófrekvenciás-sugárzási jelenségek vizsgálata során a hosszútávú viselkedés a fontos, ezért a tranziens komponens elhagyása nem jelent problémát.

3. fejezet

Sugárzási összefüggések

Ebben a fejezetben részletesen ismertetem a Maxwell-egyenletekből levezethető sugárzási összefüggéseket, melyek segítségével a tér bármely pontjában meghatározható az elektromos és mágneses térerősség komplex csúcsértéke. Az összefüggések általános alakjain túl kitérek azok speciális, Descartes-féle koordináta-rendszerben értelmezett formáira, valamint a vektorpotenciál és a Green-függvények meghatározásának módjára is kétdimenziós és háromdimenziós probléma esetén.

3.1. Az elektromos és mágneses térerősség formulái

Az elektromos térerősségre vonatkozó összefüggés meghatározható (2.21) rotációjának képzésével, továbbá (2.5) felhasználásával:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{H}. \quad (3.1)$$

Behelyettesítve az Ampère-féle gerjesztési törvényt (2.20) és az eltolásvektorra vonatkozó konstitúciós relációt (2.6) a

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \left(\vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E} \right) = -j\omega\mu\vec{J} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} \quad (3.2)$$

összefüggés adódik, így küszöbölve ki a tér mágneses tulajdonságaira jellemző mennyiségeket. Felhasználva a

$$\nabla \times \nabla \times \vec{v} = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}, \quad \forall \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

vektoranalitikai összefüggést, bevezetve továbbá $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$ hullámszám fogalmát

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} - k^2 \vec{E} = -j\omega\mu\vec{J} \quad (3.4)$$

adódik [9], ahol Δ az úgynevezett Laplace-operátor, alkalmazása skalár- és vektorfüggvény esetén a

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\vec{r}, t) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad \Delta\vec{v}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

összefüggéseket eredményezi, mely leképzés skalár-skalár és vektor-vektor típusú [5]. Az egyenletet árendezve, beszorozva mínusz eggyel, valamint kifejezve és behelyettesítve az elektromos térerősség divergenciáját az elektrosztatika Gauss-törvényének segítségével

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega\mu \vec{J} + \nabla \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.6)$$

adódik. A ρ töltéssűrűség kifejezhető a folytonossági egyenlet [4] frekvenciatartománybeli alakja alapján az áramsűrűség divergenciájával a

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega\rho \rightarrow \rho = -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \vec{J} \quad (3.7)$$

összefüggéssel, mely segítségével

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega\mu \vec{J} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{J}) \quad (3.8)$$

írható fel. Az egyenlet jobb oldalán kiemelve $j\omega\mu$ -t adódik az elektromos térerősségre vonatkozó differenciálegyenlet végső alakja:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega\mu \left[\vec{J} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \vec{J}) \right]. \quad (3.9)$$

A fenti összefüggés matematikai szempontból egy inhomogén Helmholtz-egyenlet, melynek bal oldalán az ismeretlen vektorfüggvény az elektromos térerősség, a jobb oldalon pedig az inhomogenitást okozó gerjesztés található, amely a formulában teljes egészében az áramsűrűséggel került kifejezése. A gerjesztés általános esetben két komponensből áll. Az első tag ($j\omega\mu \vec{J}$) fizikai tartalma, hogy az áram időbeli változása elektromos teret kelt. A második tag a tértöltések hely szerinti deriváltját, gradiensét tartalmazza, melynek értelmében a töltések jelenléte a vizsgált problémamartományon belül szintén elektromos teret gerjeszt.

A mágneses térerősség kifejezésére alkalmas Helmholtz-egyenlet az itt bemutatottakkal analóg módon levezethető [8]. Ezúttal csak a végső összefüggést közlöm, tekintettel arra, hogy a gyakorlati jelentősége munkám során igen csekély:

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = j\omega\varepsilon \left[\vec{M} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \vec{M}) \right]. \quad (3.10)$$

Tovább bonyolítja a kérdést, hogy a fenti összefüggésben szereplő $\vec{M}$ az úgynevezett mágneses áram, amely fizikailag nem realizálható, pusztán matematikai absztrakció. A Helmholtz-egyenletek megoldásával kapcsolatos szakmai irodalom igen széles és sokszínű [10–12], az ilyen típusú egyenletek kezelésére sokféle lehetséges megoldást ismerünk. Dolgozatomban a momentumok módszeréhez szorosan kapcsolódó Green-függvényekkel történő megoldást fogom bemutatni és alkalmazni.

3.2. Megoldás a Green-függvények alkalmazásával

A megoldás során a Maxwell-egyenletek linearitásának köszönhetően feltételezhetjük, hogy $\vec{J}$ áramsűrűség elemi pontforrások szuperpozíciója egy tetszőleges V térfogatban elosztva. A könnyebb megértés érdekében tekintsük a Helmholtz-operátort

$(\Delta + k^2)$ egy általános rendszeroperátornak. Az egyenlet jobb oldalán reprezentált gerjesztésre a Helmholtz-operátorral leírható rendszer a tárgyalt egyenletnek megfelelő választ ad. A linearitás miatt amennyiben ismert egy pontforrásra (infinitesimális gerjesztés) adott válasz, úgy a kiindulási probléma is megoldható ezen válasz térfogatra történő integrálásával [8]. Vizsgáljuk meg (3.9) egyetlen $(\vec{e}_x)$ irányú komponensét:

$$\Delta E_x + k^2 E_x = j\omega\mu \left(J_x + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \vec{J} \right), \quad (3.11)$$

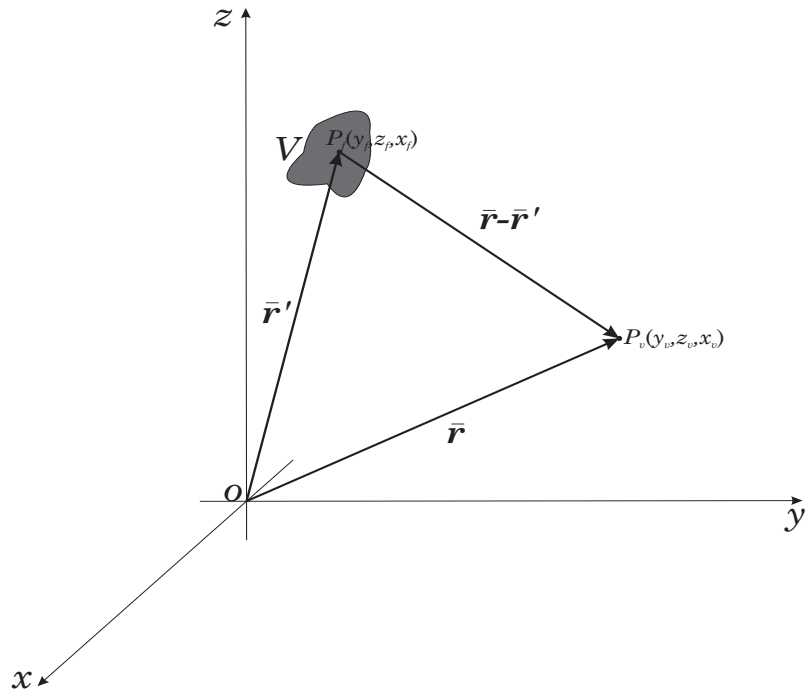
valamint vizsgáljuk meg a Helmholtz-operátorral leírható rendszer impulzusválaszát [13], amely egy olyan $G(\vec{r}, \vec{r}')$ skalár-vektor függvény, amely kielégíti a skalár Helmholtz-egyenletet:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (3.12)$$

Az itt definiált $G(\vec{r}, \vec{r}')$ függvényt Green-függvénynek nevezzük [8, 9, 26] és a Helmholtz-operátor impulzusválaszának tekintjük. A rendszerelmélet értelmében ha ismert az impulzusválasz, úgy a rendszer válasza tetszőleges gerjesztésre meghatározható a konvolúciós integrál segítségével, amit ezúttal nem időben, hanem térben kell elvégezni. A Green-függvény segítségével tehát az elektromos térerősségre felírható konvolúció:

$$E_x(\vec{r}) = -j\omega\mu \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \left[J_x + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \right] d\vec{r}', \quad (3.13)$$

amely teljes, vektoriális alakban az



3.1. ábra. Általános vizsgálati koordináta-rendszer

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \left[\vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \right] \cdot d\vec{r}' \quad (3.14)$$

formulával írható le. Az eddigiekhez teljesen hasonló módon felírható a mágneses térerősség helyfüggése is:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -j\omega\varepsilon \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \left[\vec{M}(\vec{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \right] \cdot d\vec{r}'. \quad (3.15)$$

Dolgozatomban a 3.1. ábra jelölésrendszerét alkalmazom, melynek értelmében a $P_f(y_f, z_f, x_f)$ forráspontba mutat az $\vec{r}'$ vektor, mely az integrálás futóváltozója, a $P_v(y_v, z_v, x_v)$ vizsgálati pontot pedig az $\vec{r}$ vektor jelöli ki.

3.3. A Green-függvények meghatározása

Munkám során két típusú Green-függvényt alkalmaztam: az általános, háromkoordinátás, valamint a kétdimenziós változatot, így ebben a szakaszban ennek a két függvénytípusnak a bemutatására szorítkozom. A Green-függvény meghatározása során (3.12) megoldását keressük. Mivel ez egy inhomogén parciális differenciálegyenlet, az összetevőkre bontás módszerével [5] viszonylag könnyen célt tudunk érni: elsőként tehát a homogén általános megoldást keressük meg, majd a peremfeltételek érvényesítésével meghatározható az inhomogén partikuláris megoldás. A megoldás során figyelembe vehetjük, hogy $G(\vec{r}, \vec{r}')$ a Helmholtz-egyenlet megoldása egyetlen pontforrás esetén, ezért a függvény gömbszimmetrikus, elegendő a sugárirányú összetevő vizsgálata [8]. Így a Laplace-operátor kifejtése a

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{dG}{dr} + r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} \right) = \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dG}{dr} \quad (3.16)$$

alakban írható fel. Ismét a szorzatderiválás szabályát alkalmazva belátható, hogy

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 (rG)}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} + G \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{dG}{dr} + r \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{dG}{dr} \right) = \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dG}{dr}, \quad (3.17)$$

így az $r > 0$ feltétel kikötése esetén a homogén Helmholtz-egyenletbe rG helyettesíthető, a Laplace-operátor pedig r -irányú kétszeres deriválássá egyszerűsödik, tehát igaz lesz a

$$\frac{d^2 (rG)}{dr^2} + k^2 (rG) = 0 \quad (3.18)$$

egyenlet [8]. Matematikai úton belátható [5], hogy az ilyen típusú egyenletek megoldását a

$$G = A \frac{e^{-jkr}}{r} + B \frac{e^{jkr}}{r} \quad (3.19)$$

alakban kereshetjük, ahol a negatív exponens a haladó, a pozitív exponens pedig a reflektált hullámot reprezentálja, ebben az esetben viszont tudjuk, hogy a megoldás csak a haladó komponenst tartalmazza ($B = 0$), ezért elegendő az első tag vizsgálata. Az összefüggésben $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$, tehát az összefüggés a forráspont és a vizsgálati pont közötti vektor hosszának függvénye.

Az inhomogén partikuláris megoldás meghatározásához figyelembe kell venni a peremfeltételt, mely szerint a haladó hullám eltűnik, ha a sugárirányú komponenssel tartunk a végtelenbe:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \quad (3.20)$$

Ezt a feltételt a paraméteres megoldás formailag automatikusan teljesíti, így az $r = 0$ pont vizsgálatával tudjuk meghatározni az ismeretlen A konstans. Ehhez (3.12) integrálására van szükség egy térfogatra. Az integrál miatt az összefüggés jobb oldalán található Dirac-delta automatikusan egységnyi lesz a függvény definíciója szerint:

$$A \int_V \left[\Delta \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + k^2 \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] dV = -1. \quad (3.21)$$

Az összefüggés első tagja a divergenciatétel (2.9) értelmében átírható az

$$\int_V \Delta \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) dV = \oint_A \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cdot \hat{\vec{r}} dA = \oint_A \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) dA \quad (3.22)$$

alakra, hiszen gömb esetén a sugárirányú egységvektor megegyezik a vizsgált felület normálisával. Elvégezve a függvény radiális deriválását, valamint figyelembe véve, hogy a zárt gömbfelület az $A = 4\pi a^2$ formulával határozható meg, az integrál határértéke az origóban ($a \rightarrow 0$):

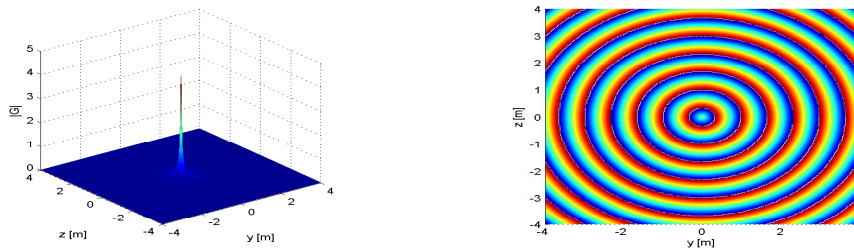
$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(4\pi a^2 \left[\frac{\frac{e^{-jkr}}{-jk} r - e^{-jkr}}{r^2} \right]_{r=a} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(4\pi a^2 \left[-\frac{1}{r^2} \right]_{r=a} \right) = -4\pi. \quad (3.23)$$

Az összefüggés második tagja sugárirányú vonalintegrálra egyszerűsíthető:

$$k^2 \int_V \frac{e^{-jkr}}{r} dV = k^2 4\pi \int_0^a r^2 \frac{e^{-jkr}}{r} dr = k^2 4\pi \int_0^a r e^{-jkr} dr, \quad (3.24)$$

ami nullához tart, ha a felső határt a nullához közelítjük. Így az A konstans és a keresett Green-függvény már kifejezhető [14]:

$$-A \cdot 4\pi = -1 \rightarrow A = \frac{1}{4\pi}, \quad G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (3.25)$$



3.2. ábra. A Green-függvény yz -metszetének abszolút értéke és fázisa ($\vec{r}' = [0, 0]$)

Bár a levezetett háromdimenziós Green-függvény alkalmas kétdimenziós problémák kezelésére is, a vonatkozó szakirodalom [8, 9, 14] külön kezeli a speciális kétdimenziós vizsgálatokra alkalmas függvényt, amely a levezetés mellőzésével a

$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \quad (3.26)$$

formulával írható fel, ahol $\vec{\rho}$ a kétdimenziós helyvektor, $H_0^{(2)}$ pedig a másodfajú, nulladrendű Hankel-függvényt jelöli, mely szoros kapcsolatban áll a Bessel-függvényekkel [15]. A formula előnye, hogy beépítetten rendelkezésre áll a **Matlab** [16] környezetben, hátránya, hogy amennyiben a Green-függvény analitikus deriváltjára van szükség, úgy annak előállítása kevésbé célravezető, ellenben a háromdimenziós, általános formulával.

3.4. A mágneses vektorpotenciál

Az eddig bemutatott sugárzási összefüggések segítségével a gerjesztő mennyiségek-ből közvetlenül meghatározható az elektromos és mágneses térerősség a tér bármely pontjában. Dolgozatom az egyenletek numerikus megvalósítását a későbbiek folyamán részletezi. A térerősségek komplex csúcértéke meghatározható egy közbeiktartott mennyiség, a mágneses vektorpotenciál bevezetésének segítségével is. Mivel a mágneses indukcióvektor divergenciamentes, az bevezethető az úgynevezett vektorpotenciál rotációjaként:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.27)$$

mert

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}(\vec{r})) = 0, \quad \forall \vec{v}(\vec{r}). \quad (3.28)$$

A Faraday-féle indukciós törvény frekvenciatartománybeli alakjába visszahelyettesítve a vektorpotenciál rotációját, majd az egyenletet átrendezve

$$\nabla \times (\vec{E} + j\omega \vec{A}) = 0 \quad (3.29)$$

adódik. Ismert vektoranalitikai azonosság szerint [5] egy skalármező gradiensének rotációja mindig zérus, tehát

$$\nabla \times (-\nabla \Phi) = 0, \quad (3.30)$$

az elektromos térerősség felírható a vektorpotenciál és egy tetszőleges skalárpotenciál összegeként:

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \nabla \Phi. \quad (3.31)$$

Véve a $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$ konstitúciós reláció rotációját, továbbá felhasználva (3.3) összefüggést az

$$\mu \nabla \times \vec{H} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (3.32)$$

egyenlet írható fel. Felhasználva az Ampère-féle gerjesztési törvényt és az elektromos eltolásra vonatkozó konstitúciós relációt

$$\mu \vec{J} + j\omega \mu \epsilon \vec{E} = \mu \vec{J} + j\omega \mu \epsilon (-j\omega \vec{A} - \nabla \Phi) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (3.33)$$

adódik, melyet átrendezve felírható a megoldandó egyenlet:

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\varepsilon\Phi \right). \quad (3.34)$$

A mágneses vektorpotenciál rotációját már definiáltuk, de a divergenciáját még nem írtuk elő. Ez tetszőlegesen megtehető. A Coulomb-mértékkel [17] ellentétben ezúttal nem zérus, hanem

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon\Phi \quad (3.35)$$

választással célszerű élni (Lorenz-mérték), hiszen így (3.34) a következő összefüggésre egyszerűsödik:

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}. \quad (3.36)$$

Ez az ismert inhomogén, vektoriális Helmholtz-egyenlet, megoldása az eddigiekkel teljesen analóg módon megadható az áramsűrűség, tehát az inhomogenitást okozó általános gerjesztés és a Green-függvény helytartománybeli konvolúciójával:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV'. \quad (3.37)$$

Ez tulajdonképpen három sakláregyenlet: A_x , A_y és A_z komponensekre, Descartes-féle koordináta-rendszert feltételezve. Általánosan kifejezve az elektromos térerősség a tér bármely pontjában a vektorpotenciál segítségével az

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \nabla\Phi = -j\omega \vec{A} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) \quad (3.38)$$

összefüggés segítségével számítható. A szimulációk során gyakran előfordul, hogy a mágneses vektorpotenciál kizárólag z -irányú komponenssel rendelkezik ($\vec{e}_z A_z(x, y, z)$), mely esetben a vonatkozó elektromos térerősség-komponensek kifejtése Descartes-féle koordináta-rendszerben [9]:

$$E_x = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}, \quad E_y = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}, \quad E_z = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z. \quad (3.39)$$

Ezt a módot z -re transzverzális módusnak nevezzük (TM^z), mely esetén a kialakuló mágneses mező z -irányú komponense zérus. Az itt bemutatott két összefüggés közül minden esetben azt célszerű alkalmazni, amelyikkel a lehető leggyorsabban és legpontosabban eredményre tudunk jutni. Amennyiben a gerjesztő áramsűrűség távolterében vizsgáljuk a létrehozott térerősséget egy geometriai alakzat, például egy kör vagy gömb mentén, úgy felesleges közbeiktatott potenciálmennyiség meghatározása, célszerű a diszkrét vizsgálati pontokra a térerősség értékének közvetlen meghatározása az ismert gerjesztés felhasználásával. Amennyiben a kisugárzott tér vizsgálata a cél, úgy numerikus módszerekkel jobban és pontosabban kezelhető a vektorpotenciálból történő származtatás, hiszen ebben az esetben az iránymenti deriváltak numerikus előállítása során biztosan nem adódik a kis változókülönbségből adódó szingularitás.

