

# A Chua-áramkör matematikai vizsgálata

## **Előadó:**

UNGER TAMÁS ISTVÁN  
Matematika B.Sc. szakos hallgató

## **Témavezető:**

DR. VAS GABRIELLA ÁGNES  
tudományos munkatárs

Szegedi Tudományegyetem  
Bolyai Intézet

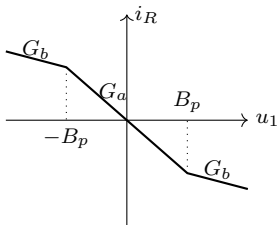
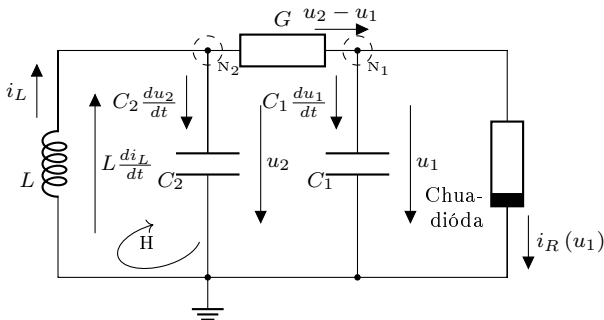
Szeged

2020. május 26.

# Tartalom

- 1 A Chua-áramkör
  - Az áramkör és a Chua-dióda karakterisztikája
  - Az áramkör Kirchhoff-egyenletei
  - Dimenzió nélküli egyenletek, egyensúlyi helyzetek
- 2 A Chua-rendszer explicit megoldása
  - Ekvivalens probléma, harmadrendű egyenlet
  - A megoldás meghatározása
- 3 Hopf-bifurkáció
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: A paraméterek meghatározása
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: Szimulációs eredmények
- 4 Perióduskettőző (flip-) bifurkáció a Chua-rendszerben
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: Bifurkációs diagram
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: További szimulációs eredmények
- 5 Káosz
  - A káosz definíciója
  - Káosz a Chua-rendszerben

## A Chua-áramkör



## A Chua-dióda karakterisztikája

$$i_R(u_1) = \begin{cases} G_b u_1 + (G_b - G_a) B_p, & u_1 < -B_p, \\ G_a u_1, & -B_p \leq u_1 \leq B_p, \\ G_b u_1 + (G_a - G_b) B_p, & u_1 > B_p. \end{cases}$$

## Az áramkör Kirchhoff-egyenletei

## Az áramkör Kirchhoff-egyenletei

- $N_1$  csomópont:

$$G(u_2 - u_1) - C_1 \frac{du_1}{dt} - i_R = 0 \iff \frac{du_1}{dt} = \frac{G}{C_1} u_2 - \frac{G}{C_1} u_1 - \frac{1}{C_1} i_R; \quad (1)$$

## Az áramkör Kirchhoff-egyenletei

- $N_1$  csomópont:

$$G(u_2 - u_1) - C_1 \frac{du_1}{dt} - i_R = 0 \iff \frac{du_1}{dt} = \frac{G}{C_1} u_2 - \frac{G}{C_1} u_1 - \frac{1}{C_1} i_R; \quad (1)$$

- $N_2$  csomópont:

$$i_L - C_2 \frac{du_2}{dt} - G(u_2 - u_1) = 0 \iff \frac{du_2}{dt} = \frac{G}{C_2} u_1 - \frac{G}{C_2} u_2 + \frac{1}{C_2} i_L; \quad (2)$$

## Az áramkör Kirchhoff-egyenletei

- $N_1$  csomópont:

$$G(u_2 - u_1) - C_1 \frac{du_1}{dt} - i_R = 0 \iff \frac{du_1}{dt} = \frac{G}{C_1} u_2 - \frac{G}{C_1} u_1 - \frac{1}{C_1} i_R; \quad (1)$$

- $N_2$  csomópont:

$$i_L - C_2 \frac{du_2}{dt} - G(u_2 - u_1) = 0 \iff \frac{du_2}{dt} = \frac{G}{C_2} u_1 - \frac{G}{C_2} u_2 + \frac{1}{C_2} i_L; \quad (2)$$

- H hurok:

$$L \frac{di_L}{dt} + u_2 = 0 \iff \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} u_2. \quad (3)$$

