



Analízis, 2015. október 9.

1. Ismerkedés

Hajba Tamás, C/607, hajbat@sze.hu

Témák: 1) Görbék ; 2) Felületek ; 3) Vektor-vektorfüggvények ; 4) Görbementi integrál,
 - paraméterezés
 - ívhossz
 - érintő vektora
 - görbület, torzió
 - felület normála
 - érintési felület
 - felszínszámítás
 - divergencia tétel
 - potenciál függvény
 - görbementi integrál,
 - felületi integrál,
 - integrálmeghatározás tétel

Vizsga: írásbeli. 50 p van. (24-ig 1, 25-30 - 2, 31-36 - 3, 37-43 - 4, 44-5)

Ajánlott irodalom: <http://vst.sze.hu/~hajbat> → oktatási információk.

Vannak további vizsgacsoportok + gyakorlófeladatok.

www.sze.hu/~letfi itt is van anyag

vst.sze.hu/~remetka/data

Vizsgán: 2 görbés példa, 1 felületi példa (v. 2), 1 db vekt/div, ^{↑ kidolgozott} feladatok.

⊕ integrál a végén

Görbék:

Def.: Vektor-skalár függvénynek nevezzük egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényt, azaz olyan függvényt, aminek az értékkészlete tartománya a valódi számok reálhalmazára, az értékkészlete pedig egy 3D-s vektor.

például: $r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ $0 \leq t$ egy vektor-skalár függvény.

V-S-függvény deriváltja: Def: Az $r(t)$ V-S-függvény t_0 -beli deriváltjának:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t_0+h) - r(t_0)}{h} - t \text{ irányú, ha létezik.}$$

↑ vektormegértés ez.

Egy $r(t)$ vektor-skalár függvény felírható: $r(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{koordináta}} \cdot \underbrace{i}_{\text{egységvektor}} + \underbrace{y(t)}_{\text{koordináta}} \cdot \underbrace{j}_{\text{egységvektor}} + \underbrace{z(t)}_{\text{koordináta}} \cdot \underbrace{k}_{\text{egységvektor}}$



pl: $r(t) = (t^2, t^3, t) = t^2 \cdot i + t^3 \cdot j + (1-t) \cdot k$ lehet fel.

A koordinata függvésket kell deriválni.

Teljes: $\dot{r}(t) = 2t \cdot i + 3t^2 \cdot j - k$ lesz a derivált.

Tfh: van V-S-fgv-ünk $\rightarrow$ az ET Vt pályára a k-ú koordinata-rendszerben veszd fel az $r(t) - t$.

$\rightarrow$ mit kapunk? A függvény grafikonját. Egy 3D-s görbét kapunk.
V tényleg görbe leírható egy V-S-fgv grafikonjával.

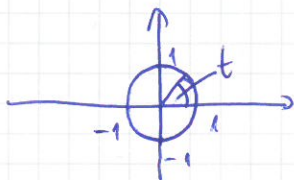
Ha egy G görbe az $r(t) = x(t) \cdot i + y(t) \cdot j + z(t) \cdot k$ V-S-fgv.-nek a grafikonja, akkor az $r(t)$ a görbe vektoregyenlete.

t a fűrésben tipikusan idő.

$\vec{r}(t)$ elmozdulás-idő függvény

Példák görbék paraméterezése:

1)



az xy-síkban az origó körüli $r=1$ sugarú kör.

$$r(t) = \cos t \cdot i + \sin t \cdot j + 0 \cdot k =$$

$$= \cos t \cdot i + \sin t \cdot j \text{ a görbe,}$$

$$\text{ahol } 0 \leq t \leq 2\pi$$

? nem kell egyenlőség.

a szög a paraméter

A szög lehet t.

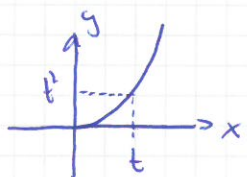
De lehet $2t$ is! $r(t) = \cos 2t \cdot i + \sin 2t \cdot j$

$$0 \leq t < \pi$$

Egy görbe többféleképpen paraméterezhető, az a lényeg



2) Az xy -síkban az $y=x^2$ jobb oldali részét.



$$r(t) = t \cdot \underline{i} + t^2 \cdot \underline{j} \quad \text{lesz igaz.}$$

$t \geq 0$ esetén pasz.

3) Csavanyóval

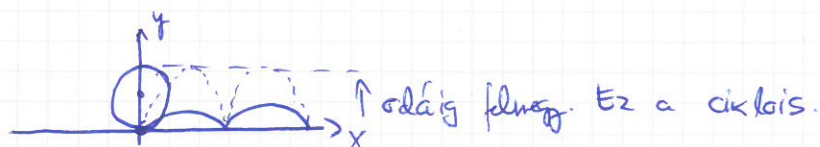


körkörös emelkedő görbe.

$$r(t) = \cos t \cdot \underline{i} + \sin t \cdot \underline{j} + \underbrace{c \cdot t \cdot \underline{k}}_{\text{vagy } c \cdot \underline{k}} \quad \text{"c az emelkedés sebessége"}$$

Amíg a pont meglesz egy kör, addig $2\pi c$ -t emelkedik.

4) Ciklois:



→ gúny, mit is le az alsó pofja?

$$r(t) = r(t - \sin t) \cdot \underline{i} + r(1 - \cos t) \cdot \underline{j}, \quad \text{ahol} \quad 0 \leq t$$

↑ sugár (lehet a is, hogy a hirtelen egyértelmű legyen.)

Mennyi utat tesz meg a test a $(0, t)$ időintervallumban?



↑ a görbe ívhossza a kérdés lehet.

Hogyan lehet ezt számolni?

Vezessük vissza szakmai csomag, és akkor jó lesz.

Fel lehet írni

Ut: adott intervallumra integrált sebesség.



Ha G görbe $r(t)$ paraméterezve a $[t_1, t_2]$ -n folytonosan deriválható, akkor a t_1 és t_2 paraméterezés megfelelő pontok közötti görbeszakasz ívhossza:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt \quad \text{ lesz igaz.}$$

Vizsga első feladata tipikusan ez.

pe $G =$ origó köré, 2 sugarú kör felső része. (Vizsgán a görbe adott lesz!)



$$r(t) = 2 \cos t \cdot \underline{i} + 2 \sin t \cdot \underline{j} \quad 0 \leq t < \pi$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt =$$

$$= \int_0^{\pi} 2 dt = 2 \left[t \right]_0^{\pi} = 2(\pi) = \underline{\underline{2\pi}}$$

$$\dot{r}(t) = -2 \sin t \cdot \underline{i} + 2 \cos t \cdot \underline{j}$$

$$|\dot{r}(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \underline{\underline{2}}$$

Ennyi az egész.

pe (sawtooth) 0 és 2π között melyik utat tesz meg?

$$r(t) = 3 \cos t \cdot \underline{i} + 3 \sin t \cdot \underline{j} + 4t \cdot \underline{k}$$

$$\dot{r}(t) = -3 \sin t \cdot \underline{i} + 3 \cos t \cdot \underline{j} + 4 \cdot \underline{k}$$

$$|\dot{r}(t)| = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} =$$

$$\sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16} = \sqrt{9+16} = \underline{\underline{5}}$$

$$s = \int_0^{2\pi} 5 dt = 5 \left[t \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{10\pi}}$$

