



Differenzialgleichungen

① Kontrollauf

2015. Oktober 9.

Körzei Papa in da house. se.hu/~leslie B604

Jegyzet: se.hu/~nemetha -n van jegyzet-
ésennyi.

Differenzialgleichungen:

$$a \sim \sum_i F_i \quad \text{Newton-törvény volt.}$$

$$m \cdot a = \sum_i F_i$$

$$\downarrow m \cdot a = m \cdot g$$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} = g} \quad \text{szorozt lemmi.}$$

$x(t)$ az ismeretlen függvény. És ennek szerepe itt valamilyen deriváltja.

Korlati feltételek: $x(0) = 1$ $\dot{x}(0) = 2$ Kellenek.



$$m \cdot a = -D \cdot x$$

$$m \ddot{x} + D x = 0 \rightarrow m \ddot{x} + D x = 0$$

homogén

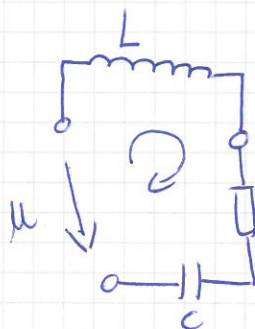


$$m \ddot{x} + D x = mg + F(t) \quad \text{Lineáris differenzialgleichung.}$$

inhomogén

$$m \cdot \ddot{x} = mg - k \dot{x}^2 \rightarrow m \ddot{x} + k \dot{x}^2 = mg$$

Nemlineáris differenzialgleichung ez. Nemlineáris tag van.



$$-U + L \cdot \dot{I} + R I + C Q = 0$$

$$-U + L \cdot \ddot{Q} + R \dot{Q} + C Q = 0$$

$$\boxed{L \ddot{Q} + R \dot{Q} + C Q = U}$$

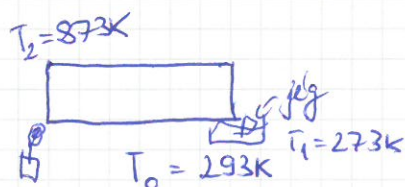
↑ inhomogenitás

Lineáris, inhomogén, állandó együtthatós differenciálegyenlet.

Esethőrséges differenciálegyenletek voltak.

1 változó van, az idő.

Van parciális is. $\rightarrow$ több változós függvényeink vannak.



$T(x, t)$ van. pozíció, idő függvénye.

$T(x, 0) = T_0$ kezdeti feltétel.

$T(0, t) = 873K$
 $T(L, t) = 273K$ } peremfeltételek

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\kappa}{CS} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{Energie a bevezetés.}$$

① Sétválasztható diff. egyenletek

$y' = M(y)N(x)$ alakul. pl.: $y' = yx$

és legyen $y(x_0) = y_0$ $y(1) = 1$ kezdeti feltétel.

A konstans nulla az egyenletet megoldja. Ha y nem konstans $\neq 0$, lehet vele osztani.

$$\frac{1}{M(y)} y' = N(x)$$

$$\frac{1}{y} y' = x$$

integrálható.

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{M(y(x))} y'(x) dx = \int_{x_0}^x N(x) dx$$

$$\int_1^x x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = y(x) \rightarrow dy = y'(x) dx \quad \text{②}$$

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{4cy} dy \quad \text{lehet helyettesíteni.}$$

$$\int_1^y \frac{1}{y} dy = [\ln y]_1^y = \ln y$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{marad.}$$

$$y = e^{\frac{1}{2}(x^2-1)} \quad \text{lesz a megoldás. Ennyi!}$$

ennyire az egész.

Másik módszer: $t x'(t) = (x+1)^2$ és $x(1) = -2$

$$\frac{1}{(x+1)^2} x' = \frac{1}{t} \quad \text{lesz átrendezés.}$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c \quad \leftarrow \text{mi van a } c\text{-vel? Ez egy állandó.}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int (x+1)^{-2} dx = -\frac{1}{x+1} + c$$

$$\ln |t| + c = -\frac{1}{x+1} \quad \text{összerakva.}$$

$$\frac{1}{x+1} = -c - \ln |t|$$

$$x+1 = -\frac{1}{c + \ln |t|}$$

$$x = -\frac{1}{c + \ln |t|} - 1 \quad \text{és most: } x(1) = -2$$

$$-2 = -\frac{1}{c + \ln 1} - 1$$

$$-1 = -\frac{1}{c} \rightarrow \underline{c=1} \quad \text{és megvan: } \boxed{x = -\frac{1}{1+|u|} + (-1)}$$

elsőrendű: megadható.

② $(9x^3 + 1)y^2 y' + 22x^2 \sqrt{3} y^3 = 0$ vizsga példa

$$(9x^3 + 1)y^2 y' = -22\sqrt{3} \cdot x^2 y^{3/2}$$

d b p e s e l

$$\underbrace{\frac{y^2}{y^{3/2}} y'}_{\text{int}} = -22\sqrt{3} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{9x^3+1}}_{\text{int.}} \quad \text{Kell.}$$

$$\int \sqrt{y} dy = \frac{y^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{y^3}$$

$$-22\sqrt{3} \int \frac{x^2}{9x^3+1} dx = -\frac{22\sqrt{3}}{27} \int \frac{27x^2}{9x^3+1} dx =$$

$$= -\frac{22\sqrt{3}}{27} \ln|9x^3+1|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

↑
f(x)

Erreje:

$$\frac{2}{3} \sqrt{y^3} = -\frac{22\sqrt{3}}{27} \ln|9x^3+1| + C$$

$$y^{3/2} = C - \frac{11\sqrt{3}}{9} \ln|9x^3+1|$$

$$y = \left[C - \frac{11\sqrt{3}}{9} \ln|9x^3+1| \right]^{2/3}$$

Explicit egerlet: $\ddot{x} = g \rightarrow x = \frac{g}{2} t^2 + \underbrace{v_0}_{\text{sebad konstans}} t + \underbrace{x_0}_{\text{sebad konstans}}$

$\dot{x} = gt + v_0$ tök egerlet.

Elsőfokú lineáris diff. egerlet:

$$\sum_{i=0}^n \underbrace{a_i(x)}_{\text{egüttható}} y^{(i)} = 0 \text{ ez homogén.}$$

1. Ha y_1 és y_2 megoldása a homogén egerletnek, akkor $(y_1 + y_2)$ is.
 2. Ha y megoldása és $c \in \mathbb{R}$, akkor cy is megoldás.
- A megoldások vektortérnek alkotnak.
Bázist alkotnak.

