

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

A SZÁMFOGALOM FELÉPÍTÉSE, ELSŐ HÁZI FELADAT

1.) (5+5 pont) Legyen $(\mathbb{N};', 0)$ a természetes számok halmazának egy modellje, és jelöljük $\mathbb{N}$ elemeit a szokásos módon: $1 = 0'$, $2 = 1'$, $3 = 2'$, stb. Csak az összeadás és a szorzás rekurzív definícióját felhasználva igazolja, hogy $5 + 2 = 7$ és $0 \cdot 3 = 0$. Ha a műveletek tulajdonságait is használja a bizonyításban, akkor a feladatra nem adok pontot.

Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy $5 + 2 = 7$. Ehhez járjunk el a következőképpen:

$$5 + 2 \underbrace{=}_{2=1'} 5 + 1' \underbrace{=}_{m+n'=(m+n)'} (5 + 1)' \underbrace{=}_{1=0'} (5 + 0')' \underbrace{=}_{m+n'=(m+n)'} ((5 + 0)')'.$$

Tovább haladva:

$$((5 + 0)')' \underbrace{=}_{m+0=m} (5')' \underbrace{=}_{5'=6} 6' \underbrace{=}_{6'=7} 7. \square$$

Most pedig megmutatjuk, hogy $0 \cdot 3 = 0$. Az eljárás a következő:

$$0 \cdot 3 \underbrace{=}_{3=2'} 0 \cdot 2' \underbrace{=}_{m \cdot n' = m \cdot n + m} 0 \cdot 2 + 0 \underbrace{=}_{2=1'} 0 \cdot 1' + 0 \underbrace{=}_{m \cdot n' = m \cdot n + m} (0 \cdot 1 + 0) + 0 \underbrace{=}_{1=0'} (0 \cdot 0' + 0) + 0.$$

Tovább haladva:

$$(0 \cdot 0' + 0) + 0 \underbrace{=}_{m \cdot n' = m \cdot n + m} \left(\left(\underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot 0 = 0} + 0 \right) + 0 \right) + 0 = \left(\left(\underbrace{0 + 0}_{m + 0 = m} \right) + 0 \right) + 0 = (0 + 0) + 0,$$

és ezért

$$\left(\underbrace{0 + 0}_{m + 0 = m} \right) + 0 = 0 + 0 \underbrace{=}_{m + 0 = m} 0. \square$$