## Az áramkör Kirchhoff-egyenletei

- $N_1$  csomópont:

$$G(u_2 - u_1) - C_1 \frac{du_1}{dt} - i_R = 0 \iff \frac{du_1}{dt} = \frac{G}{C_1} u_2 - \frac{G}{C_1} u_1 - \frac{1}{C_1} i_R; \quad (1)$$

- $N_2$  csomópont:

$$i_L - C_2 \frac{du_2}{dt} - G(u_2 - u_1) = 0 \iff \frac{du_2}{dt} = \frac{G}{C_2} u_1 - \frac{G}{C_2} u_2 + \frac{1}{C_2} i_L; \quad (2)$$

- H hurok:

$$L \frac{di_L}{dt} + u_2 = 0 \iff \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} u_2. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{G}{C_1} u_2 - \frac{G}{C_1} u_1 - \frac{1}{C_1} i_R, \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{G}{C_2} u_1 - \frac{G}{C_2} u_2 + \frac{1}{C_2} i_L, \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L} u_2. \end{aligned} \quad (4)$$



## Jelölések

## Jelölések

$$x = \frac{u_1}{B_p}, y = \frac{u_2}{B_p}, z = \frac{i_L}{B_p G}, \tau = t \frac{G}{C_2}, \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{C_2}{LG^2}, m_0 = \frac{G_a}{G}, m_1 = \frac{G_b}{G}.$$

## Jelölések

$$x = \frac{u_1}{B_p}, y = \frac{u_2}{B_p}, z = \frac{i_L}{B_p G}, \tau = t \frac{G}{C_2}, \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{C_2}{LG^2}, m_0 = \frac{G_a}{G}, m_1 = \frac{G_b}{G}.$$

## A Chua-rendszer

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y. \end{cases} \quad (5)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, m_0 < -1 \text{ és } -1 < m_1 < 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + m_1 - m_0, & x < -1, \\ m_0 x, & -1 \leq x \leq 1, \\ m_1 x + m_0 - m_1, & x > 1. \end{cases}$$

## Jelölések

$$x = \frac{u_1}{B_p}, y = \frac{u_2}{B_p}, z = \frac{i_L}{B_p G}, \tau = t \frac{G}{C_2}, \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{C_2}{LG^2}, m_0 = \frac{G_a}{G}, m_1 = \frac{G_b}{G}.$$

## A Chua-rendszer

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y. \end{cases} \quad (5)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, m_0 < -1 \text{ és } -1 < m_1 < 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + m_1 - m_0, & x < -1, \\ m_0 x, & -1 \leq x \leq 1, \\ m_1 x + m_0 - m_1, & x > 1. \end{cases}$$

## Egyensúlyi helyzetek

A rendszernek három egyensúlyi helyzete van, melyek  $(d, 0, -d)^T$  alakúak.

$$d = \begin{cases} \frac{m_0 - m_1}{1 + m_1}, & x < -1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{m_1 - m_0}{1 + m_1}, & x > 1. \end{cases}$$

# Tartalom

## 1 A Chua-áramkör

- Az áramkör és a Chua-dióda karakterisztikája
- Az áramkör Kirchhoff-egyenletei
- Dimenzió nélküli egyenletek, egyensúlyi helyzetek

## 2 A Chua-rendszer explicit megoldása

- Ekvivalens probléma, harmadrendű egyenlet
- A megoldás meghatározása

## 3 Hopf-bifurkáció

- Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: A paraméterek meghatározása
- Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: Szimulációs eredmények

## 4 Perióduskettőző (flip-) bifurkáció a Chua-rendszerben

- Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: Bifurkációs diagram
- Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: További szimulációs eredmények

## 5 Káosz

- A káosz definíciója
- Káosz a Chua-rendszerben

## Ekvivalens harmadrendű egyenlet

Ekvivalens harmadrendű egyenlet

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y \implies y = -\frac{1}{\beta} z^{(1)}, \quad y^{(1)} = -\frac{1}{\beta} z^{(2)}.$$

Ekvivalens harmadrendű egyenlet

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y \implies y = -\frac{1}{\beta} z^{(1)}, \quad y^{(1)} = -\frac{1}{\beta} z^{(2)}.$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z \implies x = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(2)} + \frac{1}{\beta} z^{(1)} + z\right), \quad x^{(1)} = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(3)} + \frac{1}{\beta} z^{(2)} + z^{(1)}\right).$$