Lesznek bármely megoldások.

$b_1, b_2, \dots, b_n$ megoldások lesz.

$y = A_1 b_1 + A_2 b_2 + \dots + A_n b_n$ lesz a megoldás.

Ha inhomogén: $\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)} = s(x)$

1. Ha y_1 és y_2 megoldása az inhomogén egerletnek, akkor $(y_1 - y_2)$ megoldja a homogén egerletet.

2. Ha y_p megoldása az inhomogén egerletnek, akkorilyen, akkor $y_{\text{összes}} = y_{\text{homogén, összes}} + y_p$ partikuláris megoldás.

Homogén megoldás?

Inhomogén lin. diff.-egyenlet megoldása:

① H. egyenlet ált. megoldásának megkeresése

② Inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése

③ inh. egyenlet általános megoldása: homogén ált. + inh. part.

Elsőrendű, lineáris:

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad \text{alatt.}$$

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x) \quad \alpha(x) \text{-et le lehet osztani.}$$

$$y' + \alpha(x)y = 0 \quad \text{a homogén egyenlet.}$$

(pl) $t x'(t) = 2x + t^2$ és $x(t=1) = 1$ }

$$x' - \frac{2}{t}x = t \quad \left[\alpha(t) = -\frac{2}{t} \quad \beta(t) = t \right]$$

homogén: $x_h' - \frac{2}{t}x_h = 0$

$$x_h' = \frac{2}{t}x_h \rightarrow$$

$$y_h' = -\alpha(x)y_h$$

$$\frac{1}{y_h} y_h' = -\alpha(x)$$

$$\ln|y_h| = -\int \alpha(x) dx + C$$

⑥

$$|y_h| = e^{-\int \alpha(x) dx}$$

$$y_h = \left(\frac{+}{-} \frac{e^C}{e^C} \right) \cdot \frac{e^{-\int \alpha(x) dx}}{e^{-\int \alpha(x) dx}}$$

$$y_h = C \cdot e^{-\int \alpha(x) dx}$$

itt a
bázis-
megoldás.

$$x_h' - \frac{2}{t} x_h = 0$$

$$\int \frac{2}{t} dt = 2 \cdot \ln|t| = \ln|t^2| = \ln t^2$$

$$x_h = C \cdot e^{\ln t^2} = \underline{C \cdot t^2} \quad \text{all.}$$

Inhomogenität: Konstante variable Methode.

$$y_p = C(x) \cdot e^{-\int \lambda(x) dx}$$

$$x_p = C(t) \cdot t^2$$

Es soll versucht werden, die inhomogene Gleichung zu lösen.

$$y_p' = C'(x) \cdot e^{-\int \lambda(x) dx} + C(x) \cdot e^{-\int \lambda(x) dx} \cdot (-\lambda(x))$$

$$x_p' = C'(t) \cdot t^2 + C(t) \cdot 2t$$

$$y_p' + \lambda(x) \cdot y_p = C'(x) \cdot e^{-\int \lambda(x) dx} + \lambda(x) C(x) e^{-\int \lambda(x) dx} + \lambda(x) C(x) e^{-\int \lambda(x) dx}$$

$$\boxed{x_p' - \frac{2}{t} x_p = C'(t) t^2 + C(t) 2t - \frac{2}{t} C(t) \cdot t^2} \quad \uparrow \text{Forscher}$$

$$x_p' - \frac{2}{t} x_p = \boxed{C'(t) t^2 = t}$$

$$C'(t) = \frac{1}{t}$$

$$C(t) = \ln|t|$$

$$\text{es immer: } \boxed{x_p = t^2 \ln|t|}$$

$$\boxed{x = C t^2 + t^2 \ln|t|} \quad \text{all. megoldás}$$

$$1 = x(1) = C + \ln 1 = C \quad \boxed{C=1} \quad \text{einsetzen} \quad \textcircled{7}$$

$$y_p' + \lambda(x) y_p = \boxed{C'(x) \cdot e^{-\int \lambda(x) dx} = \beta(x)}$$

$$C'(x) = \frac{\beta(x)}{e^{-\int \lambda(x) dx}} = \frac{\beta(x) e^{\int \lambda(x) dx}}{1}$$

$$C(x) = \int \frac{\beta(x)}{e^{-\int \lambda(x) dx}} dx$$

$$= \int \beta(x) e^{\int \lambda(x) dx} dx$$

speciális eset, ha $\lambda(x)$ konstans.

$$y' + \lambda y = \beta(x)$$

$$y' - 3y + 1 = \cancel{\lambda} 0$$

$y' - 3y = 0$ a homogén egyenlet.

$$y = e^{\lambda t} \rightarrow y' = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\lambda e^{\lambda t} - 3e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 3}$$

e^{3t} egy bázismegoldás. $\lambda - 3 = 0$ a karakterisztikus egyenlet.

$$y_h = C \cdot e^{3t}$$

$$y_p = b \quad y_p' = 0$$

$$-3b + 1 = 0 \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

és egy: $y = C \cdot e^{3t} + \frac{1}{3}$

példa

$$\left. \begin{aligned} (t^2 - 1)u' + 2tu &= 1 \\ u(2) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$$u' + \underbrace{\frac{2t}{t^2-1}}_{\lambda(x)} u = \underbrace{\frac{1}{t^2-1}}_{\beta(x)}$$

$$u' + \frac{2t}{t^2-1} u = 0$$

$$\frac{1}{u} u' = -\frac{2t}{t^2-1} \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u|$$

$$-\int \frac{2t}{t^2-1} dt = -\ln|t^2-1|$$

$$\ln|u| = C - \ln|t^2-1|$$

$$|u| = e^C \cdot \frac{1}{t^2-1}$$

$$u = C \cdot \frac{1}{e^{\ln|t^2-1|}} = C \cdot \frac{1}{|t^2-1|}$$

$$u_p = \frac{C(x)}{t^2 - 1}$$

$$u_p' = \frac{C'(x)(t^2 - 1) - C(x)2t}{(t^2 - 1)^2}$$

$t = x$, al lett basava.

$$u_p' = \frac{C'(x)}{t^2 - 1} - \frac{2tC(x)}{(t^2 - 1)^2}$$

$$\frac{C'(x)}{t^2 - 1} - \frac{2tC(x)}{(t^2 - 1)^2} + \frac{2t}{t^2 - 1} \cdot \frac{C(x)}{t^2 - 1} = \frac{1}{t^2 - 1}$$

$$C'(x) = 1 \text{ lesz igaz} \rightarrow \boxed{C(x) = x}$$

$$u_p = \frac{t}{t^2 - 1} \text{ lesz.}$$

$$\boxed{u = \frac{t + C}{t^2 - 1}}$$

és a Randi feltétel: $4 = u(2) = \frac{2 + C}{4 - 1} = \underline{\underline{\frac{2 + C}{3}}}$

$$\boxed{u = \frac{t + 10}{t^2 - 1}}$$

eznyi a megoldás

$$12 = 2 + C \Rightarrow \boxed{C = 10}$$



Differenzial

2015. október 10.