4. fejezet

A momentumok módszere

Ebben a fejezetben főbb vonásait tekintve ismertetem a momentumok módszerének alkalmazását, hasonlóságait és különbségeit a végeselem-módszerhez képest. Bemutatom a módszer használata során alkalmazható tipikus bázisfüggvényeket, vizsgálati módszereket, azok előnyeit és hátrányait.

4.1. A probléma általánosítása

A momentumok módszere sokoldalúan alkalmazható numerikus technika parciális differenciálegyenletek megoldására. Felhasználása jellemzően a frekvenciatartománybeli problémák vizsgálatára terjedt el, de itt érdemes megjegyezni, hogy alkalmas időtartománybeli analízisre is [18]. Vizsgáljunk meg egy általánosított problémát, mely az

$$\mathcal{S}\{f\} = g \quad (4.1)$$

alakban írható fel, ahol f az ismeretlen függvény, melyre $\mathcal{S}\{\cdot\}$ lineáris operátor hat (ez utóbbi tipikusan integrál és/vagy differenciáloperátor), g pedig egy ismert gerjesztőfüggvény, fizikai tartalma a vizsgált problémától függ (erő, potenciál, áram, beeső elektromos térerősség) [8]. A momentumok módszerének alkalmazása során a vizsgált problémátartományt N darab diszkrét elemre szükséges felbontani (egydimenzióban szakaszokra, kétdimenzióban például négyszögekre), majd az ismeretlen függvényt ugyanennyi súlyozott bázisfüggvény összegeként kell közelíteni:

$$f \approx \sum_{n=1}^N a_n f_n, \quad (4.2)$$

ahol a_n az n -edik ismeretlen súlyozókonstanst jelenti. Az ismeretlen függvényre ható operátor linearitása miatt a konstanssal szorzás, az összegzés és az operátor alkalmazásának sorrendje felcserélhető, így az eredeti összefüggés a

$$\sum_{n=1}^N a_n \mathcal{S}\{f_n\} \approx g \quad (4.3)$$

alakban írható fel, amely az eredeti egyenlet közelítése, hiszen véges mennyiségű súlyozott bázisfüggvényt alkalmazunk. Így a reziduál az

$$R = g - \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{S}\{f_n\} \quad (4.4)$$

összefüggéssel definiálható. A megoldás során az a cél, hogy a reziduálfüggvényt a vizsgált problémátartományon belül bizonyos feltételek kikötése mellett, súlyozófüggvények felhasználásával nullára csökkentsük. Ezt a módszert általánosan a súlyozott maradékok elvének nevezzük, melynek a momentumok módszere egy speciális esete [20].

4.2. A momentum fogalma

A momentumok módszere esetében a súlyozófüggvény mindig polinomfüggvény, melyből számszerűen annyit kell alkalmazni, ahány bázisfüggvényt értelmeztünk a vizsgált problémátéren belül. Definiáljuk az úgynevezett belső szorzatot, másnéven *momentumot* $f_m(\vec{r})$ súlyozófüggvény és $f_n(\vec{r})$ bázisfüggvény között a következőképpen [19]:

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_{f_m} f_m(\vec{r}) f_n(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (4.5)$$

Ezt felhasználva belátható, hogy az egyes súlyozófüggvények reziduálfüggvénnyel vett belső szorzata mindig zérust ad, azaz

$$\langle f_m, R \rangle = \langle f_m, g \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle f_m, \mathcal{S} \{f_n\} \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Kifejtve a belső szorzatokat és átrendezve az egyenletet a

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_{f_m} f_m(\vec{r}) \mathcal{S} \{f_n(\vec{r})\} \cdot d\vec{r} = \int_{f_m} f_m(\vec{r}) g(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (4.7)$$

összefüggés írható fel. Ez az egyenlet egy $N \times N$ -es mátrixegyenletet eredményez, amely általánosan a

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (4.8)$$

alakban adódik, ahol $\mathbf{Z}$ az együttható- vagy impedanciamátrix, m -edik sorának n -edik eleme a

$$z_{mn} = \langle f_m, \mathcal{S} \{f_n\} \rangle = \int_{f_m} f_m(\vec{r}) \mathcal{S} \{f_n(\vec{r})\} \cdot d\vec{r} \quad (4.9)$$

összefüggéssel határozható meg, $\mathbf{a}$ az ismeretleneket tartalmazó, $\mathbf{b}$ pedig a gerjesztést reprezentáló oszlopvektor, melynek elemei általánosan a

$$b_m = \int_{f_m} f_m(\vec{r}) g(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (4.10)$$

integrállal számíthatók. Az egyenlet jobb oldala a probléma komplexitásától, a szimmetriától és a gerjesztés típusától függően több, külön kezelendő oszlopvektor szuperpozíciójaként is előállhat, melyek elősorban a peremfeltételek kezelésekor bírnak kiemelt jelentőséggel.

4.3. Galerkin-módszer és a pont-illesztés

A súlyozófüggvény megválasztási módjától függően a momentumok módszerének többféle alkalmazási módszere létezik [26]. A legelterjedtebb és egyben legegyszerűbb alkalmazási módszer az úgynevezett pont-illesztéses eljárás. Ennek lényege, hogy a súlyozófüggvényt Dirac-deltának választjuk, azaz

$$f_m(\vec{r}) = \delta(\vec{r}). \quad (4.11)$$

Alkalmazásának legfontosabb előnye, hogy a súlyozófüggvény és a bázisfüggvény között értelmezett speciális belső szorzat kiértékelése során csupán az $f_n(\vec{r})$ -re ható $\mathcal{S}\{\cdot\}$ operátort szükséges numerikusan kiértékelni:

$$z_{mn} = \int_{f_m} \delta(\vec{r}) \mathcal{S}\{f_n(\vec{r})\} \cdot d\vec{r} = \mathcal{S}\{f_n(\vec{r})\}. \quad (4.12)$$

A pont-illesztéses eljárás hátránya, hogy a peremfeltételek kizárólag a diszkrét vizsgálati pontokon érvényesíthetők, a vizsgálati tartomány többi részén nem, így azokon akár más értékeket is felvehetnek. Ettől függetlenül a pont-illesztéses eljárás az esetek többségében kielégítő eredményt ad [8, 20].

A másik elterjedt módszer az úgynevezett Galerkin-módszer, mely esetén a felhasznált súlyozófüggvények megegyeznek az alkalmazott bázisfüggvényekkel. Ebben az esetben az impedanciamátrix elemeinek meghatározásához az $\mathcal{S}\{\cdot\}$ operátor numerikus kiértékelésén túl a súlyozófüggvény szerinti integrál kiszámítására is szükség van.

4.4. Bázisfüggvények

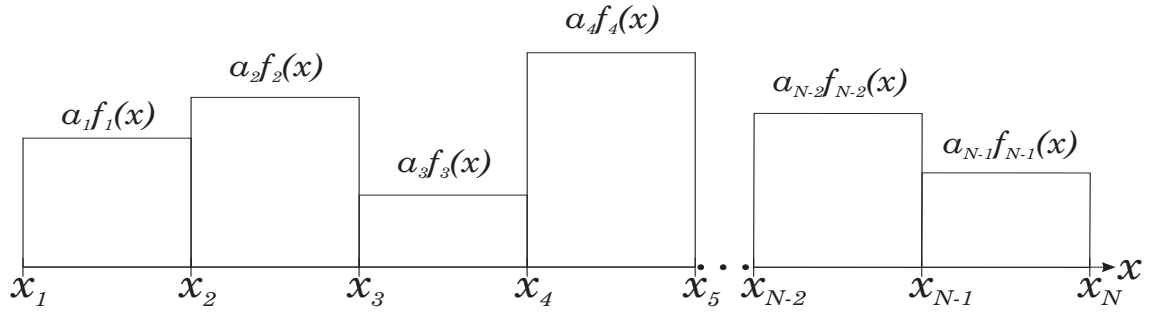
A momentumok módszerének alkalmazása során használt bázisfüggvények két alapvető csoportba sorolhatók:

- a teljes vizsgálati tartományt lefedő, valamint
- annak csak egy részét érintő lokális bázisfüggvényekről.

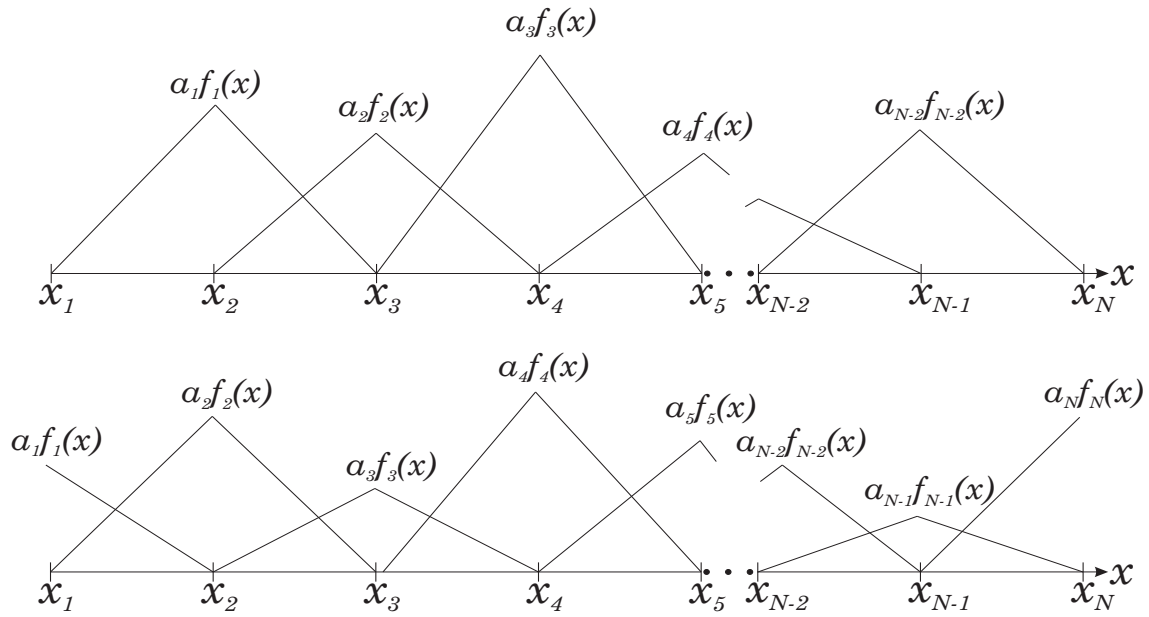
A teljes tartományt lefedő bázisfüggvénnyel dolgozatomban nem foglalkozik, mivel alkalmazása kevésbé elterjedt. Lokális bázisfüggvényre a legegyszerűbb példa a 4.1. ábrán látható úgynevezett ugrásfüggvényes megvalósítás. A lokális ugrásfüggvényt matematikailag a következőképpen lehet definiálni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_n \leq x \leq x_{n+1}, \\ 0, & \text{minden más esetben.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Az ugrásfüggvény alkalmazásának előnye, hogy egy-egy elem felett értelmezve konstans, így az impedanciamátrix elemeinek numerikus kiértékelését jelentősen leegyszerűsíti. Hátránya, hogy a függvény x -szerinti deriválása az elemek végein Dirac-deltát eredményez, így ez a típusú bázisfüggvény nem alkalmazható abban az esetben, ha $\mathcal{S}\{\cdot\}$ operátor tartalmaz x -irány szerinti deriváltat.



4.1. ábra. Az ugrás bázisfüggvény



4.2. ábra. A háromszög-típusú bázisfüggvény

Az x -szerinti deriváltak kezelését például a 4.2. ábrán látható háromszög-típusú bázisfüggvények segítségével lehet kiküszöbölni. Ennek két típusa létezik: a felső ábrán látható megoldás explicit módon kikényszeríti, hogy a diszkrétizált probléma-tartomány végein a keresett függvény értéke zérus legyen. Ez a típusú bázisfüggvény tehát csak ebben az esetben alkalmazható. Így az N darab pont segítségével $N - 1$ szakaszra diszkrétizált tartomány felett $N - 2$ bázisfüggvény értelmezhető, melyeket az

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}, & \text{ha } x_n \leq x \leq x_{n+1}, \\ \frac{x-x_{n+2}}{x_{n+1}-x_{n+2}}, & \text{ha } x_{n+1} \leq x \leq x_{n+2} \end{cases} \quad (4.14)$$

lehet meghatározni. Amennyiben nem feltételezhetjük, hogy a megoldás a problémater két peremén zérus, úgy az alsó ábrán bemutatott bázisfüggvény-elrendezést szükséges alkalmazni. Ebben az esetben N darab bázisfüggvényt kell meghatározni, a következőképpen:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & \text{ha } x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ \frac{x-x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}, & \text{ha } x_n \leq x \leq x_{n+1}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Antennák szimulációja során gyakran alkalmazott lokális bázisfüggvény az úgynevezett szinuszos bázisfüggvény, hiszen az antennák árameloszlása szinuszos, így a megoldás a bázisfüggvények segítségével kevesebb ismeretlen segítségével, pontosabban közelíthető. Mivel a huzalantennák árameloszlása az antenna végein zérusnak adódik, így felesleges a lineáris, háromszög-típusú bázisfüggvények esetén bemutatott két altípus kezelése, az ismeretlen konstans a problémátér két végén zérusnak választható.

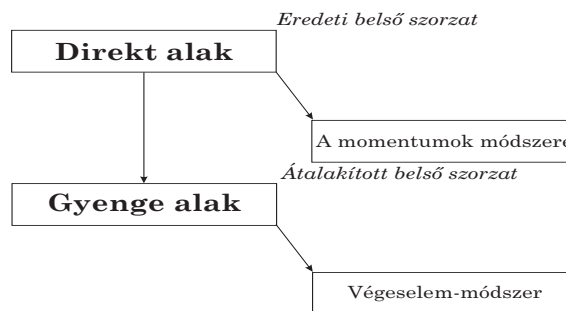
4.5. A momentumok módszere és a végeelem-módszer

A momentumok módszerének tárgyalása során érdemes azt a széleskörben elterjedt numerikus módszerek között kontextusba helyezni, így mutatva be a módszer sajátosságait, valamint a fontosabb eltéréseket egyéb numerikus technikák vonatkozásában. Mivel alapszakos tanulmányaim során foglalkoztam a végeelem-módszer alkalmazásával az alacsonyfrekvenciás téranalízis tekintetében [17], így kézenfekvő, hogy a momentumok módszerét ezzel a technikával vessem össze.

Mind a momentumok módszere, mind a végeelem-módszer numerikus technika parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására. Alkalmazásuk elve abban áll, hogy nem törekszenek a keresett függvény pontos meghatározására és a peremfeltételek tökéletes kielégítésére, hanem az eredeti egyenlet egy tetszőleges N formafüggvénnyel vett belső szorzatát teszik egyenlővé nullával [22]:

$$\langle N, \mathcal{PDE} \rangle = \int_{\Omega} N \cdot \mathcal{PDE} \, d\Omega = 0. \quad (4.16)$$

A belső szorzat alkalmazásától függően két, egymástól jelentősen eltérő numerikus technikát lehet megkülönböztetni. Amennyiben a belső szorzat definíciós integrálja az eredeti formájában kerül meghatározásra, úgy a *direkt alak*hoz jutunk. Így a parciális differenciálegyenletben szereplő deriváltak rendje változatlan marad. A momentumok módszere ilyen, a direkt alakot kezelő numerikus technika. Ha a belső szorzatban a szorzatfüggvényre vonatkozó integrálási tétel kerül alkalmazásra, úgy a deriválás rendje eggyel csökken, és az úgynevezett *gyenge alak*hoz jutunk. A végeelem-módszer ilyen, a gyenge alakot kezelő numerikus technika.



