

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

A SZÁMFOGALOM FELÉPÍTÉSE, MÁSODIK HÁZI FELADAT

1.) (5 pont) Igazolja, hogy a valós számsorozatok $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}; +, \cdot)$ részbenrendezett gyűrűjét tekintve a

$$P = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : f(n) \geq 0 \text{ minden } n \in \mathbf{N}\text{-re, és } f \in S\}$$

halmaz pozitivitási tartomány, ha S a korlátos sorozatok halmaza, vagy a konvergens sorozatok halmaza, vagy azoknak a sorozatoknak a halmaza, melyeknek véges sok nullától különböző tagja van, vagy a sorozatok bármely olyan halmaza, mely tartalmazza a nullát, és zárt az összeadásra és a szorzásra.

Megoldás:

Tekintsük a valós számsorozatok $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}; +, \cdot)$ részbenrendezett gyűrűjét, ahol $+$ és $\cdot$ műveletek a valós számsorozatokon értelmezett klasszikus összeadást és szorzást jelölik. Tudjuk továbbá, $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény minden $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ esetén, valamint $0 = (0, 0, 0, \dots) = (0)_{n \in \mathbf{N}}$ és $1 = (1, 1, 1, \dots) = (1)_{n \in \mathbf{N}}$.

Először jelölje S a korlátos sorozatok halmazát. Ekkor bármely $f \in S$ esetén léteznek olyan k és K valós számok, hogy $k \leq f(n)$ és $K \geq f(n)$ bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén. Azonnal látszik, hogy $0 \in P$, hiszen $0 \in S$ bármely $0 \leq k$ és $0 \leq K$ esetén, továbbá a részbenrendezés definíciója miatt $0 \leq 0$.

Most tegyük fel, hogy $a \in P$ és $-a \in P$, de $a \neq 0$. P definíciója miatt $0 \leq a(n)$, valamint $0 \leq -a(n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ -re. Mivel $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}; +)$ részbenrendezett csoport $\leq$ -re nézve, ezért $0 \leq -a(n)$ -ből

$$\underbrace{0 + a(n)}_{a(n)} \leq \underbrace{-a(n) + a(n)}_0$$

következik minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel a részbenrendezés antiszimmetrikus, ezért $a(n) \leq 0$ -ból és $0 \leq a(n)$ -ből $a(n) = 0$ következik minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $a = 0$, ami ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy $a, b \in P$. Ekkor $0 \leq a(n)$ és $0 \leq b(n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen $c(n) = a(n) + b(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Felhasználva a közismert tételt, amely szerint korlátos sorozatok összege is korlátos, kijelenthetjük, hogy a c sorozat korlátos.

Azt kell még belátnunk, hogy $0 \leq a(n) + b(n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel $0 \leq a(n)$, ezért $\underbrace{0 + b(n)}_{b(n)} \leq a(n) + b(n)$, és hasonlóan, $0 \leq b(n)$ miatt $\underbrace{0 + a(n)}_{a(n)} \leq a(n) + b(n)$

írható fel minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. A részbenrendezés tranzitivitása miatt $0 \leq a(n)$ és $a(n) \leq a(n) + b(n)$ implikálja, hogy $0 \leq a(n) + b(n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért $a + b \in P$.

A negyedik tulajdonság igazolásához ismét tegyük fel, hogy $a, b \in P$. Ekkor $0 \leq a(n)$ és $0 \leq b(n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen $c(n) = a(n) \cdot b(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Mivel korlátos sorozatok szorzata is korlátos, kijelenthetjük, hogy a c sorozat korlátos.

Most azt kell belátnunk, hogy $0 \leq a(n) \cdot b(n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel $0 \leq a(n)$ és $0 \leq b(n)$, ezért $\underbrace{0 \cdot b(n)}_0 \leq a(n) \cdot b(n)$, ezért $a \cdot b \in P$.

Jelölje most S a konvergens sorozatok halmazát. Ekkor $0 \in P$ triviálisan teljesül, hiszen a konstans nulla sorozat konvergens (határértéke 0), ezért $0 \in S$, valamint $\leq$ reflexivitása miatt $0 \leq 0$.

A második tulajdonság bizonyítása az előzőekben ismertetett módon történik. A harmadik és a negyedik tulajdonság bizonyítása is teljesen hasonló, azzal a különbséggel, hogy a konvergens sorozatokra vonatkozó tételket szükséges felhasználni. Ezek szerint konvergens sorozatok összege és szorzata is konvergens.

Ha S a véges sok nullától különböző taggal rendelkező sorozatok halmaza, a bizonyítás ugyanígy történik. Az világos, hogy $0 \in S$, ezért az első tulajdonság a korábban ismertetetteknek megfelelően teljesül. A harmadik és a negyedik tulajdonság igazolásához csak annyit kell megmutatnunk, hogy ha $a, b \in S$, akkor $a + b \in S$ és $a \cdot b \in S$. Vegyük észre, hogy tulajdonképpen itt S zártóságát bizonyítjuk erre a speciális esetre.