Ekvivalens harmadrendű egyenlet

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y \implies y = -\frac{1}{\beta} z^{(1)}, \quad y^{(1)} = -\frac{1}{\beta} z^{(2)}.$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z \implies x = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(2)} + \frac{1}{\beta} z^{(1)} + z\right), \quad x^{(1)} = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(3)} + \frac{1}{\beta} z^{(2)} + z^{(1)}\right).$$

$$z^{(3)} + (1 + \alpha + \alpha m) z^{(2)} + (\beta + \alpha m) z^{(1)} + \alpha \beta (1 + m) z + \alpha \beta (1 + m) d = 0.$$

Ekvivalens harmadrendű egyenlet

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y \implies y = -\frac{1}{\beta} z^{(1)}, \quad y^{(1)} = -\frac{1}{\beta} z^{(2)}.$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z \implies x = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(2)} + \frac{1}{\beta} z^{(1)} + z\right), \quad x^{(1)} = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(3)} + \frac{1}{\beta} z^{(2)} + z^{(1)}\right).$$

$$z^{(3)} + (1 + \alpha + \alpha m) z^{(2)} + (\beta + \alpha m) z^{(1)} + \alpha\beta (1 + m) z + \alpha\beta (1 + m) d = 0.$$

Karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + (1 + \alpha + \alpha m) \lambda^2 + (\beta + \alpha m) \lambda + \alpha\beta (1 + m) = 0.$$

Ekvivalens harmadrendű egyenlet

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y \implies y = -\frac{1}{\beta} z^{(1)}, \quad y^{(1)} = -\frac{1}{\beta} z^{(2)}.$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z \implies x = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(2)} + \frac{1}{\beta} z^{(1)} + z\right), \quad x^{(1)} = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(3)} + \frac{1}{\beta} z^{(2)} + z^{(1)}\right).$$

$$z^{(3)} + (1 + \alpha + \alpha m) z^{(2)} + (\beta + \alpha m) z^{(1)} + \alpha\beta (1 + m) z + \alpha\beta (1 + m) d = 0.$$

Karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + (1 + \alpha + \alpha m) \lambda^2 + (\beta + \alpha m) \lambda + \alpha\beta (1 + m) = 0.$$

Gyökök:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ .

## Ekvivalens harmadrendű egyenlet

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y \implies y = -\frac{1}{\beta} z^{(1)}, \quad y^{(1)} = -\frac{1}{\beta} z^{(2)}.$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z \implies x = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(2)} + \frac{1}{\beta} z^{(1)} + z\right), \quad x^{(1)} = -\left(\frac{1}{\beta} z^{(3)} + \frac{1}{\beta} z^{(2)} + z^{(1)}\right).$$

$$z^{(3)} + (1 + \alpha + \alpha m) z^{(2)} + (\beta + \alpha m) z^{(1)} + \alpha\beta(1 + m) z + \alpha\beta(1 + m) d = 0.$$

## Karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + (1 + \alpha + \alpha m) \lambda^2 + (\beta + \alpha m) \lambda + \alpha\beta(1 + m) = 0.$$

Gyökök:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ .

A megoldás az  $(x(0), y(0), z(0))^T$  kezdeti érték, a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  karakterisztikus gyökök és az  $\alpha, \beta$  paraméterek függvényében meghatározható.

## A megoldás meghatározása

## A megoldás meghatározása

Négy eset kezelése szükséges attól függően, hogy  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\lambda_3$  hogyan helyezkedik el a komplex számsíkon. Példaként tekintsük a leggyakoribb esetet:

## A megoldás meghatározása

Négy eset kezelése szükséges attól függően, hogy  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\lambda_3$  hogyan helyezkedik el a komplex számsíkon. Példaként tekintsük a leggyakoribb esetet:

Ha  $\lambda_1 = \gamma + i\omega$ ,  $\lambda_2 = \gamma - i\omega$ ,  $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ ,

### A megoldás meghatározása

Négy eset kezelése szükséges attól függően, hogy  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\lambda_3$  hogyan helyezkedik el a komplex számsíkon. Példaként tekintsük a leggyakoribb esetet:

Ha  $\lambda_1 = \gamma + i\omega$ ,  $\lambda_2 = \gamma - i\omega$ ,  $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ , akkor

$$z(t) = c_1 e^{\gamma t} \cos \omega t + c_2 e^{\gamma t} \sin \omega t + c_3 e^{\lambda_3 t} - d$$

alakú valamely  $c_1$ ,  $c_2$  és  $c_3$  valós konstansokkal.



