

SZAKDOLGOZAT

A CHUA-ÁRAMKÖR MATEMATIKAI VIZSGÁLATA

Írta:

UNGER TAMÁS ISTVÁN

Matematika B.Sc. szakos hallgató

Témavezető:

DR. VAS GABRIELLA ÁGNES

tudományos munkatárs

Szegedi Tudományegyetem

Bolyai Intézet

Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék

2020

Nyilatkozat

Alulírott *Unger Tamás István* matematika B.Sc. szakos hallgató kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Aláírás

Dátum

*De tűnt idő, te merre bolyongsz
az anyagban?
Visszatérsz-e még a nyüzsgő
szálakon?
Rétegek, halmazok, iramló pályák
—
ez vagyok én, és ez itt az
otthonom.*

Kátai Tamás

Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Vas Gabriellának, hogy munkámat hétről-hétre értékes, inspiráló észrevételeivel, javaslataival és töretlen optimizmusával támogatta. Ezúton szeretném megköszönni Prof. Kuczmann Miklósnak, a győri Széchenyi István Egyetem egyetemi tanárának, hogy a szakdolgozat témaválasztása során segítségemre volt, és felkeltette érdeklődésemet a Chua-rendszer iránt.

Hálás vagyok a Bolyai Intézet oktatóinak, hogy tanulmányaim során példaértékű hozzáállásukkal, színvonalas előadásaikkal és magasfokú szakmai felkészültségükkel bevezettek a matematikatudományok alapjaiba.

Köszönetemet szeretném kifejezni közvetlen kollégáimnak is, különös tekintettel Dr. Kissné Akli Mária osztályvezető asszonynak, amiért a napi feladataim ellátása mellett lehetővé tették, hogy tanulmányaimat nyugodt körülmények között, támogatásuk és elismerésük mellett folytathassam. Végül, de nem utolsósorban köszönettel tartozom barátaimnak azért a felbecsülhetetlen értékű támogatásért, amellyel a nehéz pillanatokban is erőt adnak a mindennapi küzdelmekhez a magánéletben és a munkában egyaránt.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A Chua-áramkör	2
2.1. Az áramkör és egyenletei	2
2.2. Dimenzió nélküli egyenletek	3
2.3. Egyensúlyi helyzetek	5
3. Elméleti háttér	6
3.1. Konstans együtthatós, elsőrendű lineáris rendszerek	6
3.2. Inhomogén rendszerek	7
3.3. Konstans együtthatós, n -edrendű lineáris egyenletek	8
4. A Chua-rendszer explicit megoldása és numerikus implementálása	11
4.1. Az ekvivalens probléma, harmadrendű egyenlet	11
4.2. A megoldás meghatározása	12
4.3. Numerikus implementálás, nehézségek	13
5. Hopf-bifurkáció	16
5.1. Elméleti bevezető	16
5.2. Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben	19
6. Perióduskettőző (flip-) bifurkáció	21
6.1. Flip-bifurkáció leképezések esetén	21
6.2. Flip-bifurkáció differenciálegyenlet-rendszerek esetén	23
6.3. A jelenség megfigyelése a Chua-rendszerben	24
7. Káosz	27
7.1. Alapfogalmak	27
7.2. A káosz definíciója	28
7.3. Káosz a Chua-rendszerben	30
A. Függelék	I
A.1. A Chua-rendszer Matlab-kódja	I
A.2. További Matlab-kódok	V

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat elsődleges célkitűzése a kapcsolódó elmélet tárgyalása mellett, hogy numerikus vizsgálatok segítségével bemutassa a Chua-áramkörben megfigyelhető bifurkációs jelenségeket. A dolgozat második fejezetében ismertetjük a Chua-áramkört leíró háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszert, valamint annak fizikai dimenzióktól mentes alakját, végül tárgyaljuk a rendszer egyensúlyi helyzeteit.

Tekintettel arra, hogy az áramkör viselkedését leíró rendszer a fázistér egyes tartományain inhomogén, konstans együtthatós, lineáris rendszerekre redukálódik, a harmadik fejezetben áttekintjük ezen rendszerek elméletét.

A dolgozat negyedik fejezetében megmutatjuk, hogyan térhetünk át az eredeti háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszerről egy inhomogén, lineáris, harmadrendű, konstans együtthatós egyenletre. Az áttérés után ismertetjük ennek az egyenletnek a megoldását, majd tárgyaljuk a rendszer numerikus implementálásának nehézségeit.