2. konzultáció

Másodrendű, konstans együtthatós differenciálegyenlet:

és persze lineáris és szorított is.

$$ay'' + by' + cy + \underbrace{D}_{\substack{\text{es nincs } D \text{ itt benne van} \\ \text{nem feltétlenül}}} = S(x)$$

$$y = e^{\lambda x} \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = S(x)$$

homogén.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{ karakterisztikus egyenlet.}$$

diskriminálás. $\leftarrow$ fontos kérdés itt.

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

(I.)

$D > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad 2 \text{ megoldás van.}$$

Két bázis megoldás lesz.

$$e^{\lambda_1 x} \text{ és } e^{\lambda_2 x}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -3$$

$$e^{2x} \text{ és } e^{-3x} \text{ van.}$$

$$y = A e^{2x} + B e^{-3x}$$

II. Ha $D = 0$.

$$\lambda = \frac{-b}{2a}$$

és $e^{\lambda x}$ x $e^{\lambda x}$ két bázis megoldás lesz.

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \rightarrow 0$$

$$y = A e^{-x} + B x e^{-x} \quad \text{lesz!}$$

$$\lambda = -1$$

$$y(0) = 1 \quad \text{és} \quad y'(0) = 2$$

$$1 = A + 0 \rightarrow A = 1$$

$$y' = -A e^{-x} + B e^{-x} - B x e^{-x}$$

$$2 = -1 + B \rightarrow B = 3$$

$$y = e^{-x} + 3x e^{-x}$$

III. $D < 0$ esete. Komplex konjugált állandós.

β - valós rész $\beta = -\frac{b}{2a}$ $\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$

↑
képzőes egység

$\lambda_1 = \beta + \omega i$ $\lambda_2 = \beta - \omega i$ kétféle dinamikussal rendelkező rendszer

$$y = A e^{\beta x} \sin \omega x + B e^{\beta x} \cos \omega x$$

pl $y'' - 2y' + 5y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = -4$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{2 + j4}{2} = 1 + j2 \quad \lambda_2 = 1 - j2$$

$$y = A e^x \sin 2x + B e^x \cos 2x$$

$$2 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \Rightarrow \boxed{B = 2}$$

$$y' = A \cdot e^x \sin 2x + 2A e^x \cos 2x + B e^x \cos 2x + B 2 e^x - \sin 2x$$

$$-4 = A \cdot 1 \cdot 0 + 2A \cdot 1 \cdot 1 + B \cdot 1 \cdot 1 + 2B \cdot 1 \cdot 0$$

$$-4 = 2A + B \quad \rightarrow \quad -6 = 2A \quad \boxed{A = -3}$$

$$y = -3 e^x \sin 2x + 2 e^x \cos 2x$$

ennyit a homogén töltés?

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = S(x) \quad \text{inhomogen,} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

PRÓBA FÜGGVÉNY MÓDSZER használható.

$$S(x): \text{polinom} \\ x^2$$

$$y_p = \text{Polinom} \\ Ax^2 + Bx + C$$

trigonometrikus

$$2\sin 3x + \cos 3x$$

exponenciális

$$e^{-x}$$

az előzők összege

$$e^x + 1$$

trigonometrikus

$$A\sin 3x + B\cos 3x$$

exponenciális

$$A e^{-x}$$

additív típusú összegek

$$Ae^x + B$$

a rezonanciára vigyázni kell.

$$y'' + y' - 2y = 5e^{3t}$$

$$y(0) = 3 \quad y'(0) = -1$$

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \text{homogén egyenlet.}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad D = \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$y_h = A e^t + B e^{-2t}$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^{3t}$$

$$y_p = \underline{\underline{C e^{3t}}}$$

$$y_p' = \underline{\underline{3C e^{3t}}}$$

$$y_p'' = \underline{\underline{9C e^{3t}}}$$

$$9C e^{3t} + 3C e^{3t} - 2C e^{3t} = 5 \cdot e^{3t}$$

$$10C e^{3t} = 5 \cdot e^{3t}$$

$$\boxed{C = 0,5}$$

$$y_{\text{intéger}} = A e^t + B e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$$

③

Kontroll:

$$3 = y(0) = A \cdot 1 + B \cdot 1 + \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$2,5 = A + B \rightarrow \boxed{A = 2,5 - B}$$

$$y' = A e^t - 2B e^{-2t} + 1,5 e^{3t}$$

$$-1 = y'(0) = A - 2B + 1,5$$

$$\boxed{A = 2,5 - \frac{5}{3}} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

$$-1 = 2,5 - B - 2B + 1,5$$

$$-5 = -3B \rightarrow \boxed{B = \frac{5}{3}}$$

es most van kenne.

$$\boxed{y = \frac{5}{6} e^t + \frac{5}{3} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{3t}}$$

pe $y'' + y' - 2 = 3e^t \rightarrow y'' + y' = \emptyset$ a homog. eq.

$$\lambda^2 + \lambda = \emptyset$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \emptyset \quad \lambda_2 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\boxed{y_h = A \cdot \underbrace{e^{0t}}_1 + B \cdot e^{-t}}$$

~~$y_p = A e^{-t} + B$ alru $y_p = C e^{-t}$~~

$$y_p = ct + dt e^{-t}$$

$$y_p'' = -2d e^{-t} + dt e^{-t}$$

$$y_p' = c + d e^{-t} + (-d) \cdot t e^{-t}$$

④

$$y_p'' + y_p' = -2D\bar{e}^t + Dt\bar{e}^t + C + D\bar{e}^t - Dt\bar{e}^t = 3\bar{e}^t + 2$$

$$-D\bar{e}^t + C = 3\bar{e}^t + 2$$

$$\underline{D = -3} \quad \underline{C = 2}$$

$$y_p = 2t - 3t\bar{e}^t$$

$$y = A + B\bar{e}^t + 2t - 3t\bar{e}^t$$

ITT REZONANCIA VAW.