(4)



(p1) $r(t) = t \underline{i} + \sqrt{t^3} \underline{j} + 2t \underline{k}$ legyen

Ívhossz 0 és 9 között.

$$\dot{r}(t) = \underline{i} + \frac{3}{2} \sqrt{t} \cdot \underline{j} + 2 \underline{k}$$

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{9}{4}t + 4} =$$

$$s = \int_0^9 \sqrt{5 + \frac{9}{4}t} dt = \left[\frac{(5 + \frac{9}{4}t)^{3/2}}{3/2 \cdot \frac{9}{4}} \right]_0^9 = \left[\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(5 + \frac{9}{4}t)^3} \right]_0^9$$

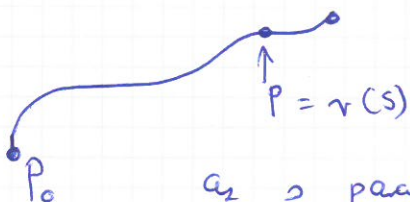
lehet helyettesíteni

↑ először lg kell.
És tényleg.

(p2): $\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C$ még 1: $\int f' \cdot f^a = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C$
Ez is fontos.

Ennyi az egész.

Ívhossz szerinti paraméterezés:



az s paraméter megadja, hogy a $P = r(s)$ pontba mennyi a $P_0 \rightarrow P$ ív hossza. Ilyet az ívhossz.

Altalános ívhossz szerinti paraméterezésre.

(p3). $r(t) = 4 \cos t \underline{i} + 4 \sin t \underline{j}$

1. lépés: kiszámoljuk 0 és t közötti ív hosszát. Megkapjuk: $s = f(t)$ lesz.

(5)



2. lépés: kifejezzük t -t φ -el, és visszarajzoljuk az eredeti egyenletbe.

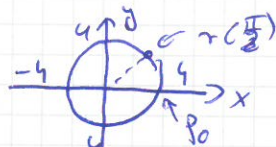
$$\dot{r}(t) = -4 \sin t \cdot \underline{i} + 4 \cos t \cdot \underline{j} \quad |\dot{r}| = \sqrt{16 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t)} = \underline{4}$$

$$s = \int_0^t |\dot{r}(\varphi)| d\varphi = \int_0^t 4 d\varphi = 4[\varphi]_0^t = \underline{4t}$$

$$s = 4t \rightarrow \underline{t = \frac{s}{4}}$$

Es visszarajzoljuk: $r(s) = 4 \cos \frac{s}{4} \underline{i} + 4 \sin \frac{s}{4} \underline{j}$ ennyire.

(pl.) $s = \frac{\pi}{2}$



$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underline{i} + 4 \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underline{j} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} = 2\sqrt{2} \cdot \underline{i} + 2\sqrt{2} \cdot \underline{j}$$

Es tényleg.

Vizsga 1. feladat: ívhossz és állás ívhossz-paraméterezésre. Ennyi.

(pl.) $r(t) = e^{3t} \underline{i} + 2e^{3t} \underline{j} + e^{3t} \underline{k}$

$$\dot{r}(t) = 3e^{3t} \underline{i} + 6e^{3t} \underline{j} + 3e^{3t} \underline{k}$$

$$|\dot{r}(t)| = \sqrt{9e^{6t} + 36e^{6t} + 9e^{6t}} = \sqrt{9(e^{6t} + 4e^{6t} + e^{6t})} = \sqrt{54e^{6t}}$$

$$= \sqrt{54} \cdot e^{3t} \text{ lesz.}$$

$$s = \int_0^t \sqrt{54} \cdot e^{3\varphi} d\varphi = \sqrt{54} \int_0^t e^{3\varphi} d\varphi = \sqrt{54} \left[\frac{e^{3\varphi}}{3} \right]_0^t =$$

$$= \sqrt{54} \cdot \left(\frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{54}}{3} (e^{3t} - 1)$$



$$0 = \frac{\sqrt{54}}{3} e^{3t} - \frac{\sqrt{54}}{3} \quad \rightarrow \frac{\ln\left(0 + \frac{\sqrt{54}}{3}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{54}}}{3} = t$$

De elég $e^{3t} - t$ kifejezni $e^{3t} = \frac{0 + \frac{\sqrt{54}}{3}}{\frac{\sqrt{54}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{54}} \left(0 + \frac{\sqrt{54}}{3}\right)$

Es vissza: $r(t) = 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{54}} \left(0 + \frac{\sqrt{54}}{3}\right) \cdot \underline{i} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{54}} \left(0 + \frac{\sqrt{54}}{3}\right) \cdot \underline{j} + \frac{3}{\sqrt{54}} \left(0 + \frac{\sqrt{54}}{3}\right) \cdot \underline{k}$ Ennyi az egész.

pl $r(t) = 4 \cos\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \underline{i} + 4 \sin\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \underline{j}$

$r'(t) = ?$ Ha r ívhosszparaméteresen adott, akkor r' -t szokás lenni.

$$r'(t) = -4 \sin\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \underline{i} + 4 \cos\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \underline{j} = -\sin\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \underline{i} + \cos\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \underline{j}$$

$$r''(t) = -\cos\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \underline{j} - \sin\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \underline{i}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2\left(\frac{2}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{2}{4}\right)} = \underline{1} \quad \text{Ez általában igaz.}$$

Tétel: ívhossz szerint paraméterezett görbe ívhossz szerinti első deriváltjának hossza $\forall$ pontban 1.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{szokás}}}{r'(t)} \cdot r''(t) = \sin\left(\frac{2}{4}\right) \cos\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + \cos\left(\frac{2}{4}\right) \cdot (-\sin\left(\frac{2}{4}\right)) \cdot \frac{1}{4} = \underline{0}$$

Tétel: ívhossz - paraméteres esetén $\forall t \in \mathbb{R} \quad r'(t) \cdot r''(t) = 0$.

A két vektor mindig egymásra.



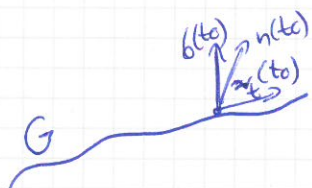
Kisérő triéder:

A G görbe t_0 paraméterű pontjának tartozó kiserő triéder 3 egységvektor, melyek párhuzamosak egymással.

$t(t_0)$ - érintő egységvektor (tangenciális);

$n(t_0)$ - főnormális egységvektor;

$b(t_0)$ - binormális egységvektor.



a triéder változódik a ponttal együtt.

Az érintő egységvektor és a főnormális egységvektor által meghatározott sík:
simultán sík.

A simultánsík mindig tartalmazza a görbe érintőt.