Legyen $a \in S$ olyan, hogy m darab nullától különböző tagja van, míg $b \in S$ olyan, hogy a nullától különböző tagok száma l . Ekkor $a + b$ -nek legfeljebb $m + l$ nullától különböző tagja lesz. Ez véges, ezért $a + b \in S$. Szorzatuk esetén gondoljuk meg, hogy a nullától különböző tagok számra legfeljebb $\min\{m, l\}$. Világos, hogy ez is véges, ezért $a \cdot b \in S$, S tehát zárt az összeadásra és a szorzásra.

Ezek alapján világos, hogy a bizonyítás első részében megmutatottakon túl kizárólag S zártóságát kell megkövetelni $0 \in S$ mellett ahhoz, hogy P pozitivitási tartomány legyen. $\square$

2.) (5 pont) Igazolja, hogy a komplex számok testének nincs lineáris rendezése, majd adja meg egy részbenrendezését. (A pozitivitási tartomány megtalálása igazából a feladat.)

Megoldás:

Jelölje $(\mathbf{C}; +, \cdot)$ a komplex számok testét. Tekintettel arra, hogy a testek integritástartományok, alkalmazható a jegyzet 2.13. Tétele. A tétel szerint a $(\mathbf{C}; +, \cdot)$ integritástartománynak akkor és csak akkor van lineáris rendezése, ha bármely $z_1, \dots, z_m \in \mathbf{C}$ esetén $z_1^2 + \dots + z_m^2 = 0$ -ból $z_1 = \dots = z_m = 0$ következik.

Legyen $z_1 = 1$ és $z_2 = i$. Ekkor $z_1^2 + z_2^2 = 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$, ezért $\mathbf{C}$ -nek nincsen lineáris rendezése.

Bár a komplex számok testének nincsen lineáris rendezése, megadható egy részbenrendezése. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy

$$\forall (a + bi), (c + di) \in \mathbf{C} \text{ esetén } (a + bi) \preceq (c + di) \iff a \leq c \text{ és } b \leq d$$

esetén $\preceq$ egy részbenrendezése $\mathbf{C}$ -nek.

Először megmutatjuk, hogy $(\mathbf{C}; +)$ részbenrendezett csoport $\preceq$ -re nézve. Legyen $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ és $z_3 = e + fi$, ahol a, b, c, d, e, f valósak. Azt kell ellenőriznünk, hogy tetszőleges $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ esetén $z_1 \preceq z_2$ -ből $z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3$ következik:

$$z_1 \preceq z_2 \iff (a + bi) \preceq (c + di) \iff a \leq c \text{ és } b \leq d,$$

$$z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3 \iff (a + e) + (b + f)i \preceq (c + e) + (d + f)i \iff a + e \leq c + e \text{ és } b + f \leq d + f.$$

Végül megmutatjuk, hogy bármely $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ esetén, ha $z_1 \preceq z_2$ és $0 \prec z_3$, akkor $z_1 z_3 \preceq z_2 z_3$:

$$z_1 \preceq z_2 \iff (a + bi) \preceq (c + di) \iff a \leq c \text{ és } b \leq d,$$

$$0 \preceq z_3 \iff (0 + 0i) \preceq (e + fi) \iff 0 < e \text{ és } 0 < f,$$

$$z_1 z_3 \preceq z_2 z_3 \iff (ae - bf) + (af + eb)i \preceq (ce - df) + (de + cf)i,$$

akkor és csak akkor, ha

$$(ae - bf) \leq (ce - df) \text{ és } (af + eb) \leq (de + cf).$$

A pozitivitási tartomány megtalálásához induljunk ki a definícióból:

$$P = \{z \in \mathbf{C}: 0 \preceq z\}.$$

Világos, hogy P -t azon $z = a + bi$, $z \in \mathbf{C}$ komplex számok alkotják, melyekre $0 \leq a$ és $0 \leq b$:

$$P = \{z = a + bi, z \in \mathbf{C}: 0 \leq a \text{ és } 0 \leq b\} . \square$$

(Korrekcio: a fenti feladatmegoldás hibás. Az olvasó fontolja meg, hogy a megadott pozitívítási tartomány miért nem elégíti ki P zártóságának feltételét. Adjon rá egy példát!)

3.) (5 pont) Az 5. feladat hibás, mert nem (lineáris) rendezést adtam meg. Sőt, az elnevezés is hibás. Találja meg a lexikografikus rendezés pozitívítási tartományát.

Megoldás:

Tekintsük a valós számsorozatok $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}; +)$ additív csoportját, és a $\preceq$ reláció definiáljon lexikografikus rendezést $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ -en. Legyen $f, g \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy f lexikografikusan kisebb g -nél ($f \preceq g$), ha az első olyan $j \in \mathbf{N}$ esetén, ahol f és g eltérnek, $f(j) < g(j)$.

Jelölje P a lexikografikus rendezés pozitívítási tartományát. Világos, hogy itt $0 = (0, 0, 0, \dots)$, továbbá $0 \in P$. A pozitívítási tartomány definíciója szerint

$$P = \{a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}: 0 \preceq a\}.$$

Az eddigiek alapján P definíciója a következő lehetne:

$$P = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}: f = 0, \text{ vagy } f: \exists j \in \mathbf{N} \text{ úgy, hogy } 0 < f(j) \text{ és } \forall k < j, k \in \mathbf{N}, f(k) = 0\} . \square$$