Magasabb rendű lineáris egyenlet:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = S(x)$$

a próbafüggvény módszer itt is működik.

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$(x - \lambda_1)^{k_1} (x - \lambda_2)^{k_2} \dots (x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^{k_l}$$

valós gyökök esetén

$$\beta_1, \omega_1$$

komplex gyökök esetén

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x} \dots$$

↑ többszörös gyök esetén

(pl) Hf: $(\lambda - 2)^3$, akkor $e^{2x}, x e^{2x}, x^2 e^{2x}$ lesz!

és mi van a komplex gyökökkel? $e^{\beta_1 x} \sin \omega_1 x + e^{\beta_1 x} \cos \omega_1 x$

$$X e^{\beta_1 x} \sin \omega_1 x + X e^{\beta_1 x} \cos \omega_1 x \dots \text{ha tabellaris gatz}$$

pe: $(x^2 + 1)^3$
 $\beta = \emptyset \quad \omega = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \sin x, x \sin x, x^2 \sin x \\ \cos x, x \cos x, x^2 \cos x \end{array} \right\} \text{6 db lesr behät.}$$

pe

$$y^{(4)} - 4y^{(2)} + 3y = 3e^{x/2}$$

homogen $y''' - 4y'' + 3y = \emptyset$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = \emptyset$$

$$\boxed{p = x^2} \text{ legen}$$

$$p^2 - 4p + 3 = \emptyset$$

$$D = \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3} = \sqrt{16 - 12} = \underline{\underline{2}}$$

$$p_1 = \underline{\underline{3}} \quad p_2 = \underline{\underline{1}}$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = \sqrt{3} \\ \lambda_3 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_2 = -\sqrt{3} \\ \lambda_4 = -1 \end{array} \text{ lesr.}$$

$$y_{ha} = A e^{\sqrt{3}x} + B e^{-\sqrt{3}x} + C e^x + D e^{-x}$$

$$y_p = E e^{x/2}$$



$$y_p' = \frac{1}{2} E e^{x/2}$$

$$y_p''' = \frac{1}{8} E e^{x/2}$$

$$y_p'' = \frac{1}{4} E e^{x/2}$$

$$y_p'''' = \frac{1}{16} E e^{x/2}$$

Vissubstitui:

$$\frac{1}{16} E e^{x/2} - 4 \cdot \frac{1}{4} E e^{x/2} + 3 E e^{x/2} = 3 e^{x/2}$$

$$\frac{33}{16} E e^{x/2} = 3 e^{x/2} \rightarrow E = \frac{16}{11} \text{ es löse}$$

$$y_p = \frac{16}{11} e^{x/2}$$

es:

$$y = A e^{\sqrt{3}x} + B e^{-\sqrt{3}x} + C e^x + D e^{-x} + \frac{16}{11} e^{x/2}$$

pe) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 - 3x$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \emptyset$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \emptyset \quad \text{as 1 megoldása.}$$

$$(\lambda - 1)(\dots) = \emptyset$$

↑ ezzel vissza kell térni

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\lambda^3 - \lambda^2$$

$$-\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

2

$$-2\lambda^2 + 2\lambda$$

$$\lambda - 1$$

$$\lambda - 1$$

0

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \emptyset$$

↓

$$(\lambda - 1)^3 = \emptyset$$

④

3 basis megold.

$$e^x, x e^x, x^2 e^x$$



$$y_h = A e^x + B x e^x + C x^2 e^x$$

$$y_p = D x^2 + E x + F$$

$$y_p' = 2Dx + E$$

$$y_p'' = 2D$$

$$y_p''' = 0$$

$$\rightarrow 0 - 3(2D) + 3(2Dx + E) - (Dx^2 + Ex + F) =$$
$$= -x^2 - 3x$$

$$-Dx^2 + (6D - E)x + (-6D + 3E - F) = -x^2 - 3x$$

$$\boxed{-D = 1}$$

$$\boxed{D = -1}$$

$$6D - E = -3$$

$$-6 - E = -3 \rightarrow \boxed{E = -3}$$

$$-6D + 3E - F = 0$$

$$6 - 9 - F = 0 \rightarrow \boxed{F = -3}$$

$$\boxed{y_p = -x^2 - 3x - 3}$$

$$\boxed{y = A e^x + B x e^x + C x^2 e^x - x^2 - 3x - 3}$$

pe $y''' + y'' - y' - y = \cos x$

$$y''' + y'' + y' - y = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$-1 \text{ és } +1 \text{ megoldás} \quad + (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \underline{\lambda^3 - \lambda^1} \\ 2\lambda^2 - \lambda - 1 \\ \underline{2\lambda^2 - 2\lambda} \\ \lambda - 1 \end{array}$$

$e^x \quad e^{-x} \quad x e^{-x}$ lesz
a közös megoldás

$$y_h = A e^x + B e^{-x} + C x e^{-x}$$

$$\left. \begin{aligned} y_p &= D \sin 2x + E \cos 2x \\ y_p' &= 2D \cos 2x + 2E \sin 2x \\ y_p'' &= -4D \sin 2x - 4E \cos 2x \\ y_p''' &= -8D \cos 2x + 8E \sin 2x \end{aligned} \right\}$$

$$y_p''' + y_p'' - y_p' - y_p = -8D \cos 2x + 8E \sin 2x - 4D \sin 2x - 4E \cos 2x - 2D \cos 2x + 2E \sin 2x - D \sin 2x - E \cos 2x$$

$$\sin 2x [10E - 5D] + \cos 2x [-10D - 5E] = \cos 2x$$



$$\left. \begin{array}{l} 10E - 5D = 0 \\ -5E - 10D = 1 \end{array} \right\}$$

$$D = 2E$$

$$-5E - 20E = 1$$

$$\rightarrow -25E = 1$$

$$E = -\frac{1}{25}$$

$$D = -2/25$$

erhogen

$$y_p = -\frac{2}{25} \sin 2x - \frac{1}{25} \cos 2x$$

$$y = A e^x + B e^{-x} + C x e^{-x} - (2/25) \sin 2x - (1/25) \cos 2x$$

Egyenletrendszer:

elsőrendű vizsgálata bőségesen elegendő.