Kiszámítás:

$$t(t_0) = \dot{r}(t_0) / |\dot{r}(t_0)|$$

$$b(t_0) = (\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)) / |\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)|$$

$$n(t_0) = b(t_0) \times t(t_0)$$

① $r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

lyuk fel a kiserő triédert vizsgáljuk pontban.

$$\dot{r}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$t_0 = 1$ -ben például.

$$\ddot{r}(t) = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

$$\dot{r}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\ddot{r}(1) = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$t(1) = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{1+2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k} \quad \text{íráské fel.}$$

$$b(1) = \frac{\dot{r}(1) \times \ddot{r}(1)}{|\dot{r}(1) \times \ddot{r}(1)|} = *$$

②



$$\vec{r}(1) \times \vec{v}(1) = \begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = i(2 \cdot 6 - 2 \cdot 3) - j(6 - 0 \cdot 3) + k(2 - 0) =$$

$$= \underline{6i - 6j + 2k}$$

$$* \text{ folgt: } * = \frac{6i - 6j + 2k}{\sqrt{2 \cdot 36 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{76}} i + \left(-\frac{6}{\sqrt{76}}\right) j + \frac{2}{\sqrt{76}} k \quad \text{ergo:}$$

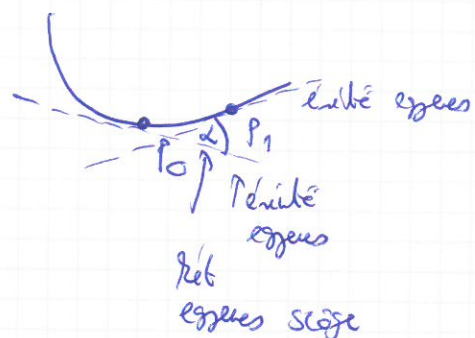
$$n(1) = ? = \frac{6(1) \times t(1)}{1} = 6(1) \times t(1) = \begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ 6/\sqrt{76} & -6/\sqrt{76} & 2/\sqrt{76} \\ 1/\sqrt{4} & 2/\sqrt{4} & 3/\sqrt{4} \end{vmatrix} =$$

$$= i(\dots) \quad \text{Rissänderung}$$

Görbület, torció:

görbület: „mennyire vágja a kör az egyeneset“

torció: „mennyire szögörbe“



$$G(P_0) = \text{görbület} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\alpha}{P_0 P_1 \text{ (hossz)}}$$

Egyenes görbület $\circ \quad \forall$ pontban. Ha egy görbe $\forall$ pontban $\circ =$ görbület, akkor az egyenes.



A torác uggaras, csak a dimenzióval fejeződik.





Analisis. 2015. október 10. 2. korrekció

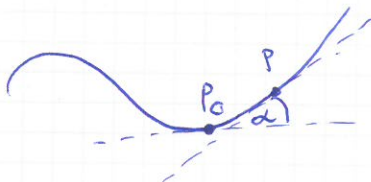
Vizsga: számológép használható.

Görbék:

Def.: Legyen P_0 a G görbe olyan pontja, hogy t_0 egy környezetben (vagy P_0 -hoz „elég közeli”) görbeponti pontokban $\vec{T}$ érintő. Ekkor a

$\lim_{t \rightarrow P_0} \frac{\alpha}{s}$ határértékét (ha $\vec{T}$) a görbe P_0 -beli görbület-

érintő reverszió, azaz $\alpha = P_0P$ ív hossza, α a P -beli és a P_0 -beli érintők szöge.



ilyen ez.

Def.: P_0 egy környezetében $\forall P$ pontra létezik érintő, és
A $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\beta}{s}$ határérték a görbe P_0 -beli torzióértéke.

Azaz s a P_0P ív hossza. β a P_0 -beli érintő és a P -beli érintők bezárt szöge.

torzió = +1. torzióérték, ha a binormális érintő az ívhossz szerinti deriváltja és az érintő egyenesen jobbra fordított állapot

-1. torzióérték, ha balra fordított állapot.

jelölés: $G(P_0)$ vagy $G(t_0)$, ha P_0 a t_0 paraméteres felírás görbék

$T(t_0)$

$\uparrow$
torzió



Tétel: Egy görbe akkor egyenes, ha $\forall$ pontban a görbülete nulla.

Egy görbe akkor síkgörbe, ha $\forall$ pontban κ a konstans.

Tétel: Ha $\exists$ 2 görbe, melyeknek a megfelelő param, pontjaiban a torsió és a görbület $=$, akkor a két görbe egybevágó.
eltolással és forgatással egymásba vihető.

~~Kisérlet~~ Kisérlet:

$$G(t_0) = \frac{|\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)|}{|\dot{r}(t_0)|^3}$$

$$T(t_0) = \frac{(\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)) \cdot (\ddot{\ddot{r}}(t_0))}{|\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)|^2}$$

} 19.

pl. $r(t) = 3 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} + 4t \underline{k}$

$$\dot{r}(t) = -3 \sin t \underline{i} + 3 \cos t \underline{j} + 4 \underline{k}$$

$$\ddot{r}(t) = -3 \cos t \underline{i} - 3 \sin t \underline{j}$$

$$\ddot{\ddot{r}}(t) = 3 \sin t \underline{i} - 3 \cos t \underline{j}$$

$$\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 \sin t & 3 \cos t & 4 \\ -3 \cos t & -3 \sin t & 0 \end{vmatrix} = \underline{i} (12 \sin t) - \underline{j} (12 \sin t) + \underline{k} (9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t)$$

$$= 12 \sin t \underline{i} - 12 \sin t \underline{j} + \underline{k} (9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t)$$

$$G(t) = \frac{|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)|}{|\dot{r}(t)|^3} = \frac{\sqrt{144 \sin^2 t + 144 \cos^2 t + 81}}{(\sqrt{9 + 16})^3} = \frac{\sqrt{144 + 81}}{(\sqrt{25})^3} =$$

$$= \frac{15}{125}$$

A csavarvonal görbülete tehát állandó.

②



$$T(t) = \frac{(\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)) \cdot \ddot{r}(t)}{|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)|^2} = \frac{36 \sin t + 36 \cos t + 0 \cdot 9}{(\sqrt{225})^2} =$$

$$= \frac{36}{225} \quad \text{a torzió is állandó. A csavargónál esetén.}$$

pl $r(t) = (t^3 + 4t) \underline{i} + (1+t) \underline{j} + (t^3 - 1) \underline{k}$

Síkgörbe-e?

Nem-e a torzió $\forall$ pontban?

Csak a szimulátort elég ábrázolni!
(a végén szemmel).

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= (3t^2 + 4) \underline{i} + 2 \underline{j} + 3t^2 \underline{k} \\ \ddot{r}(t) &= 6t \underline{i} + 6t \underline{k} \\ \ddot{r}(t) &= 6 \underline{i} + 6 \underline{k} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{r}(t) &= (3t^2 + 4) \underline{i} + 2 \underline{j} + 3t^2 \underline{k} \\ \ddot{r}(t) &= 6t \underline{i} + 6t \underline{k} \\ \ddot{r}(t) &= 6 \underline{i} + 6 \underline{k} \end{aligned}} \right\} \text{Nem befektetésünk be.}$$

$$\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t) = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3t^2 + 4 & 2 & 3t^2 \\ 6t & 0 & 6t \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot 12t - \underline{j} \cdot (3t^4 + 6t) + \underline{k} \cdot 12t = 12t \underline{i} - \underline{j} \cdot 24t - 12t \underline{k}$$

$$(\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)) \cdot \ddot{r}(t) = 6 \cdot 12t + 0 + 6 \cdot (-12t) = 0 \quad \text{Síkgörbe}$$

$\forall$ pontban 0 tehát a torzió $\rightarrow$ síkgörbe.