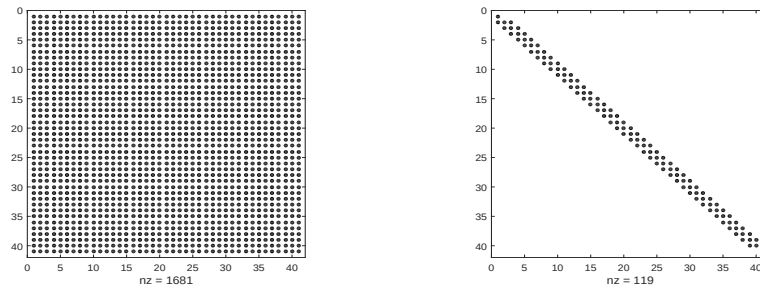
4.3. ábra. A direkt alak és a gyenge alak

A leképezést tekintve mind a momentumok módszerének, mind a végeelem-módszer alkalmazása során az eredeti összefüggést egy lineáris algebrai egyenlet-

rendszerre képezzük le, melynek általános struktúrája megegyező: egy négyzetes mátrix kerül jobbról megszorozásra az ismeretlenek tartalmazó oszlopvektorral az egyenlet bal oldalán, míg a jobb oldalon a peremfeltételeket, valamint időtartománybeli analízis során az előző időlépés értékeit tartalmazó oszlopvektor található:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.17)$$

Az egyenletrendszer megoldásához szükség van a négyzetes mátrix inverzének előállításához, amely a futási idő kérdését tekintve mindkét technika esetében kulcsfontosságú kérdés. Jelentős az eltérés a két módszer alkalmazása között a felépítendő egyenlet bal oldalán található mátrixának jellegzetességeit tekintve is. A végeselem-módszer során az együtthatómátrix minden esetben ritka mátrix (angol nevén *sparse matrix*), mert az egyes csomópontok kizárólag önmagukkal, valamint azokkal a csomópontokkal állnak kölcsönhatásban, melyekkel egy elemet alkotnak. A momentumok módszerének alkalmazása során – a Green-függvény miatt – minden elem kölcsönhatásban áll minden elemmel, így a felépítendő impedanciamátrix minden eleme nullától különböző értékű lesz, ahogyan az a 4.4. ábrán is látható.



4.4. ábra. A teljes impedanciamátrix és a ritka mátrix

Lényeges hasonlóság, hogy mindkét technika esetén az ismeretlen függvény a diszkretizált problémataromány felett kerül meghatározásra az elemeken értelmezett skalár- vagy vektor-függvények súlyozott szuperpozíciójaként [21]. Ezek számában eltérés adódhat: végeselem-módszer esetén – csomóponti formafüggvényeket alkalmazva – annyi ismeretlennel szükséges számolni, ahány csomópont létrejött a diszkretizálás során, míg a momentumok módszerének használata esetén az ismeretlenek száma függ az alkalmazott bázisfüggvény típusától: lokális ugrásfüggvényt alkalmazva ez az érték az elemszámmal lesz egyenlő.

Rádiófrekvenciás problémák végeselem-módszerrel történő vizsgálata során minden esetben le kell zárni a teret, hogy számolható problémát kapjunk. Erre a momentumok módszere esetén nincsen szükség: a keresett térerősség-érték a tér bármely pontjában egyértelműen és függetlenül meghatározható, a tér lezárását a Green-függvények alkalmazása biztosítja. Bár a momentumok módszerével a keresett függvény kevesebb ismeretlen felvételével is pontosabban meghatározható, a szimuláció futási ideje nem csökken a végeselem-módszerhez képest, hiszen a teljes mátrix kezelése, invertálása időigényesebb folyamat, mint a ritka mátrixé. Célszerű tehát alaposan megfontolni, hogy melyik módszer alkalmazása vezet hatékonyabban és gyorsabban célra.

5. fejezet

Stacionárius problémák vizsgálata

Ebben a fejezetben bemutatom az elektrosztatika legfontosabb összefüggéseit, alapegyenletének levezetését, a Laplace-Poisson-egyenletet, valamint annak általános megoldását. Ismertetem a Laplace-Poisson-egyenlet megoldásának módját a momentumok módszerének segítségével egydimenziós és kétdimenziós geometria esetén, részletesen kitérve az egyenlet numerikus kezelésére, a felmerülő integrálok meghatározásának módjára. Bemutatom a szimuláció lépéseit, kiértékelem a kapott eredményeket.

5.1. Az elektrosztatika általános alapegyenlete

Elektrosztatikus teret nyugvó töltések hozhatnak létre. A tér időben nem változik ($\partial/\partial t = 0$), valamint áram sem folyik ($\vec{J} = 0$). Ezek alapján a teret lineáris, izotrop közegben a következő specifikus Maxwell-egyenletek írják le:

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5.2)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (5.3)$$

Mivel egy skalármező gradienseinek rotációja minden esetben nulla, az elektromos térerősségvektor bevezethető egy skalármező negatív gradienseként (5.1.) értelmében:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0, \quad \forall \varphi(\vec{r}, r) \rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi. \quad (5.4)$$

Behelyettesítve a $\vec{D}$ és $\vec{E}$ között kapcsolatot teremtő konstitúciós relációba, valamint behelyettesítve (5.2.) összefüggésbe adódik az elektrosztatika általános egyenlete:

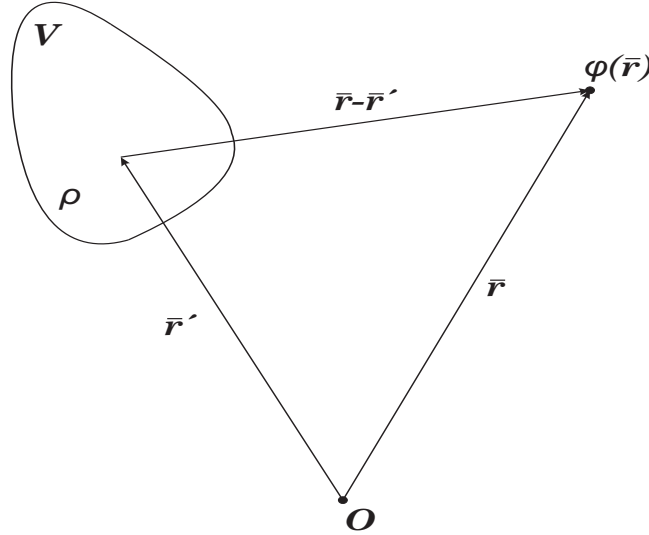
$$-\nabla \cdot \varepsilon \nabla \varphi = \rho. \quad (5.5)$$

A vizsgált probléma speciális esete, amikor a permittivitás a vizsgált tartományon belül konstans, így kiemelhető a differenciáloperátorok közül. Ez az úgynevezett Laplace-Poisson-egyenlet:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (5.6)$$

5.2. A Laplace-Poisson-egyenlet megoldása

Az elektrosztatika általános problémáját az 5.1. ábra mutatja. A ρ töltéssűrűség egy V térfogatban helyezkedik el, amelynek egy infinitezimálisan kicsi dV' térfogatrészére $\vec{r}'$ vektor mutat. A φ skalárpotenciál értékét az $\vec{r}$ vektor által kijelölt pontban keressük. A dV' térfogatban található konstans ponttöltés értéke a töltéssűrűséggel



5.1. ábra. Általános elektrosztatika-probléma

kifejezve:

$$dQ' = \rho(\vec{r}') dV'. \quad (5.7)$$

Ez a ponttöltés a kijelölt pontban

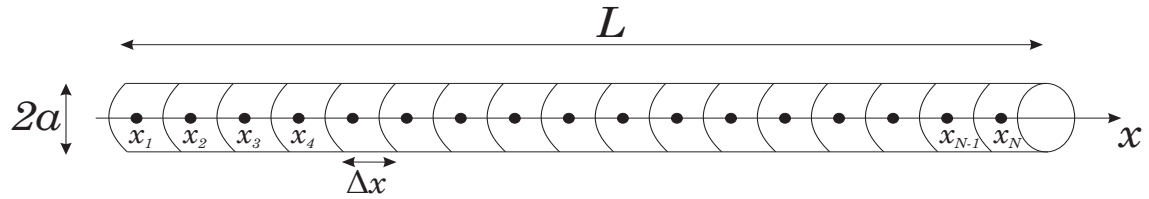
$$d\varphi' = \frac{dQ'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.8)$$

potenciáljárulékot hoz létre. Az ebben a pontban létrejövő teljes potenciál meghatározásához az $\vec{r}'$ vektor teljes V térfogaton történő végigpásztázására van szükség. Ennek értelmében a fenti összefüggés járulékösszege egy integrált eredményez, amely egyben a Laplace-Poisson-egyenlet megoldásának általános alakja is:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (5.9)$$

5.3. Egydimenziós probléma: töltött huzal

Munkám során megvizsgáltam egy olyan, az x -tengely mentén elhelyezett, ismert φ_0 potenciállal rendelkező, vékony, vezető anyagból készült huzal töltéseloszlását, amely L hosszúsággal és a sugárral rendelkezik. A vizsgálat során feltételeztem, hogy a huzal sugara jelentősen kisebb annak hosszánál ($a \ll L$). A probléma geometriája az 5.2. ábrán látható. A Laplace-Poisson-egyenlet általános megoldásának



5.2. ábra. A vizsgált geometriai elrendezés

értelmében a huzal potenciálja a

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^L \frac{q(x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' \quad (5.10)$$

összefüggés segítségével számítható. Ha ismert φ_0 potenciál, és a keresett függvény a $q(x')$ potenciáeloszlás, akkor a fenti összefüggést integrálegyenletként kell kezelni, melyet numerikusan meg lehet oldani. Ehhez a keresett függvényt diszkrét mennyiségű súlyozott bázisfüggvény szuperpozíciójaként szükséges felírni, azaz

$$q(x') = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x'), \quad (5.11)$$

ahol a vizsgált problémátér (tehát a huzalt reprezentáló szakaszt) N darab szegmensre került felbontásra. A szimulációt lokális ugrás-bázisfüggvények segítségével végeztem el, $f_n(x')$ tehát olyan függvény, amely Δx hosszúságú elemen konstans 1, értéke minden egyéb helyen nulla. Behelyettesítve (5.10.) egyenletbe

$$\varphi_0 = \int_0^L \sum_{n=1}^N a_n f_n(x') \frac{1}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} dx' \quad (5.12)$$

írható fel. Ezt az összefüggést célszerű úgy átalakítani, hogy a teljes huzalhosszra értelmezett integrált az egyes diszkrét elemek felett értelmezett integrálok összegeként kerüljenek kifejtésre. Ezek a részintervallumok Δx hosszúságúak, így az integrálok $(n-1)\Delta x$ és $n\Delta x$ között értelmezettek. Figyelembe véve, hogy a bázisfüggvény az integrál tartói között konstans 1 értékű, ezért az integrandust érdemben nem befolyásolja, a következő összefüggés írható fel:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N a_n \int_{(n-1)\Delta x}^{n\Delta x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx', \quad (5.13)$$

ahol $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + a^2}$, mivel a megoldás során a forráspontokat a huzal tengelyén, a vizsgálati pontokat pedig a huzal felületén kell rögzíteni. Ebben az esetben az integrandus nem fog szingularitással rendelkezni, mert a nevező semmilyen x és x' értékére sem lesz zérus. Így egyetlen egyenlet áll rendelkezésünkre, melyben

N darab ismeretlen található:

$$\begin{aligned}
 4\pi\epsilon\varphi_0 = & a_0 \int_0^{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+a^2}} dx' + a_1 \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+a^2}} dx' + \dots \\
 & + a_{N-1} \int_{(N-2)\Delta x}^{(N-1)\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+a^2}} dx' + a_N \int_{(N-1)\Delta x}^{N\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+a^2}} dx'.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

A probléma akkor válik megoldhatóvá, hogyha N ismeretlen és N darab egyenlet áll rendelkezésre, így N darab forráspontot szükséges megválasztani a huzal felületén. Ebből egy lineáris algebrai egyenletrendszer adódik:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}, \tag{5.15}$$

ahol

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \int_0^{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_1-x')^2+a^2}} dx' & \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_1-x')^2+a^2}} dx' & \dots & \int_{(N-1)\Delta x}^{N\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_1-x')^2+a^2}} dx' \\ \int_0^{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_2-x')^2+a^2}} dx' & \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_2-x')^2+a^2}} dx' & \dots & \int_{(N-1)\Delta x}^{N\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_2-x')^2+a^2}} dx' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_N-x')^2+a^2}} dx' & \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_N-x')^2+a^2}} dx' & \dots & \int_{(N-1)\Delta x}^{N\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x_N-x')^2+a^2}} dx' \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4\pi\epsilon\varphi_0 \\ 4\pi\epsilon\varphi_0 \\ \vdots \\ 4\pi\epsilon\varphi_0 \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

Az impedanciamátrix minden eleme nullától különböző, valós érték. A probléma megoldása, $\mathbf{a}$ vektor elemeinek meghatározása $\mathbf{Z}$ invertálásával lehetséges:

$$\mathbf{a} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \tag{5.18}$$

5.3.1. Egydimenziós Gauss-kvadratúra

Az impedanciamátrix elemeinek meghatározásához a diszkrétizált problémát felfeltéti vonalintegrálok numerikus meghatározására van szükség. Erre széleskörű eszközkészlet áll rendelkezésre, melyből a legelterjedtebb az egydimenziós Gauss-kvadratúra [23]. A Gauss-típusú kvadratúraképletek középérték-képletek:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{\nu=1}^k c_\nu y_\nu, \quad y_\nu = f(x_{g,\nu}). \tag{5.19}$$

A formulában c_ν a Gauss-kvadratúra súlyait, $x_{g,\nu}$ a pontjait, y_ν pedig az integrandus $x_{g,\nu}$ pontban értelmezett helyettesítési értékét jelöli, c_ν , $x_{g,\nu}$ és k szabadon megválasztható paraméterek, értéküket úgy célszerű megválasztani, hogy a közelítés minél

pontosabb legyen. Általános szabály, hogy k darab pont és súly felhasználásával legfeljebb $(k-1)$ -edfokú polinom közelíthető. A kvadratúraképlet tetszőleges számú súlya és pontja [24] alapján meghatározható és felhasználható. Munkám során az impedanciamátrix elemeinek integrálformuláját harminc súllyal és ponttal közelítettem, amely kielégítő eredményt adott.

Mivel a kiértékelendő formula nem a $[-1; 1]$ intervallumon kerül értelmezésre, hanem egy diszkrét $[(n-1)\Delta x; n\Delta x]$ szakaszelem felett, [5] alapján az

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{\nu=1}^k c_\nu f\left(\frac{b-a}{2}x_{g,\nu} + \frac{a+b}{2}\right) \quad (5.20)$$

transzformációval kell élni. Így az integrál kiértékeléséhez használt összefüggés:

$$\int_{(n-1)\Delta x}^{n\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2}} dx' \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{\nu=1}^k c_\nu \frac{1}{\sqrt{\left[x - \left(\frac{\Delta x}{2}x_{g,\nu} + \Delta x(2n-1)\right)\right]^2 + a^2}}. \quad (5.21)$$

Kis elemszám mellett a Gauss-kvadratúrán kívül hatékonyan alkalmazható még a trapezoid-szabály szerinti numerikus integrálási technika [5] is. Ebben az esetben az integrálás határai által meghatározott szakaszt további diszkrét elemekre kell bontani. A módszer lényege, hogy a keresett függvény értékét x_0 szűk $[x_0; x_0 + dx]$ környezetében elsőfokú polinommal közelítjük. Ezen a szakaszon a keresett görbe alatti terület egy trapéz területével lesz egyenlő, tehát

$$\int_{x_0}^{x_0+dx} f(x) dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_0 + dx)}{2} dx \quad (5.22)$$

írható fel. Ezek alapján az impedanciamátrix elemeinek meghatározásához az

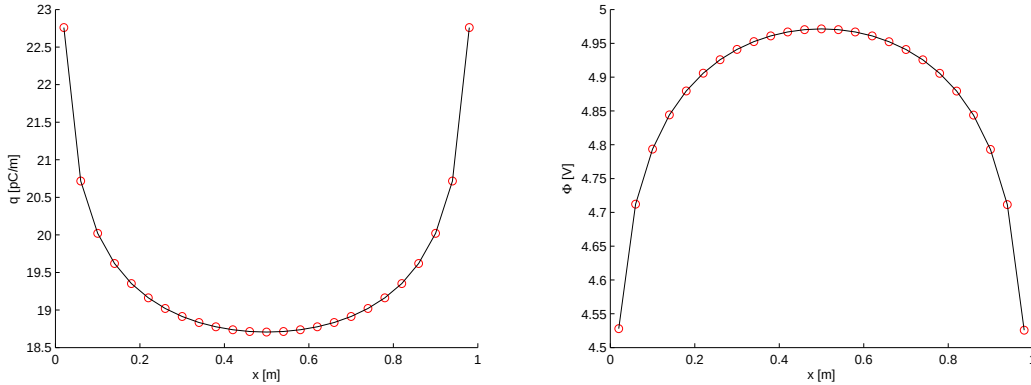
$$\begin{aligned} & \int_{(n-1)\Delta x}^{n\Delta x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2}} dx \approx \\ & \approx \sum_{k=2}^m 0.5 \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x'[k])^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x'[k-1])^2 + a^2}} \right] (x'[k] - x'[k-1]) \end{aligned} \quad (5.23)$$

összefüggés alkalmazható, ahol m az egyes szakaszokon felvett diszkrét pontok számát jelenti.