Zártaans egyenletrendszer, lineáris diff. egyenletrendszer:

$$y_1' = \underbrace{a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n}_{\text{homogén}} + \underbrace{D_1(x)}_{\text{inhomogén tag.}}$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + D_2(x)$$

⋮

$$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + D_n(x)$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \underline{D}(x) = \underline{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{Y}' = \underline{A} \cdot \underline{Y} + \underline{b}} \quad + \text{kez. feltétel: } \underline{Y}(0) = \underline{y_0}$$

inhomogén $\rightarrow$

homogén: $\underline{Y}' = \underline{A} \cdot \underline{Y}, \quad \underline{Y}(0) = \underline{y_0}$

② eliminációs módszer

~~$$y_1'(t) = y_1 + 2y_2 + e^{4t}$$~~

$$\left. \begin{aligned} y_1'(t) &= y_1 + 2y_2 + e^{4t} \\ y_2'(t) &= 3y_2 + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{kez. felt.}$$

nem fog y₁-től! Fasza!

hom:

$$y_2' - 3y_2 = 0$$

$$\lambda - 3 = 0 \rightarrow y_2 = C \cdot e^{+3t}$$

$$y_{2p} = D \quad y_{2p}' = 0$$

és egybe:

$$0 = 3D + 1 \rightarrow D = -\frac{1}{3}$$

$$y_2(t) = C \cdot e^{3t} - \frac{1}{3}$$

$$y_2(4) = 2 = C \cdot e^{3 \cdot 4} - \frac{1}{3}$$

$$2 = C - \frac{1}{3} \rightarrow C = \frac{7}{3}$$

$y_2(t) = \frac{7}{3} e^{3t} - \frac{1}{3}$

 egybe.

és visszat:

$$y_1' - y_1 = \frac{14}{3} e^{3t} - \frac{2}{3} + e^{4t}$$

~~homi~~
 $y_1' - y_1 = 0$ homogén.

$$\lambda - 1 = 0 \quad \boxed{\lambda = 1}$$

$$y_{1h} = \frac{t}{A} \cdot e^t$$

$$y_{1p} = E \cdot e^{3t} + F + G e^{4t}$$

$y_{1p}' = 3E e^{3t} + 4G e^{4t}$

visszat:

$$(3E e^{3t} + 4G e^{4t}) - (E e^{3t} + F + G e^{4t}) = \frac{14}{3} e^{3t} - \frac{2}{3} + e^{4t}$$

egyenletet egybe:

$$2E = \frac{14}{3} \rightarrow \boxed{E = \frac{7}{3}}$$

$$3G = 1 \rightarrow \boxed{G = \frac{1}{3}}$$

$$\text{konstans: } -F = -\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{F = \frac{2}{3}}$$

egybe!

$$y_1(t) = A \cdot e^t + E e^{3t} + F + G e^{4t} =$$

$$= A e^t + \frac{7}{3} e^{3t} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{4t} \quad + \text{resd.: } y_1(\phi) = 1$$

$$1 = A + \frac{7}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow 1 = A + \frac{10}{3}$$

$$y_1(t) = -\frac{7}{3} e^t + \frac{7}{3} e^{3t} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{4t}$$

$$A = -\frac{7}{3}$$

padamints.

$$\textcircled{pl} \quad \left. \begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_1 - u_2 + e^t \\ u_2'(t) &= 6u_1 - 3u_2 \end{aligned} \right\}$$

$$u_1(\phi) = u_2(\phi) = 3 \quad \text{resd. felt.}$$

deriváljuk az egyenlet, bepofozok a resdla:

$$u_1''(t) = 2u_1' - u_2' + e^t$$

$$u_1''(t) = 2u_1' - (6u_1 - 3u_2) + e^t$$

$$u_1''(t) = 2u_1' - 6u_1 + 3u_2 + e^t$$

↑ kifejezés az elsőből:

$$u_2 = 2u_1 - u_1' + e^t$$

u_1 -el így van kifejezve
 $u_2!!!$

$$u_1''(t) = 2u_1' - 6u_1 + 3[2u_1 - u_1' + e^t] + e^t =$$

$$= -u_1' + 4e^t \quad \text{ennyire.}$$

$$u_1'' + u_1' = 4e^t$$

$$u_1'' + u_1' = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \lambda(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$$

$$u_n(t) = A e^{-t} + B \quad \text{erzgi.}$$

$$u_p(t) = C \cdot e^t$$

$$u_p' = u_{1p}' = C \cdot e^t \quad \dots \quad \text{erzgi.}$$

$$C \cdot e^t + C e^t = 4e^t \quad \rightarrow \quad \boxed{C=2} \quad \text{erzgi.}$$

$$u_1(t) = A e^{-t} + B + 2 e^t \quad \rightarrow \quad 3 = u_1(0) = A + B + 2$$

$$\boxed{A+B=1} \quad \text{falls } u_2!$$

$$u_1' = -A e^{-t} + 2e^t$$

$$u_2 = 2u_1 - u_1' + e^t = 2[A e^{-t} + B + 2e^t] - [-A e^{-t} + 2e^t] + e^t$$

$$u_2 = 3A e^{-t} + 3e^t + 2B \quad \text{ges.}$$

Korrekturen f.:

$$u_2(0) = 3 = \underline{3A + 3 + 2B}$$

$$\rightarrow 3A + 2B = 0$$

$$A + B = 1$$

$$\underline{A = 1 - B}$$

$$3 - 3B + 2B = 0$$

$$-B = -3 \rightarrow \boxed{B=3}$$

$$\boxed{A = -2}$$

erzgi

$$x(t) = -2e^t + 3 + 2e^t$$

$$x_2(t) = -6e^t + 13e^t + 6$$

ennyi-

(pl) általános módszer homogénra.

$$\boxed{y' = \underline{A} \cdot y + \varphi} \quad y(0) = y_0$$

$$y = e^{\underline{A}t} y_0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

lgy: $e^{\underline{A}t} = \underline{E} + \underline{A}t + \frac{(\underline{A}t)^2}{2} + \frac{(\underline{A}t)^3}{6} + \dots$ lgy volt.

deriváljuk ezt t-szerint.

$$(\underline{A}t)^1 = \underline{A} + 2 \cdot \frac{\underline{A}^2 t}{2} + 3 \cdot \frac{\underline{A}^3 t^2}{6} + \dots + n \cdot \frac{\underline{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \underline{A} \cdot \left(\underline{E} + \underline{A}t + \frac{1}{2} \underline{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \underline{A}^{n-1} t^{n-1} \right) = \underline{A} \cdot e^{\underline{A}t}$$

szopcs ez.