### A megoldás meghatározása

Négy eset kezelése szükséges attól függően, hogy  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\lambda_3$  hogyan helyezkedik el a komplex számsíkon. Példaként tekintsük a leggyakoribb esetet:

Ha  $\lambda_1 = \gamma + i\omega$ ,  $\lambda_2 = \gamma - i\omega$ ,  $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ , akkor

$$z(t) = c_1 e^{\gamma t} \cos \omega t + c_2 e^{\gamma t} \sin \omega t + c_3 e^{\lambda_3 t} - d$$

alakú valamely  $c_1, c_2$  és  $c_3$  valós konstansokkal. Mivel

$$z(0) = c_1 + c_3 - d,$$

$$z^{(1)}(0) = c_1 \gamma + c_2 \omega + c_3 \lambda_3 = -\beta y(0),$$

$$z^{(2)}(0) = c_1 (\gamma^2 - \omega^2) + c_2 2\gamma\omega + c_3 \lambda_3^2 = -\beta [x(0) - y(0) + z(0)],$$

### A megoldás meghatározása

Négy eset kezelése szükséges attól függően, hogy  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\lambda_3$  hogyan helyezkedik el a komplex számsíkon. Példaként tekintsük a leggyakoribb esetet:

Ha  $\lambda_1 = \gamma + i\omega$ ,  $\lambda_2 = \gamma - i\omega$ ,  $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ , akkor

$$z(t) = c_1 e^{\gamma t} \cos \omega t + c_2 e^{\gamma t} \sin \omega t + c_3 e^{\lambda_3 t} - d$$

alakú valamely  $c_1, c_2$  és  $c_3$  valós konstansokkal. Mivel

$$z(0) = c_1 + c_3 - d,$$

$$z^{(1)}(0) = c_1 \gamma + c_2 \omega + c_3 \lambda_3 = -\beta y(0),$$

$$z^{(2)}(0) = c_1 (\gamma^2 - \omega^2) + c_2 2\gamma\omega + c_3 \lambda_3^2 = -\beta [x(0) - y(0) + z(0)],$$

ezért

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \gamma & \omega & \lambda_3 \\ (\gamma^2 - \omega^2) & 2\gamma\omega & \lambda_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z(0) + d \\ -\beta y(0) \\ -\beta [x(0) - y(0) + z(0)] \end{pmatrix}.$$

# Tartalom

- 1 A Chua-áramkör
  - Az áramkör és a Chua-dióda karakterisztikája
  - Az áramkör Kirchhoff-egyenletei
  - Dimenzió nélküli egyenletek, egyensúlyi helyzetek
- 2 A Chua-rendszer explicit megoldása
  - Ekvivalens probléma, harmadrendű egyenlet
  - A megoldás meghatározása
- 3 Hopf-bifurkáció
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: A paraméterek meghatározása
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: Szimulációs eredmények
- 4 Perióduskettőző (flip-) bifurkáció a Chua-rendszerben
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: Bifurkációs diagram
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: További szimulációs eredmények
- 5 Káosz
  - A káosz definíciója
  - Káosz a Chua-rendszerben

Hopf-bifurkáció során egyensúlyi helyzet környezetében periodikus pálya jön létre vagy tűnik el. Ennek szükséges feltétele, hogy a rendszer valamely egyensúlyi helyzetében felírt Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékeinek valós része a paraméterváltoztatás során előjelet váltson.

Hopf-bifurkáció során egyensúlyi helyzet környezetében periodikus pálya jön létre vagy tűnik el. Ennek szükséges feltétele, hogy a rendszer valamely egyensúlyi helyzetében felírt Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékeinek valós része a paraméterváltoztatás során előjelet váltson.

Jacobi-mátrix a nemtriviális egyensúlyi helyzetekben

Hopf-bifurkáció során egyensúlyi helyzet környezetében periodikus pálya jön létre vagy tűnik el. Ennek szükséges feltétele, hogy a rendszer valamely egyensúlyi helyzetében felírt Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékeinek valós része a paraméterváltoztatás során előjelet váltson.

Jacobi-mátrix a nemtriviális egyensúlyi helyzetekben

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha(1 + m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Hopf-bifurkáció során egyensúlyi helyzet környezetében periodikus pálya jön létre vagy tűnik el. Ennek szükséges feltétele, hogy a rendszer valamely egyensúlyi helyzetében felírt Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékeinek valós része a paraméterváltoztatás során előjelet váltson.