5.3.2. Eredmények, kiértékelés

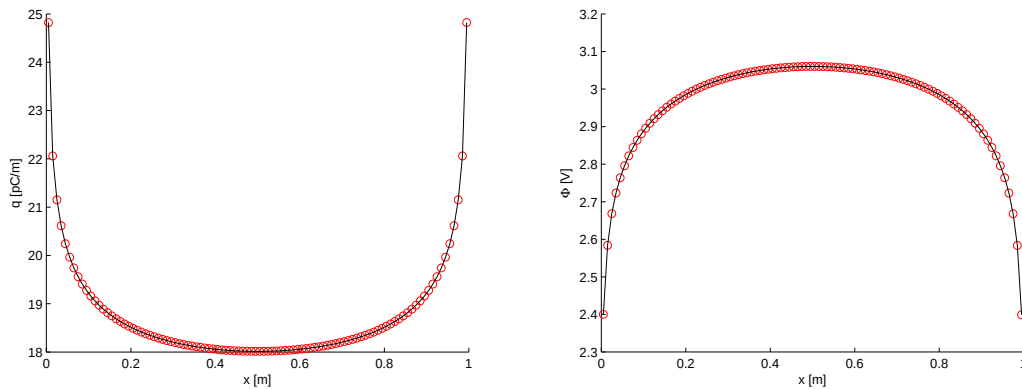
A Matlab-környezetben megvalósított kód az A.1. függelékben megtalálható. A vizsgált esetben a huzal hossza 1 m, sugara (a) tizedmiliméter nagyságú és $\varphi_0 = 3$ V potenciállal rendelkezik. az 5.3. ábrán a huzal töltéseloszlása, valamint abból a ellenőrzésképpen meghatározott potenciáeloszlás látható $N = 25$ darab elem esetén.

Bár a töltéeloszlás jellege a huzal mentén a fizikai képnek megfelelő, az ellenőrzés során a potenciál visszaszámolásával egyértelműen belátható, hogy a 25 elemes diszkrétizálás, így az ismeretlen függvény huszonöt diszkrét pontban történő közelítése nem ad kielégítő eredményt.



5.3. ábra. A töltés- és potenciáeloszlás 25 elem esetén

Száz ismeretlennel vizsgálva a problémát már nemcsak jellegre, hanem számszerűen is jó megoldás adódik. Az 5.4. ábra alapján a huzalmenti töltéeloszlás 20 pC/m nagyságrendbe esik. A függvényt visszahelyettesítve és kiszámolva az integrált a potenciál három volt közeli értékre adódik, így kellően pontos eredményt adódik. Tovább növelve az elemszámot a megoldó futási ideje az elemek feletti numerikus integrálás miatt jelentősen megnövekszik, ezzel párhuzamosan az eredmény csak kismértékben javul.

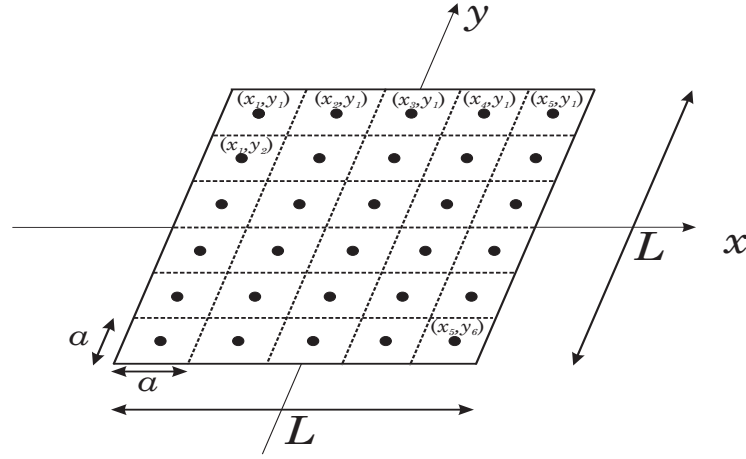


5.4. ábra. A töltés- és potenciáeloszlás 100 elem esetén

5.4. Kétdimenziós probléma: töltött lemez

Munkám során megvizsgáltam egy L oldalhosszúságú, négyzet alakú, φ_0 potenciállal rendelkező töltött lemez töltéeloszlását is. A vizsgálat során azt feltételeztem, hogy a lemez vastagsága elhanyagolható nagyságú annak oldalhosszához képest.

Ez a probléma az előző feladat kétdimenziós kiterjesztésének tekinthető a Laplace-Poisson-egyenlet megoldásának vonatkozásában. A geometriát ebben az esetben is diszkrétizálni szükséges, tetszőleges módon három- vagy négyszögekre. Én az utóbbi választással éltem. A vizsgált geometria az 5.5. ábrán látható. A Laplace-Poisson-



5.5. ábra. A vizsgált, diszkrétizált geometria harminc elem esetén

egyenlet általános megoldása a konkrét lemezgeometriára felírva egy kétdimenziós integrálösszefüggést jelent. Amennyiben a Descartes-féle koordináta-rendszer origóját a lemez közepére rögzítjük, úgy

$$\varphi_0 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{q(x', y')}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' \quad (5.24)$$

írható fel. Ahogyan az egydimenziós szimuláció esetén, úgy a lemez vizsgálata során is az elemek közepére rögzítettem a vizsgálati pontokat és a forráspontokat, a kétváltozós töltéeloszlás-függvényt tehát ezen pontokon közelítettem. A felépítendő lineáris algebrai egyenletrendszer $\mathbf{b}$ vektorát az eddigiekkel teljesen megegyező módon kell felépíteni. Különbség kizárólag az impedanciamátrixban adódik. A mátrix m -edik sorának n -edik oszlopában található elemét a

$$z_{mn} = \iint_{K_n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' = \iint_{K_n} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2}} dx' dy' \quad (5.25)$$

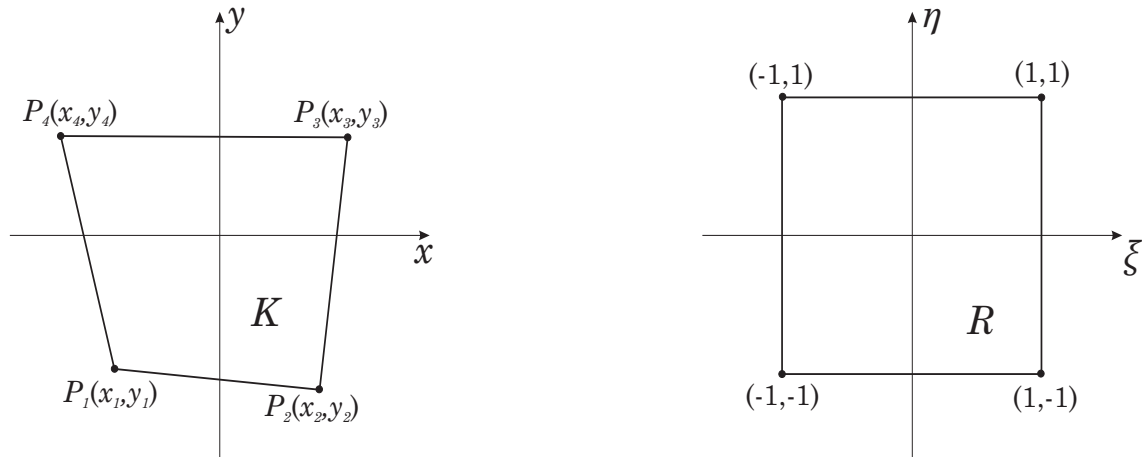
összefüggéssel lehet meghatározni, ahol az integrál K_n tartója a teljes lemezfelület n -edik résznégyzet-területét jelenti, x_m és y_m pedig az m -edik forrásrész négyzet középpontjának koordinátáit jelöli. Az integrál kiértékeléséhez kétdimenziós numerikus integrálási technikára van szükség. Itt érdemes megjegyezni, hogy az integrandus az $(x_m, y_m) = (x', y')$ pontban szingularitással rendelkezik. Belátható, hogy a szingularitás minden sorban egyszer jelentkezik: amikor $m=n$, tehát a műveletet a forráspontot tartalmazó négyzet felett kell elvégezni. Ez egyben az impedanciamátrix főátlóját fogja jelenteni. Az integrálási technika megválasztása során különös figyelmet kell fordítani tehát a szingularitáshoz tartozó helyettesítési érték felhasználásának elkerülésére.

5.4.1. Az impedanciamátrix elemeinek kiértékelése

A vonatkozó szakirodalom [8,9] az impedanciamátrix elemeinek meghatározását két részproblémára bontja: a főátló elemeinek kiértékelését analitikus módon végzi el, a többi elem meghatározására pedig közelítő képletet alkalmaz. Vizsgálataim során ettől a módszertől elszakadva egy speciális, négyszögek felett alkalmazható kvadrátúraformulát alkalmaztam az impedanciamátrix felépítéséhez, amely a Gauss-kvadrátúra súlyainak és pontjainak alkalmazásával képes az összes elem kiszámítására [25]. A formula alkalmas tetszőleges típusú és csúcspont-koordinátájú négyszög területe (K) felett értelmezett $F(x, y)$ kétváltozós függvény közelítésére:

$$I = \iint_K F(x, y) \, dx dy. \quad (5.26)$$

Ez úgy tehető meg, hogy az általános négyszöget egy szabályos, origó középponttal rendelkező, 2 egység oldalhosszúságú négyzetté (R) szükséges transzformálni, amely felett már alkalmazható a kétdimenziós Gauss-kvadrátúra. A transzformáció módját az 5.6. ábra mutatja. Lényege, hogy az xy -síkon értelmezett eredeti



5.6. ábra. Transzformáció a kvadrátúrához

négyszöget csomóponti formafüggvények segítségével a $\xi\eta$ -síkra kell transzformálni, majd a függvény integrálását ezen a síkon szükséges elvégezni. A csomóponti formafüggvények legfontosabb tulajdonsága, hogy i -edik sorszámu értéke az i -edik csomópontban 1, az összes többiben nulla. A transzformációhoz az alábbi négy formafüggvényt alkalmaztam [25]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta). \end{aligned} \quad (5.27)$$

A formafüggvények segítségével végrehajtott transzformációval az eredeti integrál kiszámítható az

$$\iint_K F(x, y) \, dx dy = \iint_R F(P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)) \det J(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \quad (5.28)$$

összefüggés felhasználásával, ahol $P(\xi, \eta)$ az eredeti x , $Q(\xi, \eta)$ pedig az eredeti y változó helyettesítési értéke, kifejtésük a formafüggvények segítségével:

$$\begin{aligned} x = P(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 x_i N_i(\xi, \eta) = x_1 N_1(\xi, \eta) + x_2 N_2(\xi, \eta) + x_3 N_3(\xi, \eta) + x_4 N_4(\xi, \eta), \\ y = Q(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 y_i N_i(\xi, \eta) = y_1 N_1(\xi, \eta) + y_2 N_2(\xi, \eta) + y_3 N_3(\xi, \eta) + y_4 N_4(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (5.29)$$

A transzformáció Jacobi-mátrixának determinánsához szükség van x és y ξ és η szerinti deriváltjaira is, hiszen

$$\det J(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}. \quad (5.30)$$

A deriváltakat analitikus módon határoztam meg:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{x_1}{4}(-1 + \eta) + \frac{x_2}{4}(1 - \eta) + \frac{x_3}{4}(1 + \eta) + \frac{x_4}{4}(-1 - \eta), \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{x_1}{4}(-1 + \xi) + \frac{x_2}{4}(-1 - \xi) + \frac{x_3}{4}(1 + \xi) + \frac{x_4}{4}(1 - \xi), \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{y_1}{4}(-1 + \eta) + \frac{y_2}{4}(1 - \eta) + \frac{y_3}{4}(1 + \eta) + \frac{y_4}{4}(-1 - \eta), \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{y_1}{4}(-1 + \xi) + \frac{y_2}{4}(-1 - \xi) + \frac{y_3}{4}(1 + \xi) + \frac{y_4}{4}(1 - \xi). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Így az eddiek alapján már felírható az impedanciamátrix elemeinek meghatározásához használt összefüggés:

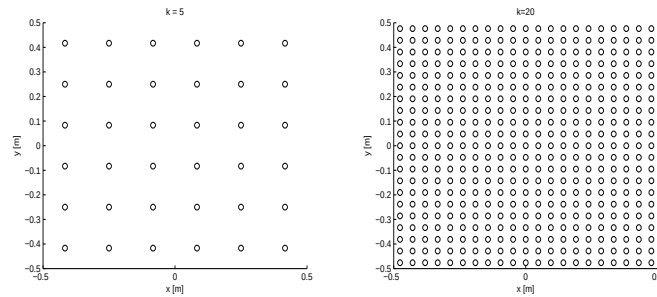
$$\begin{aligned} z_{mn} &= \iint_{R_n} \frac{1}{\sqrt{(x_m - P(\xi, \eta))^2 + (y_m - Q(\xi, \eta))^2}} \det J(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i c_j \frac{1}{\sqrt{(x_m - P(\xi_i, \xi_j))^2 + (y_m - Q(\xi_i, \xi_j))^2}} \det J(\xi_i, \xi_j), \end{aligned} \quad (5.32)$$

melyben c_i és c_j a kvadratura súlyait, ξ_i és ξ_j pedig a pontjait jelöli.

5.4.2. A problématér diszkretizálása

A vizsgált problématérre rác- és hálógeneráló szoftver nélkül, egy szubrutin segítségével diszkretizáltam egyenlő, a oldalhosszúságú négyzetekre. A diszkretizálás

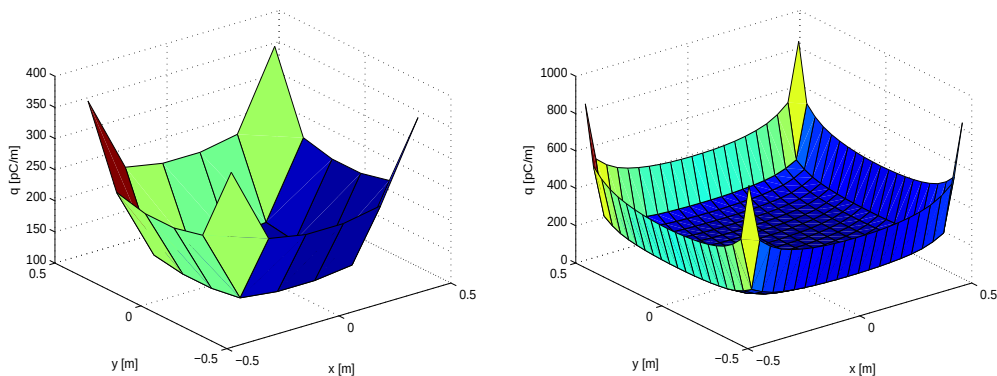
során nem törekedtem az egyes elemek csomópontjainak felvételére, elegendő csupán az elemközepponatok koordinátáinak meghatározása, abból a számítás során a csomópontok egyértelműen meghatározhatók. A diszkretizálás során szabad paraméterként kezeltem azt, hogy a lemez hányszor kerül elvágásra x és y -irányban egyaránt. Két eset lehetséges, melyeket külön kell kezelni: ha páros számú vágással történik a diszkretizálás, illetve ha páratlan számú vágással kerül felosztásra a teljes problématerület. A szubrutin megtalálható az A.2. függelék első részében. Az $L = 1$ méter oldalhosszúságú lemez öt és húsz vágással történő diszkretizálásának eredményét az 5.7. ábra mutatja, melyeken az elemközepponokat ábrázoltam.



5.7. ábra. Diszkretizálás öt és húsz "vágás" esetén

5.4.3. Eredmények, kiértékelés

A szimuláció Matlab-kódja az A.2. függelékben megtalálható. A vizsgált lemez egy 1 méter hosszúságú négyzet, amely $\varphi_0 = 5$ V potenciállal rendelkezik. A megoldást $k = 5$ "vágás" (36 ismeretlen), valamint $k = 20$ "vágás" (441 ismeretlen) esetén az 5.8. ábra mutatja. Könnyen belátható, hogy az egyméteres lemezen felvett har-



5.8. ábra. A lemez töltéseloszlása ($N=36$ és $N=441$ ismeretlennel)

minchat darab ismeretlennel történő megoldás pontatlan eredményt ad, a közelítés hibás. Négyszáz feletti ismeretlennel a töltéseloszlás függvénye már sokkal pontosabban közelíthető, az eredmény jellege az egydimenziós megoldáshoz hasonlóan alakul, egy tetszőleges metszete kvalitatív módon meg is egyezik azzal.