Liggesebb megoldás:

Sík általános egyenlete: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = D$

$$a, b, c, D \in \mathbb{R}$$

Síkgörbe-e? $\rightarrow \exists$ -e olyan számok, hogy

$$\textcircled{3}. \quad a \cdot (t^3 + 4t) + b \cdot (1+t) + c \cdot (t^3 - 1) = D \quad ?$$



Tehát egy szám legyen, essen ki minden t paraméter.

$$at^3 + 4at + b + 26t + ct^3 - c = \underbrace{(a+c)}_{0!} t^3 + \underbrace{(4a+26)}_{0! \text{ legyen}} t + (b-c)$$

$$a+c=0 \rightarrow \underline{a=-c}$$

$$4a+26=0$$

$$\text{pl: } \underline{A=1}, \underline{C=-1}$$

$$\underline{b=-2}$$

Tehát lenne van a síkban: $\boxed{x - 2y - z = -1}$

Ennyi:

Felületek:



$$3x - 2y + 5z = 2 \rightarrow \text{sík egyenlete}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{gömb, 0 középpont, 3 sugarú.}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0}$$

azaz a felület pálya, melyre teljesül az egyenlet.

x, y, z függvényül megadva.

$$\underline{F(x, y, z) = 0}$$

2. típus:

$$3x - 2y + 5z - 2 = 0$$

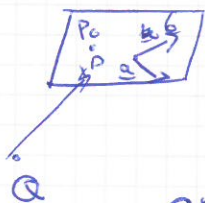
$$\boxed{z = \frac{-3x + 2y + 2}{5}}$$

~~$z = z$~~

$$z = z(x, y)$$

megadva, ahol $x, y \in \mathbb{I}$

z ki fejezhető x és y segítségével. ^(4.)



$$\underline{OP} = \underline{OP_0} + \underline{P_0P} = \underline{OP_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{addt}}}{u} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{addt}}}{a} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{addt}}}{v} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{addt}}}{b} =$$

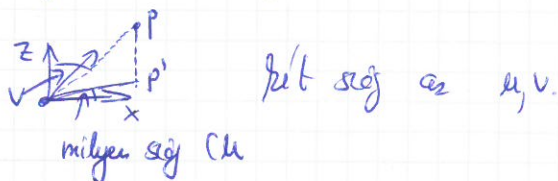
$\Rightarrow$ ez u -nek és v -nek a függvénye.
Kétparaméteres vektoregyenlet.

$r(u, v)$ a paraméteres vektoregyenlet.

$$r(u, v) = \dots \underline{j} + \dots \underline{i} + \dots \underline{k}$$

u, v a felület Gauss-féle paraméterei.

(pl.) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ paraméteres felírása. (általános térbeli polárkoordinátákra)



$$r(u, v) = 3 \sin v \cdot \cos u \cdot \underline{i} + 3 \cdot \sin v \cdot \sin u \cdot \underline{j} + 3 \cdot \cos v \cdot \underline{k}$$

$$0 \leq u < 2\pi$$

$$0 \leq v < \pi$$

(pl.) $x^2 + y^2 = z^2$ melyik típusú megadott?

1. típusú $F(x, y, z)$

$$\boxed{x^2 + y^2 - z^2 = 0}$$

"Mi ez?"
Nézzünk síkmetrészletet.

Metrészlet az xy -síkkal párhuzamos síkban (z konstans).

⑤



$$x^2 + y^2 = z$$

Ez egy kör.

Metszet el egy függőleges síkban! (xy-síkra merőleges síkban)



olyanul, ami átmenő az origón.

$$y = zx \rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + z^2 x^2 = (1+z^2)x^2 = z^2$$

$$x^2 = \frac{z^2}{1+z^2}$$

Ez tehát egy körkép:



sz.

$$z^2 = \pm \sqrt{1+z^2} \cdot x$$

↑
ez mi?
Eggyenes

pl. $x^2 + y^2 = z^2$ paraméteres vektoregyenlete. $r(u, v) = ?$

$$r(u, v) = v \cdot \cos u \cdot \underline{i} + v \cdot \sin u \cdot \underline{j} + v^2 \cdot \underline{k}$$

$$0 \leq u < 2\pi$$

pl. $x^2 + y^2 = z$ ez mikoroda.

xy-síkban párhuzamos metszet?

$$x^2 + y^2 = c = \text{egy kör.}$$

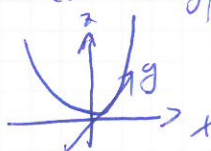
Origón átmenő, xy-síkra merőleges síkban való metszet.

$$\boxed{y = zx} \rightarrow x^2 + z^2 x^2 = z$$

$$x^2(1+z^2) = z$$

↑
parabola. ↪ megfigyeljük.

FORGÁSI PARABOLOID



6.



Parametres vektoregaleit:

$$r(u, v) = v \cdot \cos u \cdot \underline{i} + v \cdot \sin u \cdot \underline{j} + v^2 \cdot \underline{k}$$

$$0 \leq u < 2\pi$$

$$0 \leq v$$

Parciális deriváltak:

$r(u, v)$ esetén

r_u -val jelöljük

($\partial_u r$ is lehet)



u -szekci

r_v -val

($\partial_v r$)

Triviális dolog ez.

pl. $r(u, v) = (u + v^2) \underline{i} + uv^2 \underline{j} + (u - 3v) \underline{k}$

$$\partial_u r = r_u = \underline{i} + v^2 \underline{j} + \underline{k}$$

$$\partial_v r = r_v = 2v \underline{i} + 2uv \underline{j} + (-3) \underline{k}$$

pl. $r(u, v) = v \cdot \cos u \underline{i} + v \cdot \sin u \underline{j} + v^2 \underline{k}$

$$\partial_u r = r_u = -v \sin u \underline{i} + v \cos u \underline{j}$$

$$\partial_v r = r_v = \cos u \underline{i} + \sin u \underline{j} + 2v \underline{k}$$

Felület érintő síkjai: adott pontbeli.

Érintő sík alatt: F egy felület legyen, és legyen P_0 egy pontja.

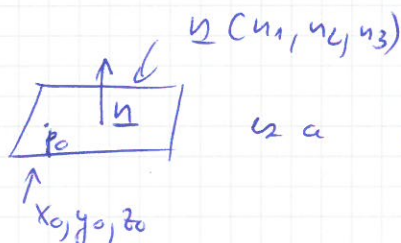
(f.h.: hogy $\exists$ 2 F -beli felületi gáze, melyek átmenet P_0 ponton és mindkét gáze P_0 -ban $\exists$ érintővonal, és ezek nem egybeesnek.

Vegyük ezen két vektor által meghatározott síket.

Ha $\forall P_0$ -an átmenő felületi görbék P_0 -beli érintője az S síkban van, akkor az S síket a felület P_0 -beli érintőjének reverszike.

Érintősík felírása:

Mi kell egy síkhoz.



és a két ddog kell.

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$$

a pont helyen, $\underline{n}$ a kérdés

3. esetben: $r(u,v)$ alakban adott felület (u_0, v_0) param. pontjában az

érintősík $\underline{n}$ -ja

$$\underline{n} = \partial_u r \times \partial_v r = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$$

2. esetben:

$$(z(x,y))$$

$$\underline{n} = (z'_x, z'_y, -1)$$

1. esetben:

$$F(x,y,z) = 0 \text{ alakú felület}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \text{-ban az } \underline{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$$

pl $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 2$ legyen.

