

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

A SZÁMFOGALOM FELÉPÍTÉSE, NEGYEDIK HÁZI FELADAT

1.) Mi a legrövidebb periódushossza a racionális számok tizedestört-alakjának?

Megoldás:

Először kimondjuk a szükséges tételt, majd be is bizonyítjuk azt.

1. Tétel. Az $1/n$ -alakú törtek tizedestört-alakjának minimális periódushossza $n - 1$ akkor és csak akkor, ha 10 primitív gyök modulo n . Az ilyen törtek minimális periódushossza legfeljebb $n - 1$. Ez a periódushossz $n - 1$ akkor és csak akkor, ha n prím.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $1/n$ tizedestört-alakja periodikus úgy, hogy a periódushossza $n - 1$. Ekkor:

$$\frac{1}{n} = 0, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdots$$

Megszorozva ezt az egyenletet rendre $10, 10^2, 10^3, \dots$ számokkal azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{10}{n} &= a_1, a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} \cdots, \\ \frac{10^2}{n} &= a_1 a_2, a_3 \cdots a_{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdots, \\ &\vdots \\ \frac{10^{n-1}}{n} &= a_1 a_2 \cdots a_{n-1}, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdots = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mivel $10^i/n$ tizedestört-része különböző, ha $i < n - 1$, ezért 10^{n-1} az első a fenti hatványok közül, amely n -nel osztva 1 maradékot ad. Eszerint 10 rendje $n - 1$, ezért primitív gyök modulo n .

Tehát ha 10 rendje $n - 1$ a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ multiplikatív csoportban, akkor n prím. Ez következik az Euler-Fermat-tételből, amely szerint $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ bármely elemének rendje legfeljebb $\varphi(n)$. Az Euler-féle φ -függvény definíciója alapján világos, hogy $\varphi(n) \leq n - 1$, egyenlőség pedig csak akkor áll fenn, ha n prím.

Azt kell még megmutatni, hogy $1/n$ tizedestört-alakja periodikus $n - 1$ periódushossz mellett akkor, ha 10 rendje $n - 1$. Mivel 10 rendje $n - 1$, ezért 10^{n-1} n -el osztva 1 maradékot ad, tehát

$$\frac{10^{n-1}}{n} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad (\text{E}_1)$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ az $1/n$ tizedestört első $n - 1$ számjegye. Elosztva mindkét oldalt 10^{n-1} -el azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} = 0, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdots, \quad (\text{E}_2)$$

amelyből még nem világos, hogy milyen számjegyek jelennek meg az első $2(n - 1)$ számjegy után. Újra és újra behelyettesítve (E_2) -t (E_1) -be, és elosztva azt 10^{n-1} -el azt kapjuk, hogy

az $1/n$ tizedestört-alakjában rendre az $a_1a_2\cdots a_{n-1}$ számjegyek ismétlődnek. Ennek a sorozatnak a hossza definiálja tehát a periódushosszt, ami így $n-1$. Ha lenne egy rövidebb k periódus, akkor 10 rendje $k < n-1$ lenne, ami ellentétes a kezdeti megfontolásunkkal. $\square$