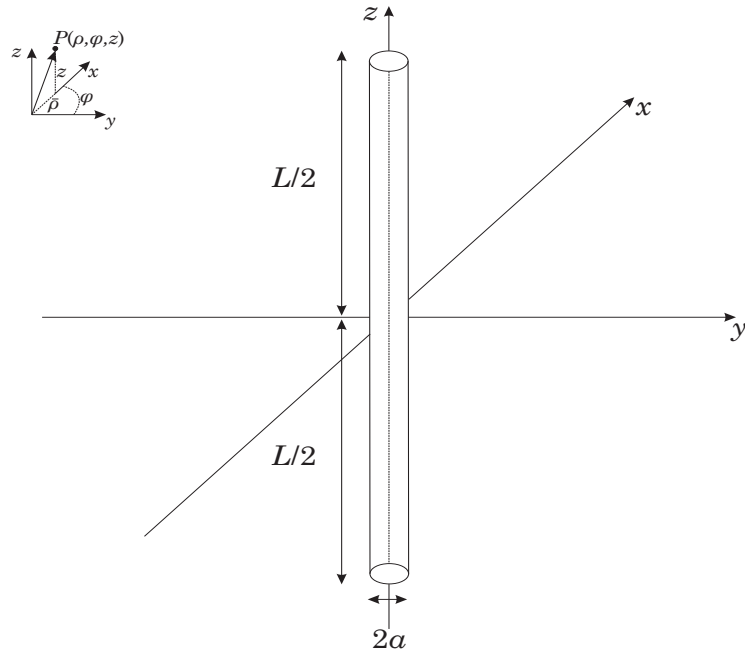
6. fejezet

Rádiófrekvenciás problémák vizsgálata

Ebben a fejezetben bemutatom azokat a formulákat, melyek segítségével meghatározható egy vékony huzal árameloszlása és a kialakuló vektorpotenciál értéke. Ismertetem a Hallén-egyenlet és a Pocklington-egyenlet származtatásának módját, konkrét példák segítségével bemutatom azok megvalósítását a momentumok módszerének segítségével **Matlab**-környezetben. A fejezetben kiértékelem a szimulációs eredményeket, ismertetem az alkalmazott módszerek előnyeit, hátrányait.

6.1. A vékony huzal problémája

A 6.1. ábrán látható elrendezés értelmében a vékony huzal egy olyan, $\vec{e}_z$ -irányú L hosszúságú és a sugarú henger, melynek sugara jelentősen kisebb a vizsgált hullámhosszhoz és a henger hosszához képest. Az elrendezés fontosságát elsősorban



6.1. ábra. A vizsgált elrendezés

az adja, hogy ez a geometriai modell jó közelítése az elemi dipólusantenna és monopólusantenna geometriájának, így azok tulajdonságai, elektromágneses tere meghatározható. Ilyen elemi huzalokból építhetők fel az összetett antennarendszerek is, így a geometria és a hozzá kapcsolódó probléma tekinthető az antennatervezés alapfeladatának is.

Mivel a huzal vékony, az áramsűrűség felírható az $\vec{e}_z$ -irányú vonaláram segítségével:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I_z(z)}{2\pi a} \vec{e}_z. \quad (6.1)$$

Az összefüggés értelmében az áramsűrűség konstansnak tekinthető a huzal keresztmetszetén, másképpen fogalmazva: a formula független φ azimutszög értékétől. A mágneses vektorpotenciál (3.37) értelmében felírható a Green-függvény és az áramsűrűség konvolúciójaként. Ez hengerkoordináta-rendszerben az

$$A_z(\rho, \varphi, z) = \mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{I_z(z')}{2\pi a} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} d\varphi' dz' \quad (6.2)$$

összefüggéssel írható fel [8], ahol

$$r = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2}. \quad (6.3)$$

A vektorpotenciál skalárfelírása elegendő, hiszen az csak z -komponenssel fog rendelkezni. Figyelembe véve, hogy az integrálást a huzal felületén kell végrehajtani ($\rho' = a$), r átírható a koszinusztétel segítségével:

$$r = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (6.4)$$

Az integrandus tehát $(\varphi - \varphi')$ függvénye. Mivel így a megoldás hengeresen szimmetrikusnak adódik, a vektorpotenciál alakulása független lesz φ azimutszög értékétől, a fenti összefüggésben tehát $\cos(\varphi - \varphi') = \cos(\varphi')$:

$$A_z(\rho, z) = \mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{I_z(z')}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} d\varphi' dz'. \quad (6.5)$$

Amennyiben a rendkívül kicsi, úgy $r \approx \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2}$, tehát a belső integrandus független lesz φ' -től, az antenna mentén pedig vonalszerű áramot feltételezhetünk. Így a mágneses vektorpotenciál az

$$A_z(\rho, z) = \mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' \quad (6.6)$$

összefüggés segítségével határozható meg, ami egy viszonylag könnyen kezelhető vonalintegrál a huzal tengelye mentén.

6.2. A Hallén-egyenlet és a Pocklington-egyenlet

A vékony huzal mentén kialakuló áram függvénye (és a mágneses vektorpotenciál is) a Hallén-egyenlet és a Pocklington-egyenlet segítségével határozható meg. Ezek levezetéséhez (3.38) alkalmazására van szükség, amely kapcsolatot teremt a mágneses vektorpotenciál (ismeretlen függvény) és az elektromos térerősség között. Az egyenlet általánosan vektoriális alakban írható fel, de ezúttal a vektormennyiségeknek kizárólag z -komponensük van, ezért elegendő egyetlen skalárösszefüggés kezelése. Figyelembe véve, hogy a későbbiekben részletezett módon megadott gerjesztő (beeső, E_z^{be} térerősség kizárólag z -irányú komponenssel rendelkezik az vektoregyenlet skaláregyenletté redukálódik:

$$E_z^{be} = j\omega A_z + \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z = \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] A_z, \quad (6.7)$$

ahol a forrás- és a megfigyelési pont távolsága $r = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$. Ez annyit jelent, hogy a megoldás során a forráspontokat a huzal felületére, a megfigyelési pontokat pedig a huzal belső tengelyére szükséges rögzíteni.

A formulának kétféle kifejtése ismert. Az első esetben a skalár Helmholtz-operátor a vonalintegrálon kívül helyezkedik el:

$$E_z^{be} = \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' = \frac{j}{\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz'. \quad (6.8)$$

Ez az úgynevezett *Hallén-egyenlet*. Amennyiben a skalár Helmholtz-operátor a vonalintegrálon belül marad, úgy

$$E_z^{be} = \frac{j}{\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz'. \quad (6.9)$$

írható fel. Ez az úgynevezett *Pocklington-egyenlet*.

6.3. A Hallén-egyenlet megoldása

A Hallén-egyenlet megoldása során (6.8) parciális differenciálegyenlet megoldását szükséges megkeresni. Az egyenlet átrendezve általánosan felírható a vektorpotenciálra is az

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] A_z(z) = -j\omega\mu\varepsilon E_z^{be} \quad (6.10)$$

alakban. Ez egy inhomogén, skalár Helmholtz-egyenlet, az ismeretlen függvény a vektorpotenciál z -komponense, a gerjesztés pedig a jobb oldalon található E_z^{be} beeső vagy gerjesztő térerősség. Az egyenlet megoldásának klasszikus módszere a homogén általános és az inhomogén partikuláris megoldás megkeresése, majd az eredmények szuperponálása. A

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] A_z(z) = 0 \quad (6.11)$$

homogén egyenlet megoldása az

$$A_z(z) = K_1 e^{jkz} + K_2 e^{-jkz} \quad (6.12)$$

alakban kereshető, ahol az első tag a reflektált, a második pedig a haladó hullámot reprezentálja. Az inhomogén partikulás megoldás felírásához meg kell keresni azt a $G(z)$ Green-függvényt, amely kielégíti a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] G(z) = \delta(z) \quad (6.13)$$

egyenletet. A Green-függvényt olyan próbafüggvény formájában kell keresni, amely kielégít két szükséges feltételt: $F(z)$ legyen folytonos $z = 0$ -ban, de a deriváltfüggvényének legyen szakadása ugyanott [9]. Ennek megfelel az

$$G(z) = K \sin(k|z|) \quad (6.14)$$

próbafüggvény, melyben k a hullászám, K pedig konstans. A próbafüggvényt visszahelyettesítve (6.13) egyenletbe, valamint a kifejezést integrálva $-\xi$ és ξ között

$$k^2 K \int_{-\xi}^{\xi} \sin(k|z|) dz + \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z^2} dz = 1 \quad (6.15)$$

írható fel, melyből a keresett K konstans meghatározható. Az egyenlet bal oldalán található második tag felírható a Green-függvény első deriváltjának felhasználásával a Newton-Leibniz-formula értelmében:

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z^2} dz = \left[\frac{\partial G(z)}{\partial z} \right]_{-\xi}^{\xi}, \quad (6.16)$$

ahol a próbafüggvény deriváltja a $\frac{Kkz \cos(k|z|)}{|z|}$ formulával írható le. Az abszolútérték miatt a kifejezést az integrálás esetén két részre szükséges bontani, figyelembe véve annak tulajdonságait:

$$\left[\frac{\partial G(z)}{\partial z} \right]_{-\xi}^{\xi} = [-Kk \cos(-kz)]_{-\xi}^0 + [Kk \cos(kz)]_0^{\xi}. \quad (6.17)$$

Ezt visszaírva az eredeti összefüggésbe, valamint ξ értékét közelítve a nullához

$$k^2 K \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{-\xi}^{\xi} \sin(k|z|) dz + \lim_{\xi \rightarrow 0^-} [-Kk \cos(-kz)]_{-\xi}^0 + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} [Kk \cos(kz)]_0^{\xi} = 1 \quad (6.18)$$

írható fel. Az első integrál határértéke nulla, a másik két tagot kifejtve és átrendezve a keresett konstans kifejezhető:

$$2Kk = 1 \quad \rightarrow \quad K = \frac{1}{2k}. \quad (6.19)$$

A konstans felhasználásával a Green-függvény felírható az

$$G(z) = \frac{1}{2k} \sin(k|z|) \quad (6.20)$$

alakban. Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának, valamint a gerjesztés és a Green-függvény térbeli konvolúciójának összege adja:

$$\begin{aligned} A_z(z) &= K_1 e^{jkz} + K_2 e^{-jkz} - j\omega\mu\varepsilon \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G(z, z') E_z^{be}(z') dz' = \\ &K_1 e^{jkz} + K_2 e^{-jkz} - \frac{j\mu}{2\eta} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(k|z - z'|) E_z^{be}(z') dz', \end{aligned} \quad (6.21)$$

ahol $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi$ a szabad tér hullámimpedanciája. Mivel vektorpotenciál helyett az antenna árama az elsődlegesen keresett mennyiség, az egyenlet bal oldala (6.6) értelmében kifejezhető:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' = K_1 e^{jkz} + K_2 e^{-jkz} - \frac{j}{2\eta} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(k|z - z'|) E_z^{be}(z') dz'. \quad (6.22)$$

Ez a formula már implementálásra alkalmas. Fontos megjegyezni, hogy a Green-függvény megválasztása során nemcsak szinuszos próbafüggvény választható, hanem például exponenciális is [8]:

$$G_z(z) = \frac{j}{2k} e^{-jk|z|}, \quad (6.23)$$

továbbá a két homogén tag felírható a

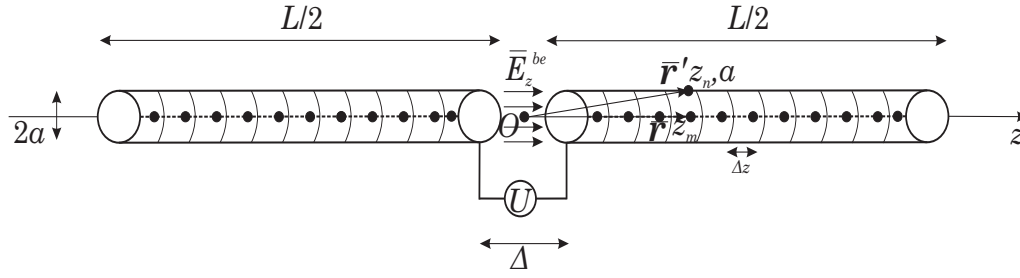
$$K_1 e^{jkz} + K_2 e^{-jkz} = D_1 \cos(kz) + D_2 \sin(kz) \quad (6.24)$$

alakban is.

6.4. Félhullámú dipólus vizsgálata szimmetrikus Hallén-egyenlettel

6.4.1. Vizsgált geometria

Munkám során levezettem és Matlab-környezetben implementáltam a szimmetrikus Hallén-egyenlet megoldását egy félhullámú dipólus árameloszlásának, elektromos térének és az iránykarakterisztikájának meghatározásához. A vizsgált geometria a 6.2. ábrán látható. A vizsgálati pontokat ezúttal is a huzalantenna felületén, a megfigyelési pontokat pedig a huzal középső tengelyén szükséges rögzíteni. A gerjesztés közvetlen módon feszültséggel, közvetett módon pedig E_z^{be} elektromos térerősséggel



6.2. ábra. A vizsgált félhullámú dipólus

történik az antenna közepén, ahol az Δ hosszán megszakításra kerül. Mivel a félhullámú dipólus árameloszlása szimmetrikus, a Hallén-egyenlet speciális, szimmetrikus, redukált változtatát szükséges megoldani és kezelni. A következőkben részletesen kitérek ennek megvalósítására a momentumok módszerével, érintve a gerjesztés és a peremfeltételek megadásának módját is.

6.4.2. Az összefüggés levezetése és implementálása

A szimmetrikus Hallén-egyenlet megoldásához (6.22) egyenlet bal oldalán található árameloszlás-függvényt súlyozott bázisfüggvények szuperpozíciójaként szükséges közelíteni :

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' = \sum_{n=1}^N a_n \int_{f_n} f_n(z') \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz'. \quad (6.25)$$

Mivel N darab ismeretlen meghatározásához N darab tesztfüggvényre és a huzal hosszának N darab Δz hosszúságú szakaszra történő felbontására van szükség, az impedanciamátrix m -edik sorának n -edik oszlopában található elem általánosan a következő formulával határozható meg:

$$z_{mn} = \int_{f_m} f_m(z) \int_{f_n} f_n(z') \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' dz. \quad (6.26)$$

Amennyiben az egyenlet ugrás-bázisfüggvényekkel és pont-illesztéses eljárással kerül megoldásra, úgy a külső integrál egyszerűen elhagyható, és az impedanciamátrix elemei a

$$z_{mn} = \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' \quad (6.27)$$

formulával értékelhetők ki, ahol z_n az n -edik elem középpontjának koordinátáját jelöli, és $r = \sqrt{(z_m - z')^2 + a^2}$. Ezt az integrált egydimenziós Gauss-kvadrátúra segítségével értékeltem ki. Az egyenlet jobb oldalát szintén N darab tesztfüggvénnyel vizsgálva, valamint az exponenciális tagok helyett a trigonometrikus alakot használva, figyelembe véve, hogy a probléma szimmetrikus, ezért a szinuszos komponens

elhagyható, (6.22) alapján

$$D_1 \int_{f_m} f_m(z) \cos(kz) dz - \frac{j}{2\eta} \int_{f_m} f_m(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(k|z - z'|) E_z^{be}(z') dz' dz \quad (6.28)$$

írható fel. Ugrás-bázisfüggvények és pont-illesztéses eljárás használata esetén ez a

$$D_1 \cos(kz) - \frac{j}{2\eta} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(k|z - z'|) E_z^{be}(z') dz' \quad (6.29)$$

formulára egyszerűsödik. Ezek alapján a megoldandó egyenletrendszer a

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{a} = D_1 \mathbf{s} + \mathbf{b} \quad (6.30)$$

alakban adódik, ahol

$$b_m = -\frac{j}{2\eta} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(k|z_m - z'|) E_z^{be} dz' \text{ és } s_m = \cos(kz_m). \quad (6.31)$$

6.4.3. A gerjesztés megadása

Munkám során a lehetséges gerjesztéstípusok közül [8, 9] az úgynevezett *delta-gap*-típusú gerjesztéssel dolgoztam. Ennek lényege, hogy egy U feszültséget szolgáltató ideális feszültségforrást feltételez az antenna Δ hosszan megszakított pontjára, a félhullámú dipólus talppontjai közé. Az két antennaelem között létrejövő, a gerjesztést szolgáltató E_z^{be} elektromos térerősség az

$$E_z^{be} = \frac{U}{\Delta} \quad (6.32)$$

formulával fejezhető ki. Mivel a beeső térerősség az antennának kizárólag azon szakaszán bír nullától különböző értékkel, ahol az antenna megszakításra kerül, $\mathbf{b}$ vektor elemeinek meghatározásához az integrálást elegendő csak ezen rövid Δ szakasz felett elvégezni:

$$b_m = -\frac{j}{2\eta} \int_{\Delta} \sin(k|z_m - z'|) E_z^{be} dz'. \quad (6.33)$$

6.4.4. Peremfeltétel érvényesítése

A probléma megoldásához D_1 konstans meghatározására van szükség, melynek értéke a peremfeltételektől függ. Belátható, hogy az áram az antenna két végén minden esetben nulla kell, hogy legyen, azaz $I_z(-L/2) = I_z(L/2) = 0$. Első lépésben meg kell szorozni az egyenletrendszer mindkét oldalát az impedanciamátrix inverzével:

$$\mathbf{a} = D_1 \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \quad (6.34)$$

A peremfeltétel érvényesíthető egy $\mathbf{u}^T = [1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1]$ oszlopvektor segítségével:

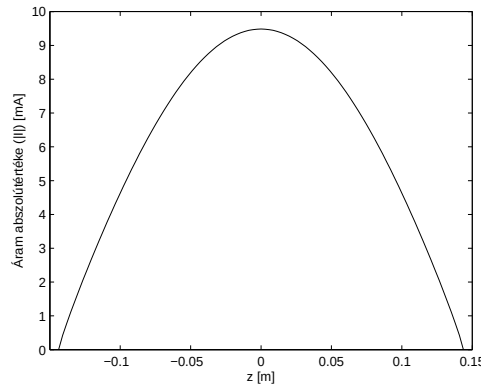
$$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{a} = D_1 \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (6.35)$$

Ezt az egyenletet D_1 -re átrendezve a konstans már meghatározható [8]:

$$D_1 = -\frac{\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{s}}. \quad (6.36)$$

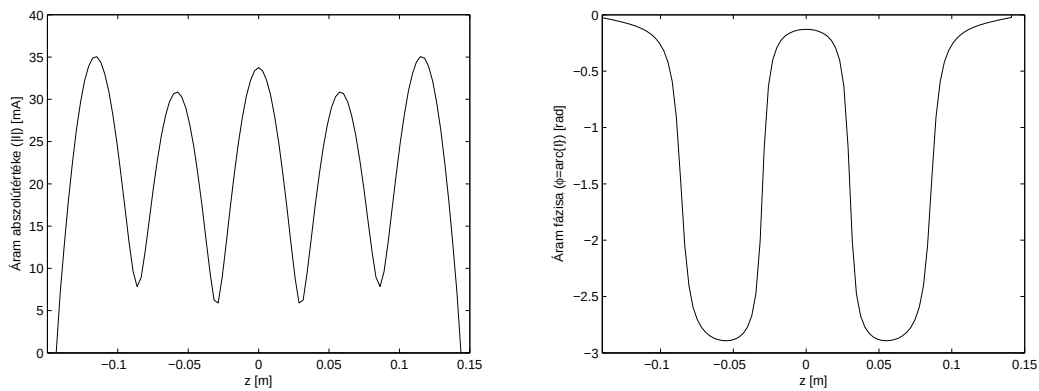
6.4.5. Eredmények, kiértékelés

Az antenna árameloszlásának meghatározására implementált `Matlab`-kód a B.1. függelékben megtalálható. A szimulációt $f = 516,12456$ MHz frekvencián, $U = 100$ V feszültségű gerjesztéssel, $N = 101$ diszkrét elemmel és $a = 1,5 \cdot 10^{-4}$ méteres huzalsugár mellett végeztem el. A 6.3. ábra a huzal mentén kialakuló komplex



6.3. ábra. Az áram abszolútértéke rezonancia esetén

áram abszolútértékét és fázisát mutatja rezonancia esetén, míg a 6.4. ábrán az áram eloszlása látható egy rezonanciafrekvenciától eltérő frekvencián. Mivel az antenna ilyenkor elektromágneses szempontból hosszabb, mint a hullámhossz fele (ebben az esetben például annak kettő és félszerese), több maximumhely alakul ki rajta, sugárzási tulajdonságai, villamos paraméterei jelentősen módosulnak. Az árameloszlás



6.4. ábra. Az áram abszolútértéke és fázisa $L = 2,5\lambda$ esetén

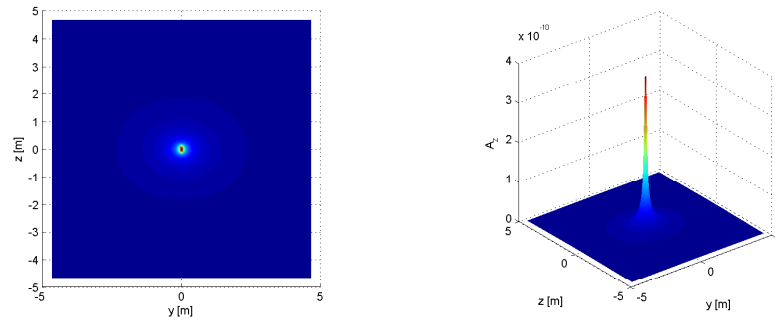
ismeretében az antenna fontosabb paraméterei, így a kialakuló elektromágneses tér, az iránykarakterisztika és a bemeneti impedancia is meghatározható.

6.5. Iránykarakterisztika meghatározása

Az antenna iránykarakterisztikáján a tér egy adott irányába kisugárzott térerősség (vagy teljesítmény) és a főirányba kisugárzott érték hányadosát értjük. Munkám során a vizsgált dipólusantennának kétféle módon vettem fel az iránykarakterisztikáját. Az első módszer esetében a szimmetrikus Hallén-egyenlet megoldása után az antenna köré egy négyzet alakú problémateret definiáltam, majd ezen problématerre meghatároztam a vektorpotenciál értékét. Az antenna által létrehozott vektorpotenciál kizárólag z -komponenssel fog rendelkezni, hiszen az antennán kialakuló áramsűrűség is skalár, kizárólag z függvénye [26]. A vektorpotenciál tehát ezen áram és a Green-függvény konvolúciójaként határozható meg, ahol az integrálást az antenna mentén szükséges elvégezni:

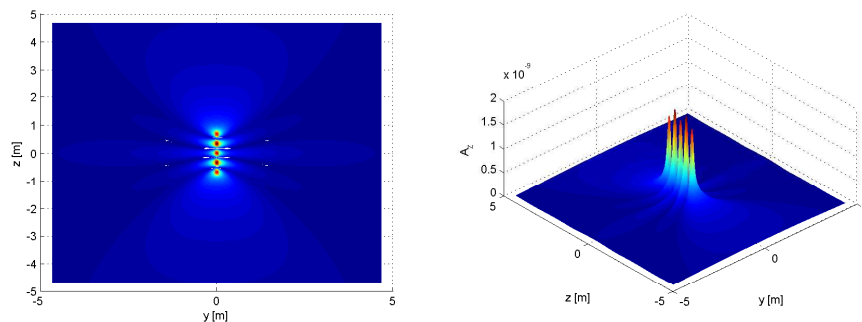
$$A_z(z, y) = \mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G(\vec{r}, z') I_z(z') dz'. \quad (6.37)$$

Az eredmények a 6.5. és a 6.6. ábrákon láthatók. A vektorpotenciál a szimmetrikus



6.5. ábra. A vektorpotenciál alakulása rezonancia esetén

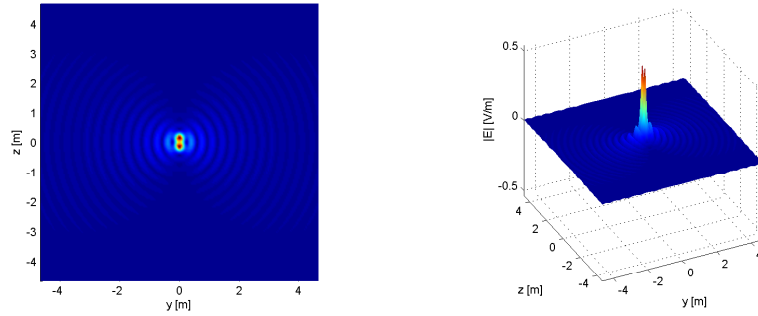
árameloszlás-függvény esetén jól láthatóan szimmetrikus lesz, és mivel a vizsgálat kizárólag az zy -síkra terjed ki, ezért az elektromos térerősségnek kizárólag az z - és y -komponensével szükséges számolni. A vizsgálatot $f = 450$ MHz frekvencián, az antenna körül a hullámhossz tizennégyszeresével megegyező oldalhosszúságú négyzetet felvéve végeztem el. Ezek (3.39) értelmében:



6.6. ábra. A vektorpotenciál alakulása $L = 2,5\lambda$ esetén

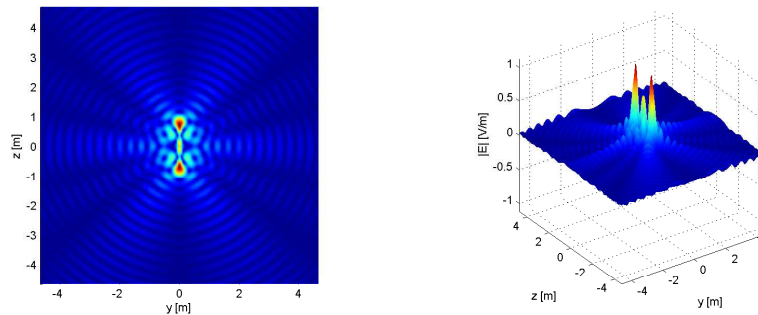
$$E_y = -j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}, \quad E_z = -j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z. \quad (6.38)$$

Az összefüggésből látható, hogy a vektorkomponensek meghatározásához a vektorpotenciál iránymenti deriváltjaira van szükség. Mivel A_z mátrixos formában adódik, így a koordináták szerinti numerikus deriválást is mátrixos formában hajtottam végre a **Matlab** gradiensképző parancsát használva. Az elektromos térerősség abszolútértékét a 6.7. és a 6.8. ábrákon lehet tanulmányozni. A vektorpotenciál



6.7. ábra. A térerősség abszolútértékének alakulása rezonancia esetén

szimmetriájából adódik, hogy az antenna körül kialakuló elektromos tér szimmetrikus lesz. Érdekes megjegyezni, hogy amíg végeselem-módszer esetén szimulációhoz az antennát körülvevő teret le kell zárni (például a perem mentén érvényesíteni kell a Sommerfeld-féle sugárzási feltételt [6, 26]), addig a momentumok módszerének alkalmazása során erre nincs szükség, a problémater peremére semmilyen peremfeltételt sem kell előírni a megoldáshoz, mivel a teret a Green-függvények alkalmazása automatikusan lezárja. Az iránykarakterisztika meghatározásához a problémateren

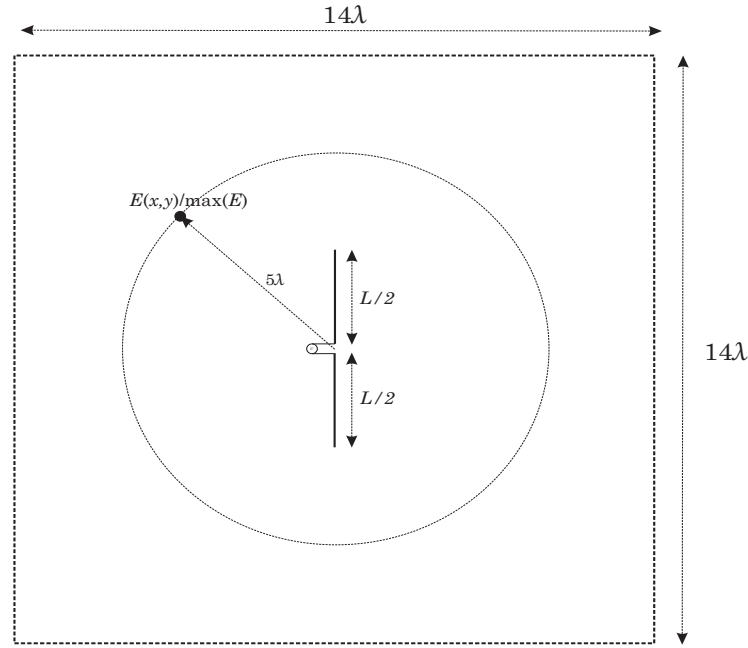


6.8. ábra. A térerősség abszolútértékének alakulása $L = 2,5\lambda$ esetén

belül, az antenna környezetében egy kör felvételére van szükség. A módszert a 6.9. ábra mutatja. A 14λ széles problémater diszkrét pontjain rendelkezésre álló elektromos térerősség-értékek felhasználásával a tér belsejében definiált, 5λ sugarú körön kétdimenziós interpoláció felhasználásával a karakterisztika felvehető. Ehhez a kör

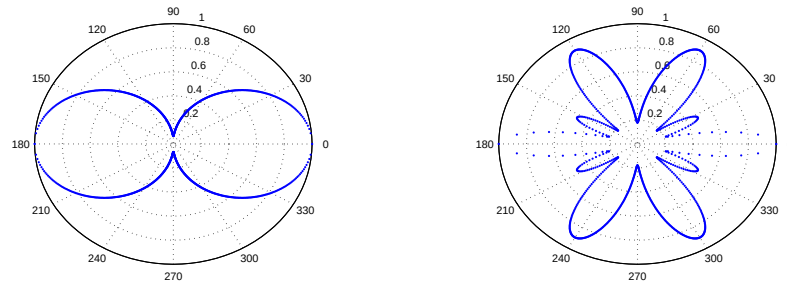
$$z^2 + y^2 = 25\lambda^2 \quad (6.39)$$

egyenlettel meghatározható pontjait a koordináták előjelei szerint vektorokba rendeztem, majd az összetartozó koordináta-párokra a **Matlab** `interp2` parancsát felhasználva meghatároztam az elektromos térerősséget. A felvett iránykarakterishti-



6.9. ábra. Az iránykarakterisztika felvétele

kák a 6.10. ábrán láthatók, a szimuláció programkódja pedig a B.2. függelékben található meg. Az eredmények jól mutatják, hogy a dipólus rezonancia esetén szimmetrikusan két fő sugárzási iránnyal rendelkezik, valamint az antenna síkjában nem sugároz. Bár a karakterisztika a síkban zérustól eltérő térerősség-értéket mutat, ez az interpolációs hibából adódik. Az antenna rezonanciafrekvenciától eltérő frekven-

6.10. ábra. A dipólus iránykarakterisztikája rezonancia és $L = 2, 5\lambda$ esetén

cia esetén több főiránnyal fog rendelkezni, mely nyalábok ugyan szimmetrikusak, de maximumaik és nyalábszélességeik nem egyeznek meg. Belátható, hogy bár a módszer eredményre vezet, de egyrészt pontatlan, másrészt nem elég hatékony, hiszen a karakterisztika meghatározásához jóval több térerősség-érték kiszámítására van szükség, mint amennyi ténylegesen felhasználásra kerül. Ezért – amennyiben kizárólagosan az iránykarakterisztika meghatározása a cél – jóval hatékonyabb és célravezetőbb az elektromos térerősségre felírható integrálegenlet numerikus megoldása.

6.6. Az elektromos térerősség integrálegyenletének megoldása

Az antennakarakterisztika gyorsabb, hatékonyabb felvételéhez az elektromos térerősség integrálegyenletének megoldására van szükség. Ennek általános formuláját dolgoztam harmadik fejezetében már bevezettem. Az összefüggés a dipólusantenna esetén egyszerűsödik: az integrálást nem egy általános térfogatra, hanem az antenna hossza mentén szükséges elvégezni, valamint az áram bár vektormennyiség, kizárólag z -komponenssel rendelkezik, így skalárként kezelhető. Ezek alapján az egyenlet az

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G(\vec{r}, z') I_z(z') \vec{e}_z dz' - \frac{j\omega\mu}{k^2} \nabla \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \nabla' \cdot (I_z(z') \vec{e}_z) G(\vec{r}, z') dz' \quad (6.40)$$

formulára egyszerűsödik. A zy -síknál maradv a két skaláregyenlet: egy az elektromos térerősség z -komponensére, egy pedig az y -komponensére. Az összefüggés második tagjának integrandusában az áram divergenciája szerepel, amely egyrészt skalár, másrészt pedig ebben a speciális esetben az áram z -szerinti deriváltjával lesz egyenlő:

$$\nabla' \cdot (I_z(z') \vec{e}_z) = \frac{\partial I_z(z')}{\partial z'}. \quad (6.41)$$

Az összefüggés kiértékeléséhez tehát elő kell állítani az áram függvényének z -szerinti deriváltját. A második tag gradiens-operátora a Green-függvényre lesz hatással, így a kifejezés átírható:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G(\vec{r}, z') I_z(z') \vec{e}_z dz' - \frac{j\omega\mu}{k^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial I_z(z')}{\partial z'} \nabla G(\vec{r}, z') dz'. \quad (6.42)$$

A Green-függvény gradiense a

$$\nabla G(\vec{r}, z') = \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \vec{e}_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \cdot \vec{e}_y \quad (6.43)$$

alakban írható fel, ahol

$$r = \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (6.44)$$

A parciális deriváltak analitikus módon felírhatók, melyeket munkám során levezettem. Az összefüggések (a levezetés mellőzésével):

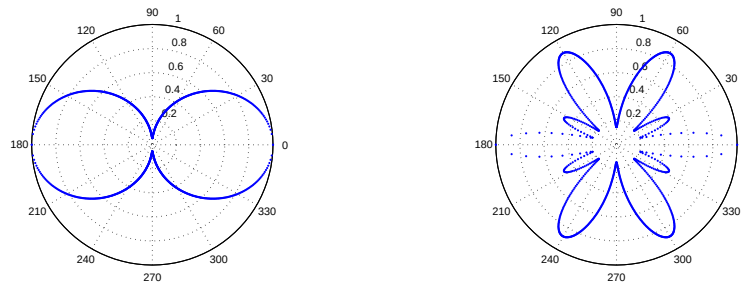
$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{-e^{-jkr} (z - z') (jk + \frac{1}{r})}{r^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} \frac{-e^{-jkr} (y - y') (jk + \frac{1}{r})}{r^2}. \quad (6.45)$$

Az eddigiek alapján az elektromos térerősség két komponense már egyértelműen felírható:

$$E_z = -j\omega\mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G(\vec{r}, z') I_z(z') dz' - \frac{j\omega\mu}{k^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial I_z(z')}{\partial z'} \frac{\partial G}{\partial z} dz', \quad (6.46)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{k^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial I_z(z')}{\partial z'} \frac{\partial G}{\partial y} dz'. \quad (6.47)$$

Az integrálást ezúttal is egydimenziós Gauss-kvadratura segítségével valósítottam meg, úgy, hogy egy-egy Δz hosszúságú diszkrét elem felett konstansnak tekintetem az áramot és annak deriváltját is. Ennek értelmében azok a két integrandus elé kiemelhetők konstansként, és az integrandus az első tag esetében a Green-függvény maga, a második tag esetében pedig annak megfelelő irány szerinti deriváltja. A felvett iránykarakterisztikák a 6.11. ábrán láthatók, a **Matlab**-kód pedig a B.3. függelékben megtalálható. Az elektromos térerősségre vonatkozó összefüggések imple-



6.11. ábra. A dipólus iránykarakterisztikája rezonancia és $L = 2,5\lambda$ esetén

mentálásának nagy előnye, hogy gyorsabban vezet pontosabb eredményre, mint az előzőekben bemutatott módszer, továbbá a koordináták módosításával a tér bármely pontjában meghatározható az elektromos térerősség értéke. Látható, hogy az eredmény gyakorlatilag megegyezik a vektorpotenciál segítségével meghatározottakkal. Mivel ezúttal a pontokban nem interpolációval, hanem közvetlenül a térjellemzőkre vonatkozó összefüggések segítségével került meghatározásra az elektromos tér, az eredmény több pontban és pontosabban felvehető.