érintősík az $(1, 1, 0)$ -ban.

$$F(x,y,z) = 0.$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2 = 0$$

Nincs DAJTA.

a pont rajta van a felületen? $\textcircled{8}$

$$1^2 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0 - 2 = 0$$

$$9 - 2 = 7 \neq 0$$



legen $(1, 2, -1)$: richtig van?

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 6 = 0 \text{ legen}$$

Aber richtig lese.

$$\left. \begin{aligned} \partial_x F = F'_x &= 2x + 2y + 2z \\ \partial_y F = F'_y &= 4y + 2x + 4z \\ \partial_z F = F'_z &= 6z + 2x + 4y \end{aligned} \right\}$$

$$\partial_x F(1, 2, -1) = 2 + 4 - 2 = \underline{4}$$

$$\partial_y F(1, 2, -1) = 8 + 2 - 4 = \underline{6}$$

$$\partial_z F(1, 2, -1) = -6 + 2 + 8 = \underline{4}$$

$$\ln(4, 6, 4)$$

$$P_0(1, 2, -1)$$

Innen es egal:

~~4(x-1)~~

$$4(x-1) + 6(y-2) + 4(z+1) = 0$$

$$4x - 4 + 6y - 12 + 4z + 4 = 0$$

$$4x + 6y + 4z - 12 = 0$$

② $z = y + \ln\left(\frac{x}{z}\right)$ einstecken $(1, 1, 1)$ - Gen

Else tippen:

$$y + \ln\left(\frac{x}{z}\right) - z = 0 = F(x, y, z)$$

$$F'_x =$$

$$F'_y =$$

$$F'_z =$$



$$z = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1,1,4) - \text{ben definiertes Rel.}$$

$z(x,y)$ tipisch success.

1+2 A pat ngbr von.

$$\left. \begin{aligned} z'_x &= 2x + 2y \\ z'_y &= 2x + 2y \end{aligned} \right\}$$

$$z'_x(1,1) = \underline{4}$$

$$z'_y(1,1) = \underline{4}$$

$$\underline{n(1,1,-1)} \text{ Lesr.}$$

$$\boxed{x_0 = 1 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 4}$$

$$4(x-1) + 4(y-1) - 1(z-4) = 0 \text{ Lesr.}$$

(pl) $r(u,v) = v \cos u \underline{i} + v \sin u \underline{j} + 3v \underline{k}$

$$u_0 = \frac{\pi}{2}, \quad v_0 = 1 \quad \text{param pathen}$$

$$r(u_0, v_0) = r\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 1 \cos \frac{\pi}{2} \underline{i} + 1 \sin \frac{\pi}{2} \underline{j} + 3 \underline{k} =$$

$$= \underline{j} + 3 \underline{k} \rightarrow (0, 1, 3) \text{ punkt.}$$

$$r_u = -v \sin u \underline{i} + v \cos u \underline{j}$$

$$r_v = \cos u \underline{i} + \sin u \underline{j} + 3 \underline{k}$$

$$r_u\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 1 \cdot -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \underline{i} + 1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \underline{j} = \underline{-i}$$

$$r_v\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \cos \frac{\pi}{2} \underline{i} + \sin \frac{\pi}{2} \underline{j} + 3 \underline{k} =$$

$$= \underline{j + 3k}$$

$$\underline{n} = r_u \times r_v = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{i}(0) + \underline{j}(-3) + \underline{k}(-1) =$$

$$= 0 \underline{i} - 3 \underline{j} - \underline{k} \quad \underline{n(0, 3, -1)}$$

(c)



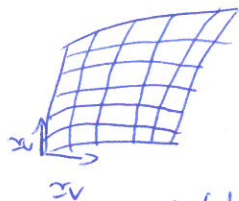
Einheitsk:

$$0(x-0) + 3(y-1) + (-1) \cdot (z-3) = 0$$

$$\boxed{3(y-1) - (z-3) = 0} \quad \text{bzw}$$

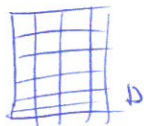
Felületek.

felületek felszínszámítása.



$r(u,v)$ -s alakban megadva, ahol $(u,v) \in D$

szabdalással közelíthetünk a
tégtelep felé.



Ha F felület az $r(u,v)$ paraméteres vetítségével van megadva, ahol

$(u,v) \in D$, akkor a felület

$$A = \iint_D |r'_u \times r'_v| \, du \, dv$$

$\uparrow$ párhuzamos deriváltak

pl

$$r(u,v) = u \cos v \cdot \underline{i} + u \sin v \cdot \underline{j} + u \cdot \underline{k}, \text{ ahol } u \in [0, 1]$$

$$v \in [0, \pi]$$

$$A = ?$$

segítség:

$$|r'_u \times r'_v| = \sqrt{(r'_u)^2 (r'_v)^2 - (r'_u \cdot r'_v)^2}$$

lgy-e.

$$\partial_u r = \cos v \cdot \underline{i} + \sin v \cdot \underline{j} + 1 \cdot \underline{k}$$

$$\partial_v r = u(-\sin v) \cdot \underline{i} + u \cos v \cdot \underline{j} + 0 \cdot \underline{k}$$

$$|\partial_u r|^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$|\partial_v r|^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2 (\underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_1) = u^2$$

$$(\partial_u r) \cdot (\partial_v r) = \cos v \cdot u \cdot (-\sin v) + \sin v \cdot u \cdot \cos v + 1 \cdot 0 = 0$$

$$|\partial_u r \times \partial_v r| = \sqrt{(\partial_u r)^2 \cdot (\partial_v r)^2 - (\partial_u r \cdot \partial_v r)^2} = \sqrt{2 \cdot u^2 - 0} = \sqrt{2} u \quad \leftarrow u \text{ nem negatív!}$$

$$A = \int_0^1 \int_0^\pi |\partial_u r \times \partial_v r| \, dv \, du = \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{2} u \, dv \, du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \left[\sqrt{2} u \cdot v \right]_0^{2\pi} du = \int_0^2 \left(\sqrt{2} u \cdot 2\pi - \underbrace{\sqrt{2} u \cdot 0}_0 \right) du = \\
 &= \int_0^2 \sqrt{2} u \cdot 2\pi du = \sqrt{2} \cdot 2\pi \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^2 = \sqrt{2} \pi (4) = \underline{\underline{4\sqrt{2} \pi}}
 \end{aligned}$$

vizsgán lesz ilyen. ennyi!