$$\underline{A} = \underline{R} \underline{D} \underline{R}^{-1} \quad \text{diagonalizálás}$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{R} = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots)$$

↑ sajátvektorok aszloposan!

est kell tenni.

$$\underline{A}^2 = (\underline{R} \underline{D} \underline{R}^{-1}) \cdot (\underline{R} \underline{D} \underline{R}^{-1}) = \underline{R} \underline{D}^2 \underline{R}^{-1}$$

$$\boxed{\underline{A}^n = \underline{R} \underline{D}^n \underline{R}^{-1}} \quad \text{eset jö.} \quad \text{csak D-t kell határozn}$$

$$e^{At} = \underline{R} \underline{R}^{-1} + \underline{R} \underline{D} \underline{R}^{-1} t + \underline{R} \underline{D}^2 \underline{R}^{-1} t^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots + \frac{\underline{R} \underline{D}^n \underline{R}^{-1} t^n}{n!}$$

$$= \underline{R} \left(\underline{I} + \underline{D} t + \frac{\underline{D}^2 t^2}{2} + \dots \right) \underline{R}^{-1} = \underline{R} e^{\underline{D} t} \underline{R}^{-1}$$

(függvényben van)

$$e^{\underline{D} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

1) $\underline{A}$ sajátértékeinek meghatározása

2) $\underline{R}$, $\underline{D}$, $\underline{R}^{-1}$ felírása

3) $e^{At} = \underline{R} e^{\underline{D} t} \underline{R}^{-1}$ ehelyre.

4) $\underline{y} = e^{At} \underline{y}_0$

pl)

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= 2u_1 + u_2 \\ u_2' &= 6u_1 + 3u_2 \\ u_1(\phi) &= 1 \quad u_2(\phi) = -1 \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 6 = \phi$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 - 6 = \phi$$

$$\lambda(\lambda + 5) = \phi$$

$$\left(\lambda_1 = -6 \right) \quad \left(\lambda_2 = -5 \right)$$

oldand:

$$\underline{A} \underline{v}_1 = \lambda \underline{v}_1$$

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \underline{v}_1 = \underline{0}$$

$$\underline{\lambda}_1 = 0 - \text{hoz.}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \cdot \alpha_1$$

$$6\alpha_1 + 3\beta_1 = 0 \cdot \beta_1$$

$$\boxed{2\alpha_1 = -\beta_1}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ lehet.}$$

$$\underline{\lambda}_2 = 5$$

$$2\alpha_2 + \beta_2 = 5\alpha_2$$

$$6\alpha_2 + 3\beta_2 = 5\beta_2$$

$$\boxed{\beta_2 = 3\alpha_2}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

0-hoz tartozó sajátvektorok

$\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ megvan.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{(-3) - (-2 \cdot 1)}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \text{ lesz!}$$

diagonális mátrix szel szorzatából

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}}_{\text{diagonális mátrix szel szorzatából}} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 2/5 e^{5t} & 1/5 e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 + (2/5) e^{5t} & (-1/5) + (1/5) e^{5t} \\ (-6/5) + (6/5) e^{5t} & (2/5) + (1/5) e^{5t} \end{bmatrix}$$

megoldás:

$$y = e^{\underline{A}t} \cdot y_0 = \begin{bmatrix} (1/5) e^{5t} + (4/5) \\ (3/5) e^{5t} - (4/5) \end{bmatrix} = u_1(t) \\ u_2(t)$$

~~szorzás~~

$$y = \underline{A} \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + B \cdot e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{A} \Rightarrow B$$

$$y' = \underline{A} \cdot y + \underline{b}$$

inhomogenitás van.

$y(p) = y_0$ legyen.

Bella!

$$y_p = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{c}$$

$$y_p' = \underline{A} \cdot e^{\underline{A}t} \underline{c}(t) + e^{\underline{A}t} \underline{c}'(t) =$$

$$\underline{c}'(t) = \underline{A} \cdot e^{\underline{A}t} \cdot \underline{c}(t) + \underline{b}$$

$$\boxed{e^{\underline{A}t} \underline{c}'(t) = \underline{b}} \text{ lesz.}$$

$$\boxed{\underline{c}'(t) = \underline{A} \underline{c} + \underline{b}}$$

$$\underline{c}(t) = \int_0^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{b}(\tau) d\tau$$

$$y_p = e^{\underline{A}t} \int_0^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{b}(\tau) d\tau \text{ lesz igaz}$$

ennyire

$$y = e^{\underline{A}t} \left[\int_0^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{b}(\tau) d\tau + y_0 \right]$$

$$\left(\underline{R} \underline{e}^{\underline{D}t} \underline{R}^{-1} \right)^{-1} = \underline{R} \left(\underline{e}^{\underline{D}t} \right)^{-1} \underline{R}^{-1}$$

$$\underline{e}^{\underline{D}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \rightarrow \left(\underline{e}^{\underline{D}t} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{-\lambda_n t} \end{bmatrix} \text{ lesz!}$$

ennyi.

(pl)

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= 2u_2 - 2 \\ u_2' &= 4u_1 + 2u_2 + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(\phi) &= 1 \\ u_2(\phi) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

1) $\underline{A}$, $\underline{b}$ és y_0 felírása

2) $\underline{A}$ sajátértékei, sajátvektorai

3) $\underline{A} = \underline{R} \underline{D} \underline{R}^{-1}$

4) $\underline{e}^{\underline{A}t}$ és $\left(\underline{e}^{\underline{A}t} \right)^{-1}$ kiszámolása.

5) $\int_0^t \underline{e}^{-\underline{A}\tau} \underline{b}(\tau) d\tau$ kiszámolása = $\underline{c}(t)$

6) $y = e^{\underline{A}t} (\underline{c}(t) + y_0)$ és ennyi.

$$1) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 8 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 4} \quad \underline{\lambda_2 = -2}$$

$$\underline{\lambda_1 = 4 \text{hez}}$$

$$0\alpha_1 + 2\beta_1 = 4\alpha_1 \rightarrow \beta_1 = 2\alpha_1 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = -2}$$

$$0\alpha_2 + 2\beta_2 = -2\alpha_2 \rightarrow \beta_2 = -\alpha_2 \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^{-1} = \frac{1}{\begin{matrix} -1-2 \\ -3 \end{matrix}} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 e^{4t} & 1/3 e^{4t} \\ 2/3 e^{-4t} & -1/3 e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 e^{4t} + 2/3 e^{-4t} & 1/3 e^{4t} - 1/3 e^{-4t} \\ 2/3 e^{4t} - 1/3 e^{-4t} & 2/3 e^{4t} + 1/3 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$e^{-At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} e^{-4t} + \frac{2}{3} e^{4t} & \frac{1}{3} e^{-4t} - \frac{1}{3} e^{4t} \\ \frac{2}{3} e^{-4t} - \frac{1}{3} e^{4t} & \frac{2}{3} e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{4t} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

les. Ecce.