Jacobi-mátrix a nemtriviális egyensúlyi helyzetekben

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

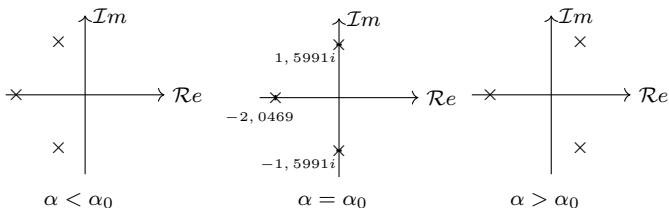
Legyen  $\beta = \beta_0 = 5$ ,  $m_0 = 1,5$  és  $m_1 = -0,7$  rögzített. Olyan  $\alpha_0$  paramétert keresünk, hogy ha  $\alpha$  áthalad  $\alpha_0$ -on, akkor  $J$  komplex konjugált sajátértékeinek valós része előjelet vált.

Hopf-bifurkáció során egyensúlyi helyzet környezetében periodikus pálya jön létre vagy tűnik el. Ennek szükséges feltétele, hogy a rendszer valamely egyensúlyi helyzetében felírt Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékeinek valós része a paraméterváltoztatás során előjelet váltson.

Jacobi-mátrix a nemtriviális egyensúlyi helyzetekben

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Legyen  $\beta = \beta_0 = 5$ ,  $m_0 = 1,5$  és  $m_1 = -0,7$  rögzített. Olyan  $\alpha_0$  paramétert keresünk, hogy ha  $\alpha$  áthalad  $\alpha_0$ -on, akkor  $J$  komplex konjugált sajátértékeinek valós része előjelet vált.



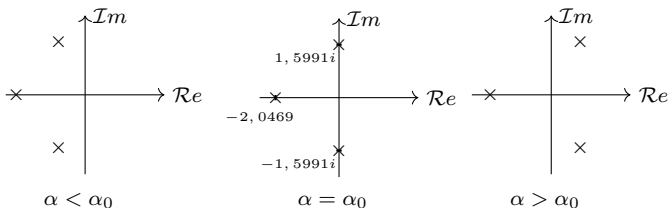


Hopf-bifurkáció során egyensúlyi helyzet környezetében periodikus pálya jön létre vagy tűnik el. Ennek szükséges feltétele, hogy a rendszer valamely egyensúlyi helyzetében felírt Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékeinek valós része a paraméterváltoztatás során előjelet váltson.

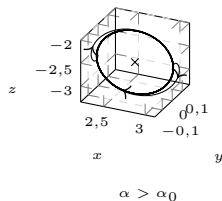
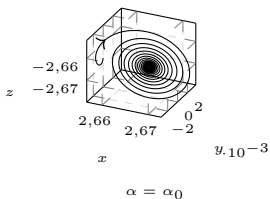
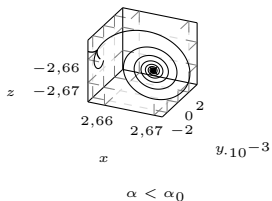
Jacobi-mátrix a nemtriviális egyensúlyi helyzetekben

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

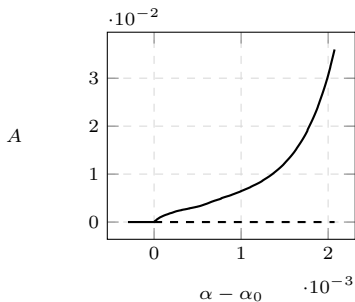
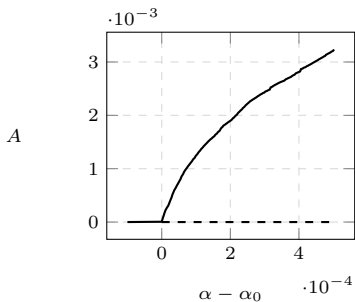
Legyen  $\beta = \beta_0 = 5$ ,  $m_0 = 1,5$  és  $m_1 = -0,7$  rögzített. Olyan  $\alpha_0$  paramétert keresünk, hogy ha  $\alpha$  áthalad  $\alpha_0$ -on, akkor  $J$  komplex konjugált sajátértékeinek valós része előjelet vált.



A paraméter numerikusan közelített értéke:  $\alpha_0 \approx 3,4896$ .