A számítási idők tekintetében a két módszer között jelentős eltérés adódik. A vektorpotenciálból származtatott iránykarakterisztika meghatározása 200×200 -as mátrixok használata esetén, az antennát 101 elemre bontva, az iránykarakterisztika 500 pontban történő kiszámításával összesen 6,872 percet, míg az elektromos térerősségre megoldott integrálegyenlet használata esetén, 101 elemre diszkrétizált antenna esetén 500 pontban felvéve az iránykarakterisztikát ez 22 másodpercet vett igénybe.

7. fejezet

Összefoglalás, jövőbeni tervek

Dolgozatomban ismertettem az elektromágneses terek leírására használt Maxwell-egyenletek idő- és frekvenciatartománybeli teljes rendszerét, az egyenleteket felhasználva levezettem az elektrosztatikus és rádiófrekvenciás problémákat leíró egyenleteket. Általánosan felvázoltam a momentumok módszerének lényegét, alkalmazásának módját, előnyeit és hátrányait, valamint összevetettem azt a végeselem-módszerrel is. Részletesen, a numerikus megvalósításig ismertettem az egyenletek implementálásának módját `Matlab`-környezetben, kitérve az integrálok kezelésére egy- és kétdimenzióban.

A vonatkozó szakirodalommal ellentétben az impedanciamátrix szingularitással bíró elemeit nem analitikus módon értékeltem ki, hanem általános, sokpontos Gauss-kvadraturát használva egy univerzálisan használható eljárást valósítottam meg. Bemutattam a Hallén-egyenletet és a Pocklington egyenletet. Ismertettem a Hallén-egyenlet alkalmazását az antennatervezés alapvető építőelemének számító félhullámú dipólusantenna esetében. Bemutattam, milyen módon lehetséges az antenna áramának meghatározása, az antenna közel- és távolterének, valamint az iránykarakterisztikájának kiszámítása. Ismerettem az egyes módszerek előnyeit, hátrányait, kitérve a szükséges számítási időre is.

Célom, hogy a továbbiakban az itt bemutatott módszert összetettebb antennarendszerek vizsgálatára, szimulációjára és tervezésére használjam fel. Az itt implementált, a klasszikus térszimulációs szoftvercsomagoktól elszakadt módszerek széleskörű lehetőséget biztosítanak a gyors és rugalmas tervezésre. Célkitűzésem, hogy a vizsgálatokat kiterjesszem antennarendszerek villamos paramétereinek javítására, valamint adott célértékekhez optimalizálására is. Munkám során igyekszem kitérni a vektorpotenciállal történő számítási eljárás esetleges gyorsításának vizsgálatára is, figyelembe véve a vizsgált elrendezések és a kialakuló elektromágneses tér szimmetriáját, jellegzetességeit.

Irodalomjegyzék

- [1] Maxwell J. C. *On Physical Lines of Force*. Philosophical Magazine and Journal of Science, London, 1861.
- [2] <http://www.st-andrews.ac.uk/~ulf/perfectmaxwell.jpg> (utolsó látogatás: 2015. július 5).
- [3] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/8a/Oliver_Heaviside2.jpg/200px-Oliver_Heaviside2.jpg (utolsó látogatás: 2015. július 5).
- [4] Dr. Zombory L. *Elektromágneses Terek*. Műszaki Kiadó, Budapest, 2008.
- [5] Bronstein I. N., Szemengyaljev K. A. *Matematikai kézikönyv*. TypoT_EX kiadó, Budapest, 2009.
- [6] Friedl G. *Rádiófrekvenciás terek numerikus analízise*. Diplomamunka, Széchenyi István Egyetem, Győr, 2014.
- [7] Fodor Gy. *Hálózatok és rendszerek analízise I-II*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2000.
- [8] Gibson W. C. *The Method of Moments in Electromagnetics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2008.
- [9] Balanis A. C. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2012.
- [10] Collin R. E. *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press, New York, 1991.
- [11] Muleshkov A. S., Chen C.S., Golberg M. A., Cheng A. H.-D. *Analytic Particular Solution for Inhomogeneous Helmholtz-Type Equations*. Advances in Computational Engineering & Sciences, Tech Science Press, Palmdale, 2000.
- [12] Popovic J. *A Fast Method for Solving the Helmholtz Equation Based on Wave Splitting*. Licenciate Thesis, KTH Computer Science and Communication, Stockholm, 2009.
- [13] Kuczmann M. *Jelek és Rendszerek*. Universitas-Győr, Győr, 2005.
- [14] Orfanidis S. J. *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, Piscataway, New Jersey, 2014.

- [15] Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, Washington D.C., 1964.
- [16] <http://www.mathworks.com/> (utolsó látogatás: 2015. augusztus 8).
- [17] Unger T. *Mágneses hiszterézis mérése, analízise és szimulációja véges elem-módszer és skalár Preisach-modell segítségével*. Szakdolgozat, Széchenyi István Egyetem, Győr, 2014.
- [18] Selleri S., Pelosi G., Dedeban C., Pichot C. *Innovative bases and weights for wire junctions in time domain moment of method*. Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings, Vol. 153, 61-66, 2006.
- [19] Marasini C. *Efficient computation techniques for Galerking MoM antenna design*. Ph.D. értekezés, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 2008.
- [20] Harrington R. F. *Field Computation by Moment Methods*. Wiley IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, United States of America, 1992.
- [21] Kuczmán M., Iványi A. *The Finite Element Method in Magnetics*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [22] Kuczmán M. *Ferromágneses hiszterézis az elektromágneses térszámításban*. Magyar Tudományos Akadémia Doktora értekezés, Budapest, 2015.
- [23] Doležal I., Karban P., Šolín P. *Integral Methods in Low-Frequency Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2009.
- [24] <http://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html> (utolsó látogatás: 2015. szeptember 20).
- [25] Dr. Shaozhong D. *Quadrature Formulas in Two Dimensions*. Lecture Notes, Math 5172 - Finite Element Method, Section 001, Spring, University of North Carolina at Charlotte, 2010.
- [26] Jin J.-M. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.

A. függelék

Stacionárius problémák Matlab-kódja

A.1. toltott_huzal_1D.m

```
%Töltött huzal, 1D
%Method of Moments

clear;
clc;

%Geometria

L = 1;
a = 0.0001;

fi = 3;
eps_0 = 8.8541*10^(-12);
eps_r = 1;
eps = eps_0*eps_r;

%Diszkretizálás

N = 100;
dx = L/N;
x = zeros(1,N);

for i = 1:N
    if i == 1
        x(i) = dx/2;
    else
        x(i) = x(i-1)+dx;
    end
end

%Asszemblálás

Z = zeros(N);
q = zeros(N,1);
b = zeros(N,1);

for i = 1:N
    for j = 1:N

        x_a = (j-1) * dx;
        x_b = j * dx;

        int_x = [x_a:dx/99:x_b];

        for k = 1:length(int_x)
            f_x(k) = 1 / sqrt((x(i)-int_x(k))^2 + a^2);
```

```

        end

        for k = 1:(length(int_x)-1)
            Z(i,j) = Z(i,j) + (int_x(k+1)-int_x(k))*((f_x(k)+f_x(k+1))/2);
        end
    end

    b(i) = fi*4*pi*eps;

end

q = inv(Z) * b;

phi = zeros(1,N);
c = 1 / (4*pi*eps);

for i = 1:N
    for j = 1:N

        x_a = (j-1) * dx;
        x_b = j * dx;

        int_x = [x_a:dx/(N-1):x_b];

        for k = 1:length(int_x)
            f_x(k) = 1 / sqrt((x(i)-int_x(k))^2 + a^2);
        end

        for k = 1:(length(int_x)-1)
            phi(i) = phi(i) + c*q(k)*(int_x(k+1)-int_x(k))*((f_x(k)+f_x(k+1))/2);
        end
    end
end

figure(1)
hold on;
plot(x,q.*10^(12),'g. ');
plot(x,q.*10^(12),'r');
xlabel('x [m]');
ylabel('q [pC/m]');

figure(2)
hold on;
plot(x,phi,'g. ');
plot(x,phi,'r');
xlabel('x [m]');
ylabel('\Phi [V]');

```

A.2. esztatika_2D.m

```

%Elektrosztatika példa, 2D
%Négyszetekre diszkretizált töltött lemez problémája
%Method of Moments

clear;
clc;

%Geometria generálása

%A lemezt k-szor "vágjuk el" x és y irányban egyaránt
k = 10;

L = 1;
a = L/(k+1);
X = zeros(k+1);
Y = zeros(k+1);

if mod(k,2) == 0 %Páros esetek kezelése

    sz = -k/2; n = k+1;

```

```

    for i = 1:(k+1)

        coord_vec(i) = (sz/n)*L;
        sz = sz + 1;

    end

else %Páratlan esetek kezelése

    coord = -((((1/(k+1))*L)/2) + (((k-1)/2) * ((1/(k+1))*L)));

    for i = 1:(k+1)

        coord_vec(i) = coord;
        coord = coord + ((1/(k+1))*L);

    end

end

inv_index = k+1;

for i = 1:(k+1)

    X(:,i) = coord_vec(i);
    Y(inv_index,:) = coord_vec(i);

    inv_index = inv_index - 1;

end

%Megoldás
%Gauss-kvadratúra súlyai, pontjai
Gaussp_x = load('./gaussian_input/Gaussp_x.txt'); Gausss = load('./gaussian_input/Gausss.txt');
Gaussp_y=load('./gaussian_input/Gaussp_y.txt');

fi = 5;
eps_0 = 8.8541*10^(-12);
eps_r = 1;
eps = eps_0*eps_r;

Z = zeros(length(coord_vec)^2);
b = zeros(length(coord_vec)^2,1);
q = zeros(length(coord_vec)^2,1);

source_index = 1;

for i = 1:(length(coord_vec))
    for j = 1:(length(coord_vec))

        x_m = X(i,j);
        y_m = Y(i,j);

        observation_index = 1;

        for k = 1:(length(coord_vec))
            for l = 1:(length(coord_vec))

                x = [X(k,l)-(0.5*a) X(k,l)+(0.5*a) X(k,l)+(0.5*a) X(k,l)-(0.5*a)];
                y = [Y(k,l)-(0.5*a) Y(k,l)-(0.5*a) Y(k,l)+(0.5*a) Y(k,l)+(0.5*a)];

                for o = 1:length(Gaussp_x)
                    for p = 1:length(Gaussp_y)

                        N_1 = 0.25*(1-Gaussp_x(p))*(1-Gaussp_y(o));
                        N_2 = 0.25*(1+Gaussp_x(p))*(1-Gaussp_y(o));
                        N_3 = 0.25*(1+Gaussp_x(p))*(1+Gaussp_y(o));
                        N_4 = 0.25*(1-Gaussp_x(p))*(1+Gaussp_y(o));

                        P = x(1)*N_1+x(2)*N_2+x(3)*N_3+x(4)*N_4;
                        Q = y(1)*N_1+y(2)*N_2+y(3)*N_3+y(4)*N_4;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```



```

dx_dkszi = 0.25*x(1)*(-1+Gaussp_y(o)) + 0.25*x(2)*(1-Gaussp_y(o)) + ...
           0.25*x(3)*(1+Gaussp_y(o)) + 0.25*x(4)*(-1-Gaussp_y(o));

dx_deta = 0.25*x(1)*(-1+Gaussp_x(p)) + 0.25*x(2)*(-1-Gaussp_x(p)) + ...
           0.25*x(3)*(1+Gaussp_x(p)) + 0.25*x(4)*(1-Gaussp_x(p));

dy_dkszi = 0.25*y(1)*(-1+Gaussp_y(o)) + 0.25*y(2)*(1-Gaussp_y(o)) + ...
           0.25*y(3)*(1+Gaussp_y(o)) + 0.25*y(4)*(-1-Gaussp_y(o));

dy_deta = 0.25*y(1)*(-1+Gaussp_x(p)) + 0.25*y(2)*(-1-Gaussp_x(p)) + ...
           0.25*y(3)*(1+Gaussp_x(p)) + 0.25*y(4)*(1-Gaussp_x(p));

det_jacobi = dx_dkszi*dy_deta - dy_dkszi*dx_deta;

Z(source_index,observation_index) = Z(source_index,observation_index) + ...
    Gausss(o)*Gausss(p)*(1/sqrt((x_m-P)^2+(y_m-Q)^2))* det_jacobi;
end
end

    observation_index = observation_index + 1;

    end
    end

    b(source_index) = fi*4*pi*eps;
    source_index = source_index + 1;

end
end

%Megoldás

q = Z \ b;

%Aztán ezt jó lenne ábrázolni is

q_matrix = zeros(k);

q_index = 1;

for i = 1:k
    for j = 1:k

        q_matrix(i,j) = q(q_index);
        q_index = q_index + 1;

    end
end

figure(1)
axis square;
surf(X,Y,q_matrix.*10^(12));
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
zlabel('q [pC/m]');

```

B. függelék

Rádiófrekvenciás problémák Matlab-kódja

B.1. lambdafeldipol_1D.m

```
%Félhullám-hosszúságú dipólantenna árameloszlása
%Method of Moments, Hallén-egyenlettel

clear;
clc;

%Paraméterek
eps_0 = 8.854e-12; mu_0 = 4*pi*1e-7; eps_r = 1;
nu = 1 / sqrt(eps_0*eps_r*mu_0);
f = 516.12456e6;
lambda = nu / f; k = (2*pi)/lambda;
eta = sqrt(mu_0/(eps_0*eps_r));
L = 0.5*lambda;
a = 1.5e-4;

%Diszkretizálás
N = 101;
z = [-L/2:L/N:L/2];
for i = 1:N
    z_abr(i) = z(i) + 0.5*(z(2) - z(1));
end
dz = abs(z(2) - z(1));

%Gerjesztés (delta-gap)
U = 10e3;
E_exc = zeros(1,N+1);
E_exc((N+1)/2) = U / dz; E_exc(((N+1)/2)+1) = E_exc((N+1)/2);

%Impedanciamátrix és s-vektor felépítése Gauss-kvadratúrával
Z = zeros(N); s = zeros(N,1);
Gaussp = load('./gaussian_input/Gaussp_x.txt'); Gaussss = load('./gaussian_input/Gaussss.txt');
for i = 1:N
    z_m = z(i) + 0.5*dz;
    for j = 1:N
        z_b = z(j+1); z_a = z(j);
        for l = 1:length(Gaussp)
            z_g = (((z_b - z_a) / 2) * Gaussp(l)) + ((z_a + z_b) / 2);
            R = sqrt((z_m - z_g)^2 + a^2);
            Z(i,j) = Z(i,j) + ((z_b - z_a) / 2) * Gaussss(l) * (exp(-sqrt(-1)*k*R) / (4*pi*R));
        end
    end
    s(i) = cos(k*z_m);
end
Zm1 = inv(Z);

%Gerjesztésvektor (b) felépítése
```

```

b = zeros(N,1);
for i = 1:N
    z_m = z(i) + 0.5*dz;
    for j = 1:N
        z_a = z(i); z_b = z(i+1);
        if (E_exc(j) > 0) && (E_exc(j+1) > 0) %Ekkor kell a konvolúció
            for l = 1:length(Gaussp)
                z_g = (((z_b - z_a)/2) * Gaussp(l)) + ((z_a + z_b)/2);
                b(i) = b(i) + ((-sqrt(-1)/(2*eta)) * ((z_b - z_a)/2) * Gausss(l) * ...
sin(k*abs(z_m - z_g)) * (U/dz));
            end
        end
    end
end
end
%Megoldás
I = zeros(N,1); D_1 = 0;
uT = zeros(1,N); uT(1) = 1; uT(N) = uT(1);
D_1 = - (uT*Zm1*b) / (uT*Zm1*s);
I = D_1*Zm1*s + Zm1*b;

% Áram
figure(1)
plot(z_abr,1e3*abs(I));
xlabel('z [m]');
ylabel('Áram abszolútértéke (|I|) [mA]');

figure(2)
plot(z_abr,phase(I));
xlabel('z [m]');
ylabel('Áram fázisa (\phi=arc\{I\}) [rad]');