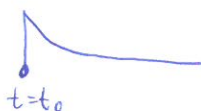
$$\int_0^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} e^{-4\tau} - \frac{1}{3} e^{2\tau} + \frac{2}{3} e^{-4\tau} + \frac{1}{3} e^{2\tau} \\ -\frac{1}{3} e^{-4\tau} + \frac{2}{3} e^{-2\tau} + \frac{1}{3} e^{-4\tau} + \frac{1}{3} e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{6}{3} e^{2\tau} \\ \frac{6}{3} e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -e^{2\tau} \\ e^{2\tau} \end{bmatrix}_0^t =$$

$$\Rightarrow \underline{c(t)} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} + 1 \\ e^{2t} \\ e - 1 \end{bmatrix}$$

$$y = e^{At} \begin{bmatrix} 1 - e^{2t} + 1 \\ e^{2t} - 1 - 1 \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 2 - e^{2t} \\ e^{2t} - 2 \end{bmatrix}$$

ezt meg már meg lehet oldani.

Laplace - transzformáció

ilyen függvényekre lehet alkalmazni.

Resztükéletek-problémákra jól lehet alkalmazni.

e^{st} bázison, de $s \in \mathbb{C}$! Sajnos

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} Y(s) ds \quad (\text{csúnya!})$$

- Lineáris: $\mathcal{L}\{c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{y_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{y_2(t)\} = \underline{c_1 Y_1(s) + c_2 Y_2(s)}$
- Deriváltak: $\mathcal{L}\{y'(t)\} = \underline{s Y(s) - y(0)}$ • Második d.: $\mathcal{L}\{y''(t)\} = \underline{s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)}$
- Integrál: az nem is kell.

- $\mathcal{L}\{t y(t)\} = -Y'(s)$
- $\mathcal{L}\{e^{-at} y(t)\} = Y(s+a)$
- $\mathcal{L}\{y(at)\} = \frac{1}{a} Y\left(\frac{s}{a}\right)$
- $\mathcal{L}\{\underbrace{y(t-t_0)}_{y(t-t_0) \cdot H(t-t_0)}\} = e^{-s t_0} Y(s)$

$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$	$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}\{e^{-at} t^n\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}$	$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$
$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin(bt)\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos(bt)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

ennyi. jöhet a példa.

(pl)

$$\left. \begin{aligned} u'(t) &= 2u(t) + e^{-t} \\ u(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

$$sU(s) - 2 = 2U(s) + \frac{1}{s+1} \quad \text{lesz}$$

$$sU - 2U = 2 + \frac{1}{s+1} \quad \rightarrow U(s-2) = \frac{2s+2+1}{s+1} = \frac{2s+3}{s+1}$$

$$U = \frac{2s+3}{(s+1)(s-2)} \text{ ennyi az egész, úgyje, ezért kombináljuk.}$$

$$U = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

$$A = \frac{-2+3}{-1-2} = \frac{1}{-3} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

$$B = \frac{4+3}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

$$\begin{array}{l} S^1: \quad 2 = A+B \\ S^0: \quad 3 = B-2A \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} S^1 \\ S^0 \end{array}} \right\}$$

$$2 \cdot \underline{I} + \underline{II} = \underline{\underline{7 = 3B}}$$

meg kell oldani.

$$U = -\frac{1}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{7}{3} \frac{1}{s-2} \Rightarrow u(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{7}{3} e^{2t}}}$$

ennyire

Második példa:

$$\mathcal{L} \left\{ \begin{array}{l} y''(x) + y(x) = 3 \sin(2x) \\ y(0) = 2, y'(0) = -1 \end{array} \right\} \text{ lesz a példa}$$

$$s^2 Y - s^2 + 1 + Y = 3 \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{6}{s^2 + 4}$$

$$s^2 Y + Y = \frac{6}{s^2 + 4} + s^2 - 1$$

$$Y(s^2 + 1) = \frac{6 + 2s^3 + 8s - s^2 - 4}{s^2 + 4}$$

$$Y(1+s^2) = \frac{2s^3 - s^2 + 8s + 2}{s^2 + 4} \rightarrow Y = \frac{2s^3 - s^2 + 8s + 2}{(s^2 + 4)(1+s^2)}$$

$$= \frac{2s^3 - s^2 + 8s + 2}{(s^2+4)(1+s^2)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} =$$

$$= \frac{(As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\begin{array}{lcl} s^3: & 2 = A + C & \\ s^2: & -1 = B + D & \\ s^1: & 8 = A + 4C & \\ s^0: & 2 = B + 4D & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 6 = 3C \rightarrow \underline{\underline{C=2}} \\ \underline{\underline{A=0}} \end{array}$$

$$3 = 3D \rightarrow \underline{\underline{D=1}} \\ \underline{\underline{B=-2}}$$

$$Y = \frac{-2}{s^2+4} + \frac{2s+1}{s^2+1} = -\frac{2}{s^2+4} + 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$y(t) = -\sin(2x) + 2 \cdot \cos x + \sin(x)$$

Eigenwertensuche ist wegen a beliebig.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$y_1(0)=1, y_2(0)=2$$

$$sY_1 - 1 = Y_1 - Y_2$$

$$sY_2 - 2 = -Y_1 + Y_2$$

$$Y_2 = Y_1 - sY_1 + 2$$

$$s[Y_1 - sY_1 + 2] - 2 = [Y_1 - sY_1 + 2] - Y_1$$

$$sY_1 - s^2Y_1 + s - 2 = 1 - sY_1$$

$$2sY_1 - s^2Y_1 = 3 - s$$

$$(2s - s^2)Y_1 = 3 - s$$

$$Y_1 = \frac{3-s}{s(2-s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} = \frac{As - 2A + Bs}{s(s-2)}$$

$$-2A = -3 \rightarrow A = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$A+B=-1$$

$$\rightarrow B = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

ennyirek.