$\textcircled{p}$ $r(u, v) = u \mathbf{i} + 2u \cos v \mathbf{j} + 2u \sin v \mathbf{k}$ $u \in [0, 1]$
 $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\pi/2$
 $A = ?$

$$\partial_u r = u \mathbf{i} + 2 \cos v \mathbf{j} + 2 \sin v \mathbf{k}$$

$$\partial_v r = 0 \cdot \mathbf{i} + 2u(-\sin v) \mathbf{j} + 2u \cos v \mathbf{k}$$

$$(\partial_u r)^2 = u^2 + 4 \cos^2 v + 4 \sin^2 v = 4 + \underline{\underline{u^2}}$$

$$(\partial_v r)^2 = 4u^2 \sin^2 v + 4u^2 \cos^2 v = \underline{\underline{4u^2}}$$

$$(\partial_u r) \cdot (\partial_v r) = 2u \cdot 0 + 2u \cos v (-\sin v) + 4u \cos v \sin v = \underline{\underline{0}}$$

$$|(\partial_u r) \times (\partial_v r)| = \sqrt{(4 + u^2)(4u^2)} = 2u \sqrt{4u^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} |\partial_u r \times \partial_v r| dv du = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2u \sqrt{4u^2 + 4} dv du = \int_0^1 \left[2u \sqrt{4u^2 + 4} v \right]_0^{\pi/2} du = \\
 &= \int_0^1 2u \sqrt{4u^2 + 4} \pi du = \int_0^1 \pi u \sqrt{4u^2 + 4} du =
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 u \sqrt{4u^2+4} du = \pi \int_0^1 u \cdot \underbrace{(4u^2+4)}_f \cdot \underbrace{0.5}_L du = \frac{1}{8} \pi \int_0^1 8u \cdot (4u^2+4)^{0.5} du = \frac{\pi}{8} \left[\frac{(4u^2+4)^{1.5}}{1.5} \right]_0^1$$

!!! $\int f' \cdot f^a$ - alakú.

$\int = 8u$

$$= \frac{\pi}{8} \left(\frac{\sqrt{8^3}}{1.5} - \frac{\sqrt{4^3}}{1.5} \right) = \text{számológéppel}$$

2. Ha a felület máshogy van megadva?

$$z = z(x, y) \quad (x, y) \in D$$

akkor: $A = \iint_D \sqrt{(\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2 + 1} dx dy$

Ha $F(x, y, z)$ - alakú: $(x, y) \in D$

$$A = \iint_D \frac{1}{|F_z|} \cdot \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2} dx dy$$

(példa) $x^2 - 2yz = 0$

$0 \leq x \leq 1$

$1 \leq y \leq 2$

$F(x, y, z) = 0$

$$\partial_x F = 2x$$

$$\partial_y F = -2z$$

$$\partial_z F = -2y$$

$$A = \int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{|\partial_z F|} \cdot \sqrt{(\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2 + (\partial_z F)^2} dy dx =$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{2y} \cdot \sqrt{2x^2 + 4z^2 + 4y^2} dy dx =$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 \sqrt{\frac{4x^2}{4y^2} + \frac{4z^2}{4y^2} + \frac{4y^2}{4y^2}} dy dx = \int_0^1 \int_1^2 \sqrt{\frac{4x^2}{4y^2} + \frac{4z^2}{4y^2} + 1} dy dx =$$

=

egyszerűsítést:

$$x^2 - 2yz = 0$$

$$x^2 = 2yz \quad /y^2$$

$$\frac{2z}{y} = \frac{x^2}{y^2} \rightarrow \boxed{\frac{z}{y} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2}}$$

$$\dots = \int_0^1 \int_1^2 \underbrace{\left(\left(\frac{x^2}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{x^2}{y^2} \right)^2 + 1 \right)}_{\text{teljes négyzet}} dy dx =$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{y} \right)^2} dy dx = \int_0^1 \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{y} \right) dy dx$$

Bonyolult integrálra vezet

ennyi.

Világos csak $r(u,v)$ -s lesz!

vektor-vektor-függvények:

VEKTORMÉRŐ

(pl.) Erő megadása. Minden pontban irány és nagyság.

$$\underline{F}(\underline{x}) = \dots$$

Gyakorlatilag v-v-függvény lesz ez. $\boxed{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3}$

Def. Egy $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényt vektormérőnek nevezünk.

(pl.) $v(x,y,z) = x^2 \cdot \underline{i} + xy \underline{j} + (z-y) \cdot \underline{k}$

Def. A v mérő divergenciáján $(\nabla \cdot \underline{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ skaláris mennyiséget értjük.

$$\underline{v} = v_1(x,y,z) \cdot \underline{i} + v_2(x,y,z) \cdot \underline{j} + v_3(x,y,z) \cdot \underline{k}$$

pl. $V(x, y, z) = y^2 z \underline{i} + (y+z) \underline{j} + z^3 \underline{k}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial y^2 z}{\partial x} + \frac{\partial (y+z)}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = \underline{\underline{1 + 3z^2}}$$

Def: Ha a v vektormező $\nabla \cdot \vec{v} = \phi$, $\forall$ pontban, akkor $\vec{v}$ forrásmentes.

pl. Konstans sűrűségű áramlás (stacionárius áramlás)

$$\vec{V}(x, y, z) = 3 \underline{i} + 5 \underline{j} + 6 \underline{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \phi \text{ egyé.}$$

forrásmentes.

pl. gravitációs erő.

$$\vec{V}(x, y, z) = A \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \underline{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \underline{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \underline{k} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$$x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = 1 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2x =$$

ez azét megint megy...

$$\nabla \cdot \vec{v} = \phi \text{ egyébként!}$$

Adjuk meg egy forrás vektormezőt!

$$V(x, y, z) = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 3}$$

Def: A $v(x, y, z)$ vektor mező rotációja:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad \text{vektor.}$$

(pl) $v(x, y, z) = x^2 \underline{i} + (x^2 + y) \underline{j} + (y + 3xz) \underline{k}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & (x^2 + y) & (y + 3xz) \end{vmatrix} = \underline{i} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) - \underline{j} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \\ &\quad + \underline{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underline{i} (1 - 0) - \underline{j} (3z - 0) + \underline{k} (2x - 0) = \\ &= \underline{i} - 3z \underline{j} + 2x \underline{k} \end{aligned}$$

Def: A $\vec{v}$ vektormező irrotációs, ha $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$, azaz azonosan.

(pl) konstans sebességű áramlás (irrotációs)

Def: Egy $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (háromváltozós függvény) gradiense

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$u(x, y, z) = x^2 y + z^3 \quad \nabla u = (2xy, x^2 + 3z^2)$$

Delta-operátor:

Laplace-operátor

Itt kell.

integrál $\mu = \rho$ azonosan

Vizsgán: 1) $N(x, y, z) = (x^2y + y^3) \underline{i} + (x^3 - xy^2) \underline{j} + (z - 3x^2y) \underline{k}$

Forrásnevel-e?

Örvénynevel-e?

$$\nabla \cdot \bar{v} = 2xy + (-2xy) + 1 = \underline{1}$$

$$\nabla \times \bar{v} = \dots$$

Def.: Egy $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező az $\mu: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ~~vektor~~ skaláris

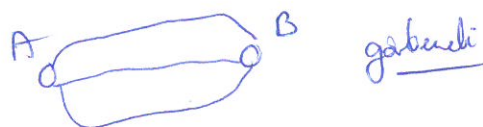
a potenciálfüggvénye, ha $\boxed{\nabla \mu = v}$

Nem mindig létezik ilyen.

$$v = \nabla \mu \quad / \nabla \times$$

$$\nabla \times v = \nabla \times (\nabla \mu) = \underline{0}$$

v rotációja nulla kell, hogy legyen!