%Időtartománybeli vizsgálat
t = linspace(0,4*(1/f),400); I_t = zeros(N,1);
for j = 1:length(t)
    for i = 1:N
        I_t(i) = abs(I(i)) * cos(2*pi*f*t(j)+phase(I(i)));
    end
end
figure(3)
plot(z_abr,1e3*I_t);
axis([-L/2 L/2 -1e3*max(abs(I)) 1e3*max(abs(I))]);
xlabel('z [m]');
ylabel('i(t) [mA]');
end

```

B.2. dipolter_hallen.m

```

%Félhullám-hosszúságú dipólantenna tere
%Szimmetrikus Hallén-egyenlettel

clear; clc;

%Paraméterek
eps_0 = 8.854e-12; mu_0 = 4*pi*1e-7; eps_r = 1;
nu = 1 / sqrt(eps_0*eps_r*mu_0);
f = 450e6; %Ezzel érdemes játszani
lambda = nu / f; k = (2*pi)/lambda;
eta = sqrt(mu_0/(eps_0*eps_r));
L = 0.5*lambda;
a = 1.5e-4;

%Diszkretizálás
N = 101;
z = [-L/2:L/N:L/2];
for i = 1:N
    z_abr(i) = z(i) + 0.5*(z(2) - z(1));
end
dz = abs(z(2) - z(1));

%Gerjesztés (delta-gap)
U = 10;

```

```

E_exc = zeros(1,N+1);
E_exc((N+1)/2) = U / dz; E_exc(((N+1)/2)+1) = E_exc((N+1)/2);

%Impedanciamátrix és s-vektor felépítése Gauss-kvadratúrával
Z = zeros(N); s = zeros(N,1);
Gaussp = load('./gaussian_input/Gaussp_x.txt');
Gaussss = load('./gaussian_input/Gaussss.txt');
for i = 1:N
    z_m = z(i) + 0.5*dz;
    for j = 1:N
        z_b = z(j+1); z_a = z(j);
        for l = 1:length(Gaussp)
            z_g = (((z_b - z_a) / 2) * Gaussp(l)) + ((z_a + z_b) / 2);
            R = sqrt((z_m - z_g)^2 + a^2);
            Z(i,j) = Z(i,j) + ((z_b - z_a) / 2) * Gaussss(l) * (exp(-sqrt(-1)*k*R) / (4*pi*R));
        end
    end
    s(i) = cos(k*z_m);
end
Zm1 = inv(Z);

%Gerjesztésvektor (b) felépítése
b = zeros(N,1);
for i = 1:N
    z_m = z(i) + 0.5*dz;
    for j = 1:N
        z_a = z(i); z_b = z(i+1);
        if (E_exc(j) > 0) && (E_exc(j+1) > 0) %Ekkor kell a konvolúció
            for l = 1:length(Gaussp)
                z_g = (((z_b - z_a)/2) * Gaussp(l)) + ((z_a + z_b)/2);
                b(i) = b(i) + ((-sqrt(-1)/(2*eta)) * ((z_b - z_a)/2) * Gaussss(l) * ..
sin(k*abs(z_m - z_g)) * (U/dz));
            end
        end
    end
end
end
%Megoldás
I = zeros(N,1); D_1 = 0;
uT = zeros(1,N); uT(1) = 1; uT(N) = uT(1);
D_1 = - (uT*Zm1*b) / (uT*Zm1*s);
I = D_1*Zm1*s + Zm1*b;

% Áram
figure(1)
plot(z_abr,1e3*abs(I));
xlabel('z [m]');
ylabel('Áram abszolútértéke (|I|) [mA]');

%Vizsgált problémater definiálása
y_coord = linspace(-7*lambda,7*lambda,200);
z_coord = linspace(7*lambda,-7*lambda,200);
[Y,Z] = meshgrid(y_coord,z_coord);

%Térszámítás
A_z = zeros(size(Z));
for i = 1:size(Z,1)
    for j = 1:size(Z,2)
        R_obs = [Y(i,j) Z(i,j)];
        R_obs_abs = sqrt(R_obs(1)^2+R_obs(2)^2);
        int_aram = 0;
        for l = 1:N
            dz = z(2) - z(1);
            z_a = z_abr(l) - 0.5*dz;
            z_b = z_abr(l) + 0.5*dz;
            %Tolunk egy jóféle Gauss-kvadratúrát
            int_gauss = 0;
            for h = 1:length(Gaussp)
                z_gauss = 0.5*(z_b-z_a)*Gaussp(h)+(0.5*(z_a+z_b));
                R_gauss = sqrt((R_obs(1)-a)^2+(R_obs(2)-z_gauss)^2);
                int_gauss = int_gauss + 0.5*(z_b-z_a)*Gaussss(h)*exp(-sqrt(-1) ...
*k*R_gauss)/(4*pi*R_gauss);
            end
        end
    end
end

```

```

        int_aram = int_aram + I(1)*int_gauss;
    end
    A_z(i,j) = mu_0*int_aram;
end
end
%Vektorpotenciál ábrázolása
figure(2)
surf(Y,Z,abs(A_z));
xlabel('y [m]'); ylabel('z [m]'); zlabel('A_z');
shading interp;
%%
%Deriváltmátrixok előállítása
[dAz_dy,dAz_dz] = gradient(A_z,abs(y_coord(2)-y_coord(1)),abs(z_coord(2)-z_coord(1)));
[d2Az_dy2,d2Az_dzdy] = gradient(dAz_dy,abs(y_coord(2)-y_coord(1)),abs(z_coord(2)-z_coord(1)));
[d2Az_dzdy,d2Az_dz2] = gradient(dAz_dz,abs(y_coord(2)-y_coord(1)),abs(z_coord(2)-z_coord(1)));
%Vektorkomponensek meghatározása
E_z = -sqrt(-1)*(1/(2*pi*f*mu_0*eps_0))*(d2Az_dz2 + (k^2)*A_z);
E_y = -sqrt(-1)*(1/(2*pi*f*mu_0*eps_0))*d2Az_dzdy;
%Ábrázolás
E_ik = zeros(size(Z));
t = linspace(0,2*(1/f),200);
for i = 1:length(t)
    for j = 1:size(Z,1)
        for l = 1:size(Z,2)
            E_yt(j,l) = abs(E_y(j,l)) * cos(2*pi*f*t(i)+angle(E_y(j,l)));
            E_zt(j,l) = abs(E_z(j,l)) * cos(2*pi*f*t(i)+angle(E_z(j,l)));
            E(j,l) = sqrt(abs(E_yt(j,l))^2+abs(E_zt(j,l))^2);
            if E(j,l) > E_ik(j,l)
                E_ik(j,l) = E(j,l);
            end
        end
    end
end
%Kialakuló tér abszolútértékének ábrázolása
figure(3)
surf(Y,Z,E);
shading interp;
colormap jet;
axis([min(min(Y)) max(max(Y)) min(min(Z)) max(max(Z)) -max(max(abs(E))) max(max(abs(E)))]);
view(2);
pause(0.00000005);
end
%%
%Íránykarakterisztika
E_abs = sqrt(abs(E_z).^2+abs(E_y).^2);
y_coord_ik = linspace(-5*lambda,5*lambda,500);
for i = 1:length(y_coord_ik)
    z_coord_ik_poz(i) = sqrt((5*lambda)^2-y_coord_ik(i)^2);
    z_coord_ik_neg(i) = -z_coord_ik_poz(i);
    if y_coord_ik(i) >= 0
        phi_poz(i) = atan(abs(z_coord_ik_poz(i)/y_coord_ik(i)));
        phi_neg(i) = (2*pi)-atan(abs(z_coord_ik_neg(i)/y_coord_ik(i)));
    elseif y_coord_ik(i) < 0
        phi_poz(i) = atan(abs(y_coord_ik(i)/z_coord_ik_poz(i))) + 0.5*pi;
        phi_neg(i) = pi+atan(z_coord_ik_neg(i)/y_coord_ik(i));
    end
end
end
E_ik_poz = zeros(1,length(y_coord_ik));
E_ik_neg = zeros(1,length(y_coord_ik));
for i = 1:length(E_ik_poz)
    E_ik_poz(i) = interp2(Y,Z,E_abs,y_coord_ik(i),z_coord_ik_poz(i));
    E_ik_neg(i) = interp2(Y,Z,E_abs,y_coord_ik(i),z_coord_ik_neg(i));
end
E_iranykar = zeros(1,length(phi_poz)+length(phi_neg));
phi_iranykar = zeros(1,length(phi_poz)+length(phi_neg));
for i = 1:length(phi_poz)
    E_iranykar(i) = E_ik_poz(i);
    phi_iranykar(i) = phi_poz(i);
end
i = i + 1;
for j = 1:length(phi_neg)
    E_iranykar(i) = E_ik_neg(j);
    phi_iranykar(i) = phi_neg(j);
end

```

```

    i = i + 1;
end
figure(4)
E_iranykar = E_iranykar./max(E_iranykar);
polar(phi_iranykar,E_iranykar,'b.');
```

B.3. dipolter_efe.m

```

%Félhullám-hosszúságú dipólanntenna tere
%Szimmetrikus Hallén-egyenlettel

clear; clc;

%Paraméterek
eps_0 = 8.854e-12; mu_0 = 4*pi*1e-7; eps_r = 1;
nu = 1 / sqrt(eps_0*eps_r*mu_0);
f = 450e6; %Ezzel érdemes játszani
lambda = nu / f; k = (2*pi)/lambda;
eta = sqrt(mu_0/(eps_0*eps_r));
L = 0.5*lambda;
a = 1.5e-4;

%Diszkretizálás
N = 101;
z = [-L/2:L/N:L/2];
for i = 1:N
    z_abr(i) = z(i) + 0.5*(z(2) - z(1));
end
dz = abs(z(2) - z(1));

%Gerjesztés (delta-gap)
U = 10;
E_exc = zeros(1,N+1);
E_exc((N+1)/2) = U / dz; E_exc(((N+1)/2)+1) = E_exc((N+1)/2);

%Impedanciamátrix és s-vektor felépítése Gauss-kvadratúrával
Z = zeros(N); s = zeros(N,1);
Gaussp = load('./gaussian_input/Gaussp_x.txt'); Gaussss = load('./gaussian_input/Gaussss.txt');
for i = 1:N
    z_m = z(i) + 0.5*dz;
    for j = 1:N
        z_b = z(j+1); z_a = z(j);
        for l = 1:length(Gaussp)
            z_g = (((z_b - z_a) / 2) * Gaussp(l)) + ((z_a + z_b) / 2);
            R = sqrt((z_m - z_g)^2 + a^2);
            Z(i,j) = Z(i,j) + ((z_b - z_a) / 2) * Gaussss(l) * (exp(-sqrt(-1)*k*R) / (4*pi*R));
        end
    end
    s(i) = cos(k*z_m);
end
Zm1 = inv(Z);

%Gerjesztésvektor (b) felépítése
b = zeros(N,1);
for i = 1:N
    z_m = z(i) + 0.5*dz;
    for j = 1:N
        z_a = z(i); z_b = z(i+1);
        if (E_exc(j) > 0) && (E_exc(j+1) > 0) %Ekkor kell a konvolúció
            for l = 1:length(Gaussp)
                z_g = (((z_b - z_a)/2) * Gaussp(l)) + ((z_a + z_b)/2);
                b(i) = b(i) + ((-sqrt(-1)/(2*eta)) * ...
                    ((z_b - z_a)/2) * Gaussss(l) * sin(k*abs(z_m - z_g)) * (U/dz));
            end
        end
    end
end
end
%Megoldás
I = zeros(N,1); D_1 = 0;
uT = zeros(1,N); uT(1) = 1; uT(N) = uT(1);
```

```

D_1 = - (uT*Zm1*b) / (uT*Zm1*s);
I = D_1*Zm1*s + Zm1*b;

% Áram
figure(1)
plot(z_abr,1e3*abs(I));
xlabel('z [m]');
ylabel('Áram abszolútértéke (|I|) [mA]');

%Iránykarakterisztika meghatározása (EFIE-vel, Balanis könyv, (12-55))
vizsg_sugar = 5*lambda;
y_coord = linspace(-vizsg_sugar,vizsg_sugar,500);
for i = 1:length(y_coord)
    z_coord_poz(i) = sqrt((vizsg_sugar)^2-y_coord(i)^2);
    z_coord_neg(i) = -z_coord_poz(i);
    if y_coord(i) >= 0
        phi_poz(i) = atan(abs(z_coord_poz(i)/y_coord(i)));
        phi_neg(i) = (2*pi)-atan(abs(z_coord_neg(i)/y_coord(i)));
    elseif y_coord(i) < 0
        phi_poz(i) = atan(abs(y_coord(i)/z_coord_poz(i))) + 0.5*pi;
        phi_neg(i) = pi+atan(z_coord_neg(i)/y_coord(i));
    end
end
E_y_poz = zeros(1,length(y_coord)); E_z_poz = zeros(1,length(y_coord));
E_y_neg = zeros(1,length(y_coord)); E_z_neg = zeros(1,length(y_coord));
dI_dz = gradient(I,z_abr(2)-z_abr(1));

for i = 1:(length(z_coord_poz)+length(z_coord_neg))
    if i <= length(z_coord_poz)
        R_obs = [y_coord(i) z_coord_poz(i)];
    else
        R_obs = [y_coord(i-length(z_coord_poz)) z_coord_neg(i-length(z_coord_poz))];
    end
    R_obs_abs = sqrt(R_obs(1)^2+R_obs(2)^2);
    if i <= length(z_coord_poz)
        E_z_poz_int_1 = 0; E_z_poz_int_2 = 0;
    else
        E_z_neg_int_1 = 0; E_z_neg_int_2 = 0;
    end
    for j = 1:N
        dz = z(2) - z(1);
        z_a = z_abr(j) - 0.5*dz;
        z_b = z_abr(j) + 0.5*dz;
        %Gauss-kvadrátúra történik mindkét részintegrálra
        int_gauss_1 = 0; int_gauss_2z = 0; int_gauss_2y = 0;
        for l = 1:length(Gaussp)
            z_gauss = 0.5*(z_b-z_a)*Gaussp(l)+(0.5*(z_a+z_b));
            R_gauss = sqrt((R_obs(1)-a)^2+(R_obs(2)-z_gauss)^2);
            int_gauss_1 = int_gauss_1 + 0.5*(z_b-z_a)*Gausss(l)*exp(-sqrt(-1)*k*R_gauss)/ ...
(4*pi*R_gauss);
            int_gauss_2z = int_gauss_2z + 0.5*(z_b-z_a)* ...
Gausss(l)*(1/(4*pi))* ((-exp(-sqrt(-1)*k*R_gauss) ...
*(R_obs(2)-z_gauss)* ...
(sqrt(-1)*k+(1/R_gauss))) / (R_gauss^2));
            int_gauss_2y = int_gauss_2y + 0.5*(z_b-z_a)*Gausss(l)*(1/(4*pi)) ...
*((-exp(-sqrt(-1)*k*R_gauss)*(R_obs(1)-a)* ...
(sqrt(-1)*k+(1/R_gauss))) / (R_gauss^2));
        end
        if i <= length(z_coord_poz)
            E_z_poz_int_1 = E_z_poz_int_1 + (-sqrt(-1)*2*pi*f*mu_0*I(j)*int_gauss_1);
            E_z_poz_int_2 = E_z_poz_int_2 + (-sqrt(-1)*2*pi*f*mu_0*(1/k^2)*dI_dz(j)*int_gauss_2z);
        else
            E_z_neg_int_1 = E_z_neg_int_1 + (-sqrt(-1)*2*pi*f*mu_0*I(j)*int_gauss_1);
            E_z_neg_int_2 = E_z_neg_int_2 + (-sqrt(-1)*2*pi*f*mu_0*(1/k^2)*dI_dz(j)*int_gauss_2z);
        end
        if i <= length(z_coord_poz)
            E_y_poz(i) = E_y_poz(i) + (-sqrt(-1)*2*pi*f*mu_0*(1/k^2)*dI_dz(j)*int_gauss_2y);
        else
            E_y_neg(i-length(z_coord_poz)) = E_y_neg(i-length(z_coord_poz)) + ...
(-sqrt(-1)*2*pi*f*mu_0*(1/k^2)*dI_dz(j)*int_gauss_2y);
        end
    end
end

```

```
if i <= length(z_coord_poz)
    E_z_poz(i) = E_z_poz_int_1 + E_z_poz_int_2;
else
    E_z_neg(i-length(z_coord_poz)) = E_z_neg_int_1 + E_z_neg_int_2;
end
end
%Ábrázolni kell a cuccot
E_poz = sqrt(abs(E_z_poz).^2+abs(E_y_poz).^2); E_poz = E_poz./max(E_poz);
E_neg = sqrt(abs(E_z_neg).^2+abs(E_y_neg).^2); E_neg = E_neg./max(E_neg);
E_iranykar = zeros(1,length(phi_poz)+length(phi_neg));
phi_iranykar = zeros(1,length(phi_poz)+length(phi_neg));
for i = 1:length(phi_poz)
    E_iranykar(i) = E_poz(i);
    phi_iranykar(i) = phi_poz(i);
end
i = i + 1;
for j = 1:length(phi_neg)
    E_iranykar(i) = E_neg(j);
    phi_iranykar(i) = phi_neg(j);
    i = i + 1;
end
figure(4)
E_iranykar = E_iranykar./max(E_iranykar);
polar(phi_iranykar,E_iranykar,'b.');
```