

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

A SZÁMFOGALOM FELÉPÍTÉSE, HARMADIK HÁZI FELADAT

1.) (? pont) A jegyzet 8.7. Tétele szerint a komplex számok teste beágyazható a 2×2 -es valós mátrixok gyűrűjébe, Igazolja, hogy a hiperkomplex számok, illetve Study-féle számok gyűrűje is beágyazható a 2×2 -es mátrixok gyűrűjébe.

Megoldás:

A megoldáshoz kimondunk két tételt, majd bizonyítjuk is őket.

1. Definíció. A hiperbolikus komplex számok (hiperkomplex számok) olyan $a + bj$ alakú formális kifejezések, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, a j szimbólumra pedig igaz, hogy $j^2 = -1$. Az összeadást és a szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j,$$

$$(a + bj) \cdot (c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j,$$

1. Tétel. A hiperkomplex számok beágyazhatók a 2×2 -es mátrixok gyűrűjébe.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok részgyűrűt alkotnak az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixgyűrűben. A továbbiakban azt bizonyítjuk, hogy ez a részgyűrű izomorf a hiperkomplex számok gyűrűjével. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\varphi: a + bj \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy φ izomorfizmus. Az világos, hogy φ kölcsönösen egyértelmű ráképezés, azaz bijekció. Egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy φ felcserélhető az összeadással:

$$\begin{aligned} ((a + bj) + (c + dj)) \varphi &= ((a + c) + (b + d)j) \varphi = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = (a + bj) \varphi + (c + dj) \varphi. \end{aligned}$$

Végül megmutatjuk, hogy φ felcserélhető a szorzással is:

$$\begin{aligned} ((a + bj) \cdot (c + dj)) \varphi &= ((ac - bd) + (ad + bc)j) \varphi = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = (a + bj) \varphi \cdot (c + dj) \varphi. \end{aligned}$$

Mivel φ bijektív, továbbá felcserélhető az összeadással és a szorzással is, ezért izomorfizmus. $\square$

2. Definíció. A *Study-féle számok* (parabolikus komplex számok) olyan $a+b\varepsilon$ alakú formális kifejezések, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, az ε szimbólumra pedig igaz, hogy $\varepsilon^2 = 0$. Az összeadást és a szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon,$$

$$(a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon,$$

2. Tétel. A *Study-féle számok* beágyazhatók a 2×2 -es mátrixok gyűrűjébe.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok részgyűrűt alkotnak az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixgyűrűben. A továbbiakban azt bizonyítjuk, hogy ez a részgyűrű izomorf a Study-féle számok gyűrűjével. Az izomorfizmust az alábbi leképezés szolgáltatja:

$$\varphi: a + b\varepsilon \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy φ izomorfizmus. Az világos, hogy φ kölcsönösen egyértelmű ráképezés, azaz bijekció. Egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy φ felcserélhető az összeadással:

$$\begin{aligned} ((a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon)) \varphi &= ((a + c) + (b + d)\varepsilon) \varphi = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ 0 & a + c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a + b\varepsilon) \varphi + (c + d\varepsilon) \varphi. \end{aligned}$$

Végül megmutatjuk, hogy φ felcserélhető a szorzással is:

$$\begin{aligned} ((a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon)) \varphi &= (ac + (ad + bc)\varepsilon) \varphi = \begin{pmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a + b\varepsilon) \varphi \cdot (c + d\varepsilon) \varphi. \end{aligned}$$

Mivel φ bijektív, továbbá felcserélhető az összeadással és a szorzással is, ezért izomorfizmus. $\square$

Ezzel a feladat kész.

2.) (? pont) A jegyzet 8.8. Tétele szerint a komplex számok teste izomorf a valós polinomgyűrű egy faktorgyűrűjével. Igazolja, hogy a hiperkomplex számok, illetve Study-féle számok gyűrűje is izomorf a valós polinomgyűrű egy faktorgyűrűjével.

Megoldás:

Ismét kimondunk két tételt, majd bebizonyítjuk azokat.

3. Tétel. A hiperkomplex számok gyűrűje izomorf az $\mathbb{R}[x] / (x^2 - 1)$ faktorgyűrűvel.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\mathbb{R}[x]$ -ben az

$$I = \{(x^2 - 1)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

halmaz ideált alkot. Ezt az állítást mi most nem bizonyítjuk. Tekintsük a

$$\varphi: a + bj \mapsto \overline{a + bx}$$

leképezést, és vegyük észre, hogy

$$\overline{x^2} = \overline{x^2} = \overline{x^2 - 1 + 1} = \overline{0} + 1 = 1.$$

Ha $(a + bj) \varphi = (c + dj) \varphi$, akkor $\overline{a + bx} = \overline{c + dx}$. Ezért

$$\overline{(a - c) + (b - d)x} = \overline{a + bx} - \overline{c + dx} = \overline{0} = I,$$

ezért $(a - c) + (b - d)x \in I$. Ebből következik, hogy az $(a - c) + (b - d)x$ elsőfokú polinom az $x^2 - 1$ polinom többszöröse, ami csak úgy teljesülhet, ha zérus polinom, azaz $a = c$ és $b = d$. Ezért φ injektív.