2) $v = 2xy \underline{i} + 2yz^2 \underline{j} + (x^2 + 2yz - 1) \underline{k}$

Létezik-e potenciál függvénye. $\rightarrow \nabla \times \bar{v} = ? 0$

$$\nabla \times \bar{v} = \text{nem nulla.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yz^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xz^2 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2xyz \end{aligned} \right\}$$

potenciálhoz

FONTOS:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz^2 \quad u = \int yz^2 dx = \boxed{yz^2 x + C} \quad \begin{matrix} C(y, z) \\ \text{függvény is lehet.} \end{matrix}$$

↪ visszatérít a második egyenletbe.

$$\frac{\partial}{\partial y} (yz^2 x + C(y, z)) = xz^2$$

$$\cancel{xz^2} + \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = \cancel{xz^2}$$

$$\frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = 0$$

$$C(y, z) = \int 0 dy = D(z)$$

jelenleg

$$u = \boxed{xyz^2 + D(z)}$$

visszatérít a harmadik egyenletbe.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xyz$$

$$\cancel{2xyz} + \frac{\partial D}{\partial z} = \cancel{2xyz}$$

$$\frac{\partial D(z)}{\partial z} = 0 \rightarrow D = \int 0 dz = E$$

$$\boxed{u(x, y, z) = xyz^2 + E}$$

Görbementi integrálás

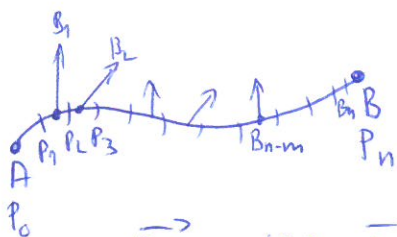
tfh: $\exists v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény (vektormező), és $\exists$ egy G térgörbe.
Számoljuk ki v -nek a G -n vett integrálját.

mi ez?

v erőter.

egy partikuláris test mozgás G görbe mentén.

Az integrál megadja az erőter által végzett munkát a testen.



$$\overrightarrow{P_0 P_1} \cdot v(B_1) + \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot v(B_2) + \dots + \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \cdot v(B_n)$$

mindenhol skalárszorzat van.

Milyen tart ez a közelítőösszeg? $\rightarrow$ a görbementi integrálhoz.Kiszámítása:

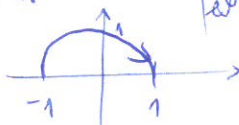
$\exists$ a G görbe paraméteresen megadva: $r(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$

$$\int_G v(r) dr = \int_{t_1}^{t_2} v(r(t)) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalárszorzat}}}{\dot{r}(t)} dt$$

Görbementi integrál kiszámítása:

- 1) görbe paraméterezése
- 2) $\dot{r}(t)$ felírása
- 3) $v(r(t))$ felírása
- 4) $v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)$ felírása
- 5) kiszámítás.

példák.

① xy-síkban:  $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$

$$\vec{v}(x, y, z) = x^2 \cdot \underline{i} + xy \cdot \underline{j} + \underline{z} \cdot \underline{k} \quad \int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = ?$$

1.) Parametrisés.

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\cos t}_{x} \cdot \underline{i} + \underbrace{\sin t}_{y} \cdot \underline{j} \quad \pi \geq t \geq 0$$

2.) $\dot{\vec{r}}(t) = -\sin t \cdot \underline{i} + \cos t \cdot \underline{j}$

3.) $\vec{v}(\vec{r}(t)) = \cos^3 t \cdot \underline{i} - \cos t \sin t \underline{j} + 0 \cdot \underline{k}$ ennyi.

4.) $\vec{v}(\vec{r}(t))$ és $\dot{\vec{r}}(t)$ szorzata

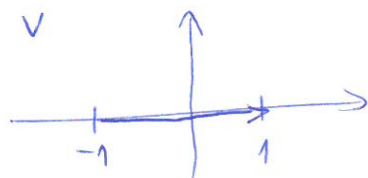
$$-\sin t \cos^3 t - \cos^2 t \sin t = -2 \cos^2 t \sin t \quad \int f' f^\alpha = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

5.) $\int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1=0}^{t_2=\pi} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{\pi}^0 -2 \sin \underbrace{\cos^3 t}_{f^\alpha} dt = +2 \int_{\pi}^0 -\sin t \cos^2 t dt =$

$$= +2 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_{\pi}^0 = +2 \left[\underbrace{\frac{\cos^3 0}{3}}_1 - \frac{\cos^3 \pi}{3} \right] = +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

$f' = -\sin t$

6.) $\int_G \vec{v} \cdot d\vec{r}$ a $\vec{v}$



$$\int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt =$$

$$= \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right] = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$$\int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = ?$$

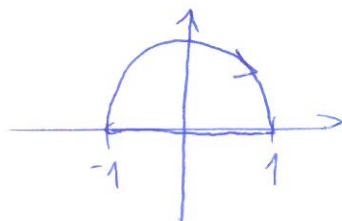
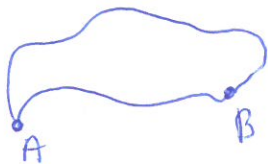
1.) $\vec{r}(t) = \underbrace{t}_{x} \cdot \underline{i} \quad -1 \leq t \leq 1$

2.) $\dot{\vec{r}}(t) = \underline{i}$

3.) $\vec{v}(\vec{r}(t)) = t^2 \underline{i}$

4.) $\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = t^2 \cdot 1 = \underline{\underline{t^2}}$

általában az integrál értéke függ az úttól.



általában nem nulla.

a vektor szuperpozíciója lesz,
nem nulla.

$$\int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$$

pl) $v(x, y, z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$

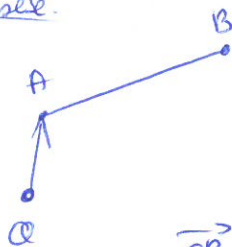
görbe az AB - szakasz

$A(1, 2, 4); B(2, 4, 0)$ pont.



$$\int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = ?$$

1. lépés: paraméterezés.



$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB} \quad 0 \leq t \leq 1$$

t mindig 0 és 1 között van.

$$\vec{AB} (1, 2, -4)$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{(1+t)}_x \cdot \vec{i} + \underbrace{(2+2t)}_y \cdot \vec{j} + \underbrace{(4-4t)}_z \cdot \vec{k} \quad 0 \leq t \leq 1$$

1.) $\dot{\vec{r}}(t) = 1 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

3.) $\vec{v}(\vec{r}(t)) =$

$$= (2+2t)(4-4t) \cdot \vec{i} + (1+t)(4-4t) \cdot \vec{j} + (2+4t)(4-4t) \cdot \vec{k}$$

$$= (8-8t^2) \cdot \vec{i} + (4-4t^2) \cdot \vec{j} + (8-8t^2) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (8-8t^2) \cdot 1 + (4-4t^2) \cdot 2 + (8-8t^2) \cdot (-4)$$

$$= 8 - 8t^2 + 8 - 8t^2 - 32t = 16t^2 - 16$$

$$5.) \int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt = \int_0^1 (16t^2 - 16) dt = \left[\frac{16t^3}{3} - 16t \right]_0^1 =$$

$$= \frac{16 \cdot 1^3}{3} - 16 - (0) = \frac{16}{3} - 16 = \frac{16}{3} - \frac{48}{3}$$

Tétel: Ha $\vec{v}$ örvénymentes ($\text{rot } \vec{v} \equiv 0$), akkor egy A-ból B-be menő görbementi integrál független a körlekedési úttól.