$$Y_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{s-2} \quad y_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$y_2 = y_1 - \dot{y}_1 \quad \dot{y}_1 = -e^{2t} \text{ lesz.}$$

$$y_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{2t} + e^{2t} = \underline{\underline{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{2t}}}$$

$$y_1' = y_1 + y_2 + t$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2 + e^t$$

$$y_1(0) = -1 \quad y_2(0) = -3$$

melyviz, csak leszokna!

$$sY_1 + 1 = Y_1 + Y_2 + \frac{1}{s^2} \rightarrow Y_2 = sY_1 - Y_1 - \frac{1}{s^2} + 1$$

$$sY_2 + 3 = 2Y_1 + 2Y_2 + \frac{1}{s-1}$$

$$s(sY_1 - Y_1 - \frac{1}{s^2} + 1) + 3 = 2Y_1 + 2(sY_1 - Y_1 - \frac{1}{s^2} + 1) + \frac{1}{s-1}$$

$$s^2 Y_1 - sY_1 - \frac{1}{s} + sB = 2Y_1 + 2sY_1 \quad \text{egy befűz fel}$$

$$s^2 Y_1 - sY_1 - 2Y_1 - 2sY_1 + 2Y_1 = -s + \frac{1}{s} - 3 + 2 - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$\frac{-s^3(s-1) + s(s-1) - 2s^2(s-1) - 2(s-1) + s^2}{s^2(s-1)}$$

$$Y_1(s-3s) = \frac{1}{s^2(s-1)} (-s^4 + 3s^3 - 3s + 2)$$

$$Y_1 = \frac{-s^4 + 3s^3 - 3s + 2}{s^2(s-1)(s-3s)} = \frac{-s^4 + 3s^3 - 3s + 2}{s^3(s+1)(s-3)}$$

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} + \cancel{C} + \cancel{D} + \cancel{E} + F \quad \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s}$$

$$= \frac{A s^3 (s-3) + B s^3 (s-1) + C (s-3)(s-1) + D s (s-1)(s-3) + E s^2 (s-1)(s-3)}{s^3 (s-1)(s-3)}$$

$$s^4: -1 = A + B + E$$

$$s^3: 0 = -3A - B + D - 4E \rightarrow$$

$$s^2: 3 = C - 4D + 3E \rightarrow E = \frac{17}{27}$$

$$s^1: -3 = -4C + 3D \rightarrow 4C - 3 = 3D \rightarrow 3D = -\frac{1}{3} \rightarrow D = -\frac{1}{9}$$

$$s^0: 2 = 3C \rightarrow C = \frac{2}{3}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{61}{54}$$

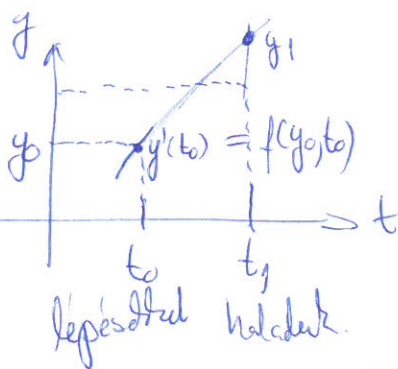
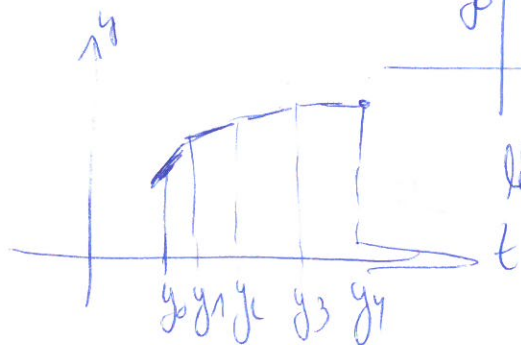
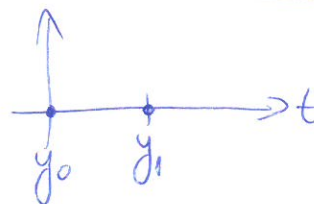
$$Y_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \left(-\frac{61}{54}\right) \frac{1}{s-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^3} - \frac{1}{9} \frac{1}{s^2} + \frac{17}{27} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_1(t) = -\frac{1}{2} e^t - \frac{61}{54} e^{3t} + \frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{9} t + \frac{17}{27}$$

Numerikus módszer:

$$y' = f(t, y)$$

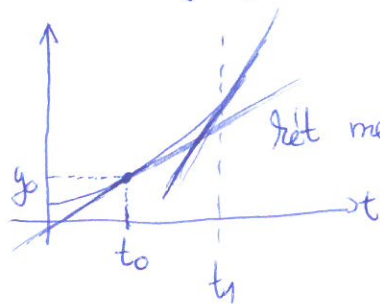
diszkrétizáció.



$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n, t_n)$$

EXPLICIT MÓDSZER
EXPLICIT EULER-MÓDSZER

a másodrendű jelleget ez nem követi le.



két meredekség átlaga már pontosabb.

$$y_i + t f(y_i, t_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(y_i, t_i) + f(y_i^b, t_{i+1})}{2} \Delta t$$

javított Euler-módszer.

Ez már egy másodrendű módszer.

Prédiktor-korrektor

Hogyan megy ez?

$$\left. \begin{array}{l} y' = (x^2 - 1)y \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

$$y(0,2) = ? \text{ két lépésben.} \\ \Delta x = 0,1$$

$$f(x,y) = (x^2 - 1)y$$

X	y	y'	Δy
0	1	$(0^2 - 1) \cdot 1 = -1$	$-1 \cdot 0,1 = -0,1$
0,1	0,9	$(0,1^2 - 1) \cdot 0,9 = -0,891$	$-0,891 \cdot 0,1 = -0,0891$
0,2	0,8109	—	—

ennyi. lehet a javított.

X	y	y'	y ₀	y ₂	y'	Δy
0	1	$(0^2 - 1) \cdot 1 = -1$	0,9	$(0,1^2 - 1) \cdot 0,9 = -0,891$	$\frac{-1 - 0,891}{2} = -0,9455$	$-0,9455$
0,1	0,90545	$(0,1^2 - 1) \cdot 0,90545 = -0,8964$	0,8158	$(0,2^2 - 1) \cdot 0,8158 = -0,7832$	$\frac{-0,8964 - 0,7832}{2} = -0,8398$	$-0,8398$
0,2	0,815	—	—	—	—	—