Fázisképek különböző  $\alpha$  paraméterek esetén

## Bifurkációs diagramok



# Tartalom

- 1 A Chua-áramkör
  - Az áramkör és a Chua-dióda karakterisztikája
  - Az áramkör Kirchhoff-egyenletei
  - Dimenzió nélküli egyenletek, egyensúlyi helyzetek
- 2 A Chua-rendszer explicit megoldása
  - Ekvivalens probléma, harmadrendű egyenlet
  - A megoldás meghatározása
- 3 Hopf-bifurkáció
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: A paraméterek meghatározása
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: Szimulációs eredmények
- 4 Perióduskettőző (flip-) bifurkáció a Chua-rendszerben
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: Bifurkációs diagram
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: További szimulációs eredmények
- 5 Káosz
  - A káosz definíciója
  - Káosz a Chua-rendszerben

Perióduskettőző (vagy flip-) bifurkáció során a differenciálegyenlet-rendszer egy periodikus pályája közelében megjelenik egy új periodikus pálya, melynek minimális periódusa megközelítőleg kétszerese az eredeti periodikus pályáénak.

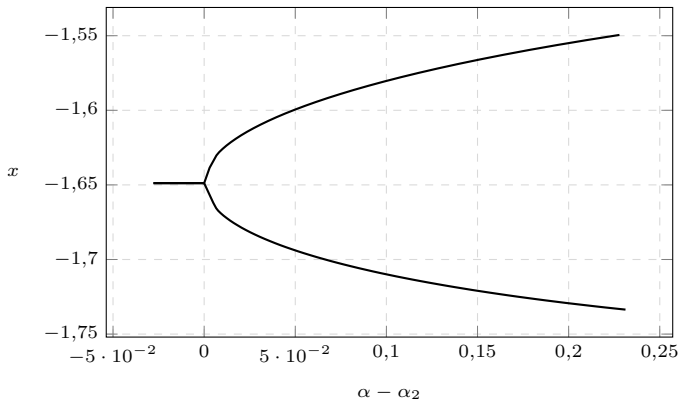
Perióduskettőző (vagy flip-) bifurkáció során a differenciálegyenlet-rendszer egy periodikus pályája közelében megjelenik egy új periodikus pálya, melynek minimális periódusa megközelítőleg kétszerese az eredeti periodikus pályáénak.

Ha  $m_0 = -8/7$ ,  $m_1 = -5/7$  és  $\beta = 16$  rögzített, és  $\alpha$  8,855 és 9,173 között mozog, akkor a Chua-rendszer perióduskettőző bifurkációk sorozatán megy keresztül.

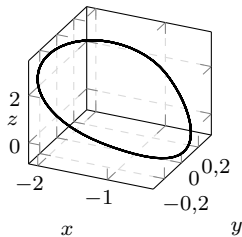
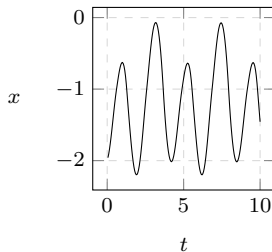
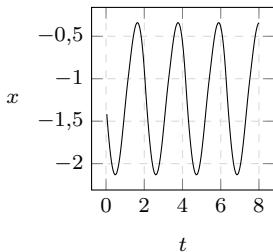
Perióduskettőző (vagy flip-) bifurkáció során a differenciálegyenlet-rendszer egy periodikus pályája közelében megjelenik egy új periodikus pálya, melynek minimális periódusa megközelítőleg kétszerese az eredeti periodikus pályáénak.

Ha  $m_0 = -8/7$ ,  $m_1 = -5/7$  és  $\beta = 16$  rögzített, és  $\alpha$  8,855 és 9,173 között mozog, akkor a Chua-rendszer perióduskettőző bifurkációk sorozatán megy keresztül.

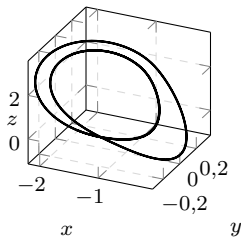
Bifurkációs diagram  $\alpha_2 \approx 8,8557$  környezetében