Ha $\overline{f} \in \mathbb{R}[x] / (x^2 - 1)$, akkor létezik olyan $q, r \in \mathbb{R}[x]$, hogy $f = (x^2 - 1)q + r$, ahol r legfeljebb elsőfokú polinom, tehát $r = a + bx$ valamely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor

$$\overline{f} = \overline{(x^2 - 1)q + r} = \overline{x^2 - 1} \cdot \overline{q} + \overline{r} = \overline{0} \cdot \overline{q} + \overline{r} = \overline{r} = \overline{a + bx} = (a + bj) \varphi.$$

Ezzel beláttuk, hogy φ szürjektív is, tehát φ bijekció.

Végül azt is megmutatjuk, hogy φ felcserélhető a műveletekkel:

$$\begin{aligned} ((a + bj) + (c + dj)) \varphi &= ((a + c) + (b + d)j) \varphi = \overline{(a + c) + (b + d)x} = \\ &= \overline{(a + bx) + (c + dx)} = \overline{a + bx} + \overline{c + dx} = (a + bj) \varphi + (c + dj) \varphi. \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el a szorzás esetén is:

$$\begin{aligned} ((a + bj) \cdot (c + dj)) \varphi &= ((ac + bd) + (ad + bc)j) \varphi = \overline{(ac + bd) + (ad + bc)x} = \\ &= \overline{(ac + bdx^2) + (ad + bc)x} = \overline{(a + bx) \cdot (c + dx)} = \overline{(a + bx)} \cdot \overline{(c + dx)} = \\ &= (a + bj) \varphi \cdot (c + dj) \varphi. \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy φ izomorfizmus, ezzel a bizonyítás kész. □

4. Tétel. *A Study-féle számok gyűrűje izomorf az $\mathbb{R}[x] / (x^2)$ faktorgyűrűvel.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\mathbb{R}[x]$ -ben az

$$I = \{(x^2)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

halmaz ideált alkot. Ezt az állítást mi most nem bizonyítjuk. Tekintsük a

$$\varphi: a + b\varepsilon \mapsto \overline{a + bx}$$

leképezést, és vegyük észre, hogy

$$\overline{x^2} = \overline{x^2} = \overline{0} = 0.$$

Ha $(a + b\varepsilon) \varphi = (c + d\varepsilon) \varphi$, akkor $\overline{a + bx} = \overline{c + dx}$. Ezért

$$\overline{(a - c) + (b - d)x} = \overline{a + bx} - \overline{c + dx} = \overline{0} = I,$$

ezért $(a - c) + (b - d)x \in I$. Ebből következik, hogy az $(a - c) + (b - d)x$ elsőfokú polinom az x^2 polinom többszöröse, ami csak úgy teljesülhet, ha zérus polinom, azaz $a = c$ és $b = d$. Ezért φ injektív.

Ha $\bar{f} \in \mathbb{R}[x]/(x^2)$, akkor létezik olyan $q, r \in \mathbb{R}[x]$, hogy $f = (x^2)q + r$, ahol r legfeljebb elsőfokú polinom, tehát $r = a + bx$ valamely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor

$$\bar{f} = \overline{(x^2)q + r} = \overline{x^2} \cdot \bar{q} + \bar{r} = \bar{0} \cdot \bar{q} + \bar{r} = \bar{r} = \overline{a + bx} = (a + b\varepsilon) \varphi.$$

Ezzel beláttuk, hogy φ szürjektív is, tehát φ bijekció.

Végül azt is megmutatjuk, hogy φ felcserélhető a műveletekkel:

$$\begin{aligned} ((a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon)) \varphi &= ((a + c) + (b + d)\varepsilon) \varphi = \overline{(a + c) + (b + d)x} = \\ &= \overline{(a + bx) + (c + dx)} = \overline{a + bx} + \overline{c + dx} = (a + b\varepsilon) \varphi + (c + d\varepsilon) \varphi. \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el a szorzás esetén is:

$$\begin{aligned} ((a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon)) \varphi &= (ac + (ad + bc)\varepsilon) \varphi = \overline{ac + (ad + bc)x} = \\ &= \overline{(ac + bdx^2) + (ad + bc)x} = \overline{(a + bx) \cdot (c + dx)} = \overline{(a + bx)} \cdot \overline{(c + dx)} = \\ &= (a + b\varepsilon) \varphi \cdot (c + d\varepsilon) \varphi. \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy φ izomorfizmus, ezzel a bizonyítás kész. □