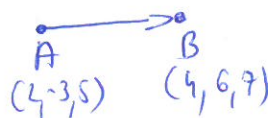


Ha $\text{rot } \vec{v} \equiv 0$, akkor $\oint_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0!$

Lehet skáláros potenciál függvénygel. ($\text{grad } u = \vec{v}$)

ilyenkor $\int_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = u(b) - u(a)!$ Logikus.

pl) $\vec{v}(x, y, z) = yz \underline{i} + xz \underline{j} + xy \underline{k}$



Örvénymentes-e?

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = \underline{i} (x - x) - \underline{j} (y - y) + \underline{k} (z - z) \equiv 0!$$

$\vec{v}$ örvénymentes. van potenciál függvény.

$u = xyz$ ez egy potenciál függvény

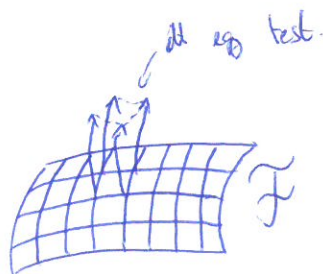
$$\int_G \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = u(B) - u(A) = \underline{\underline{4 \cdot 6 \cdot 7 - 30}}$$

dt integrál.

Adott egy $\tilde{F}$ felület és egy $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, ami értelmezett $\tilde{F}$ $\forall$ pontjában.

Mi ez az integrál. a fluxus. áthaladó erővonalak száma.

áthaladó mennyiség is lehet.



a felület mindig irányított: $\forall$ pontban megadjuk, hogy $\vec{n}$ a felületen milyen irányú.

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ -vel vagy $-\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ -vel.

felírja:
$$\int_{\tilde{F}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$$

Standard: Ha $\tilde{F}$ $\vec{r}(u,v)$ -vel adott, ahol $(u,v) \in D$,

akkor:
$$\int_{\tilde{F}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \iint_D \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

Ha a felület $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ -vel van irányítva!

Hogyan kell? :

- 1.) Felület paraméterezése;
- 2.) $\vec{r}_u$ és $\vec{r}_v$ felírása;
- 3.) $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ kiszámítása;
- 4.) $\vec{v}(\vec{r}(u,v))$ felírása; majd $\vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$ elvégzése
- 5.) És lehet a bulizás az integrálással.

ennél is több.

(pl)

$$\vec{v}(\vec{r}) = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$$

$$\mathcal{F}: \vec{r}(u, v) = \underbrace{u \cos v}_{x} \vec{i} + \underbrace{u \sin v}_{y} \vec{j} + \underbrace{2u}_{z} \vec{k},$$

$$0 \leq u \leq 1$$

$$0 \leq v \leq \pi/2$$



$$2) \quad \vec{r}_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}$$

$$\vec{r}_v = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j}$$

✓ ~~Stell dir~~
~~vor~~

$$3) \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{pmatrix} \sin v \cdot 0 - u \cdot \cos v \cdot 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \vec{j} \begin{pmatrix} \cos v \cdot 0 + u \cdot \sin v \cdot 0 \end{pmatrix} + \vec{k} (u \cos^2 v + u \sin^2 v) = \underline{\underline{u \cdot \vec{k}}}$$

$$4) \quad \vec{v}(\vec{r}(u, v)) = u^2 \cos v \sin v \vec{i} + 2u \cos v \vec{j} + 2u \sin v \vec{k}$$

$$5.) \quad \vec{v}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \underline{2u^2 \sin v}$$

$$6.) \quad \int_F \vec{v}(\vec{r}) dF = \iint_D \vec{v}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2u^2 \sin v dv du =$$

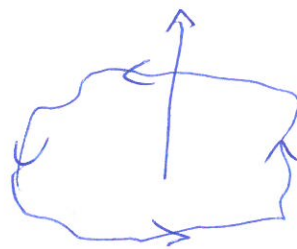
$$= \int_0^1 [2u - \cos v]_0^{\pi/2} du = \int_0^1 \left(2u^2 - \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + 2u^2 \right) du =$$

$$= \int_0^1 2u^2 du = \left[\frac{2u^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

problátaladó tétel:

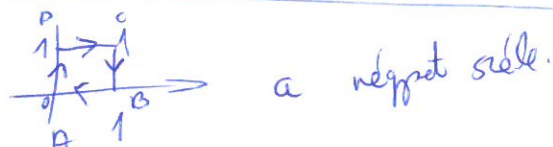
Stokes-tétel: Legyen $\tilde{F}$ egyszerűen összefüggő felület. Ami azt is, és G azt görbe határolja. A felület elg van irányítva, hogy ha a felületi normálvektor irányából visszaneve a felületre G irányítása ellentétes az óramutató járásával.

$$\oint_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{F}} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{F}$$



Ha $\nabla \times \vec{v} = 0$, akkor $\oint_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0!$

⊗ $\vec{v}(\vec{r}) = x^2 \vec{j}$ és $G =$ az xy -síkban



Stokes-tétellel:

$$\oint_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{F}} \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$$

$\tilde{F}$: négyzetlap.

1.) $\vec{r}(u,v) = \underbrace{u}_{\vec{w}_x} \cdot \underline{i} + \underbrace{v}_{\vec{w}_y} \cdot \underline{j}$

$$0 \leq u \leq 1$$

$$0 \leq v \leq 1$$

2.) $\vec{r}_u = \underline{i}$
 $\vec{r}_v = \underline{j}$

3.) $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{k}$

4.) $\vec{v}(\vec{r}(u,v)) = u^2 \underline{j}$

5.) $\vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \underline{0}$

$$\oint_G \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{F}} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int_0^1 \int_0^1$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(u,v)) =$$

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i} (0) - \underline{j} (0) + \underline{k} (2x) = 2x \underline{k}$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(u,v)) = 2u \underline{k}$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \underline{\underline{2u}}$$

$$5.) \oint_{\tilde{F}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{F}} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int_0^1 \int_0^1 2u \, du \, dv$$

$$\int_0^1 [2uv]_0^1 \, dv = \int_0^1 2u \, du = \left[\frac{2u^2}{2} \right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

Gauss- Osztrógradstrij- tétel:

Legyen a V tartomány zárt, határfelület $\tilde{F}$ felület. Ekkor

$$\oint_{\tilde{F}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV$$

Ha $\vec{v}(\vec{r})$ forrásmentes V minden pontjában:

$$\oint_{\tilde{F}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0!$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = (x-y+z)\vec{i} + (y+2z)\vec{j} + (x^2-y^2)\vec{k}$$

legyen $\vec{F}$ egy téglalaprés.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ 2 \leq z \leq 6 \end{array} \right\}$$

détel van
negatívossá-

$$\oint_{\vec{F}} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = ?$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) dV \text{ - t kell számolni.}$$

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = 1 + \cancel{1} + 0 = \underline{\underline{2}} + 1 = \underline{\underline{3}}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) dV = \int_0^4 \int_1^3 \int_2^6 3 dz dy dx = \int_0^4 \int_1^3 \underbrace{[3z]_2^6}_{18-6=12} dy dx = \int_0^4 \underbrace{[12y]_1^3}_{36-12=24} dx = \underbrace{[24x]_0^4}_{24 \cdot 4 = 96}$$