## További szimulációs eredmények

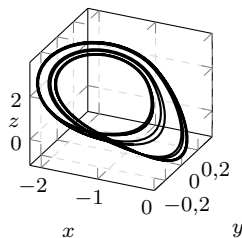
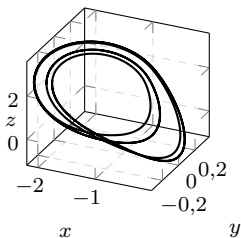
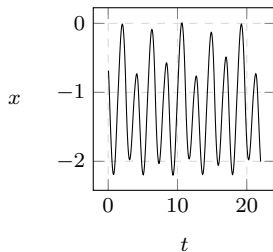
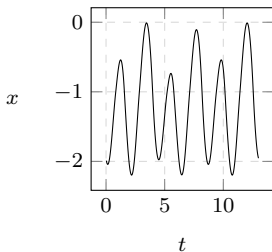


$$\alpha < \alpha_2 \approx 8,8557$$



$$\alpha_2 < \alpha < \alpha_4 \approx 9,1080$$

## További szimulációs eredmények



$$\alpha_4 < \alpha < \alpha_8 \approx 9,1591$$

$$\alpha_8 < \alpha < \alpha_{16} \approx 9,1699$$



# Tartalom

- 1 A Chua-áramkör
  - Az áramkör és a Chua-dióda karakterisztikája
  - Az áramkör Kirchhoff-egyenletei
  - Dimenzió nélküli egyenletek, egyensúlyi helyzetek
- 2 A Chua-rendszer explicit megoldása
  - Ekvivalens probléma, harmadrendű egyenlet
  - A megoldás meghatározása
- 3 Hopf-bifurkáció
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: A paraméterek meghatározása
  - Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben: Szimulációs eredmények
- 4 Perióduskettőző (flip-) bifurkáció a Chua-rendszerben
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: Bifurkációs diagram
  - Flip-bifurkáció a Chua-rendszerben: További szimulációs eredmények
- 5 Káosz
  - A káosz definíciója
  - Káosz a Chua-rendszerben

## A káosz definíciója

## A káosz definíciója

### Definíció

(*Devaney*) Legyen  $\mathcal{X}$  metrikus tér. Az  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  leképezés *kaotikus*, ha

- 1 periodikus pontjainak halmaza sűrű  $\mathcal{X}$ -ben,
- 2 topologikusan tranzitív, és
- 3 érzékenyen függ a kezdeti adatoktól.

## A káosz definíciója

### Definíció

(Devaney) Legyen  $\mathcal{X}$  metrikus tér. Az  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  leképezés *kaotikus*, ha

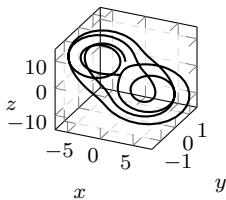
- 1 periodikus pontjainak halmaza sűrű  $\mathcal{X}$ -ben,
- 2 topologikusan tranzitív, és
- 3 érzékenyen függ a kezdeti adatoktól.

### Káosz differenciálegyenlet-rendszerek esetén

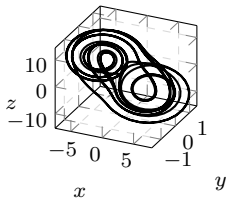
Differenciálegyenlet-rendszerek esetén akkor beszélhetünk káoszlól, ha egy, a rendszer által meghatározott Poincaré-féle visszatérési leképezés kaotikus a fázistér valamely részhalmazán.

## Káosz a Chua-rendszerben

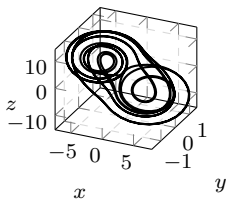
A numerikus szimulációk alapján a Chua-rendszer az  $\alpha = 15$ ,  $\beta = 25$ ,  $m_0 = -1,6$  és  $m_1 = -0,8$  paraméterek, valamint a  $(-0.4, 0, 0)^T$  kezdeti érték mellett kaotikusan viselkedik.



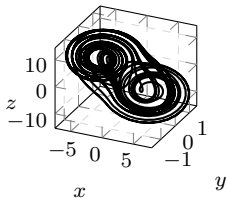
$t \in [0, 10]$



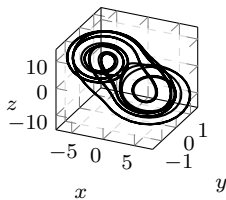
$t \in [0, 50]$



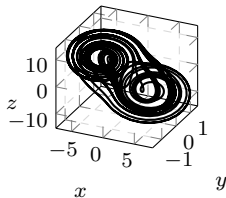
$t \in [0, 30]$



$t \in [0, 70]$



$t \in [0, 40]$



$t \in [0, 80]$

Köszönöm a figyelmet!