Az ötödik fejezetben egy kétdimenziós példán keresztül ismertetjük a Hopf-bifurkációt, majd numerikus módszerek segítségével példát mutatunk a jelenségre a Chua-rendszerben.

A hatodik fejezetben tárgyaljuk a perióduskettőző bifurkációt leképezések és differenciálegyenlet-rendszerek esetében is, végül perióduskettőző bifurkációk sorozatát figyeljük meg numerikusan a Chua-rendszerben.

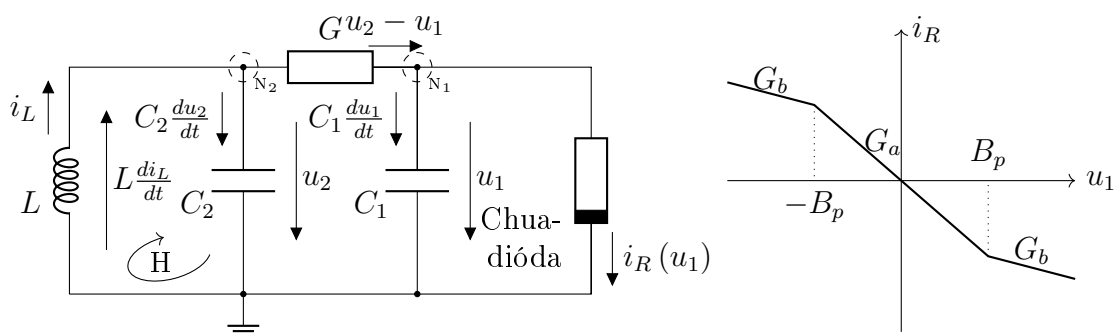
A dolgozat utolsó fejezetében definiáljuk a káoszt, legvégül pedig példát mutatunk a Chua-rendszer kaotikus viselkedésére.

2. fejezet

A Chua-áramkör

2.1. Az áramkör és egyenletei

Tekintsük a 2.1. ábrán látható, L induktivitásból, C_1 és C_2 kapacitásokból, G vezetőképességből és egy Chua-diódából álló áramkört. A dióda szigorúan monoton csökkenő, szakaszonként lineáris, az egyes szakaszokon rendre G_b , G_a és G_b meredekségű áram-feszültség-karakterisztikával jellemezhető. Az egyes áramköri elemeken a feltüntetett értékű és irányú feszültségek esnek, és a feltüntetett irányú áramok folynak. Mivel a kapacitásokon és az induktivitáson eső feszültségek és átfolyó ára-



2.1. ábra. Chua-áramkör és a Chua-dióda karakterisztikája

mok közötti összefüggésekben megjelenik az induktivitás i_L áramának, valamint a két kapacitás u_1 és u_2 feszültségének idő szerinti deriváltja, az áramkör viselkedését differenciálegyenlet-rendszer segítségével írhatjuk le. Ehhez a klasszikus villamoságtan úgynevezett Kirchhoff-törvényeit (csomóponti- és huroktörvényeit) szükséges alkalmazni [1].

Vizsgáljuk először a G vezetőképességtől jobbra elhelyezkedő N_1 áramköri csomópontot. A csomóponti törvény értelmében a csomópontba befolyó áramok összege megegyezik az onnan elfolyó áramok összegével, azaz bármely csomópontra $\sum_j i_j = 0$. Felírva az egyetlen befolyó és a két kifolyó áram előjeles összegét

$$G(u_2 - u_1) - C_1 \frac{du_1}{dt} - i_R = 0 \quad (2.1)$$

adódik. Átrendezve kapjuk a C_1 kapacitás feszültségére vonatkozó differenciálegyen-

letet:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{G}{C_1}u_2 - \frac{G}{C_1}u_1 - \frac{1}{C_1}i_R. \quad (2.2)$$

Hasonlóan járunk el a G -től balra lévő N_2 csomópont esetén:

$$i_L - C_2 \frac{du_2}{dt} - G(u_2 - u_1) = 0, \quad (2.3)$$

melyből a C_2 kapacitás feszültségére vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{G}{C_2}u_1 - \frac{G}{C_2}u_2 + \frac{1}{C_2}i_L. \quad (2.4)$$

Az induktivitás áramára vonatkozó differenciálegyenlethez az L induktivitás és a C_2 kapacitás alkotta H hurokra szükséges alkalmazni a huroktörvényt. Ennek értelmében bármely zárt hurokban a feszültségek előjeles összege nulla. Az áramutató járásával megegyező hurokkörüljárási irányt felvéve a törvény az

$$L \frac{di_L}{dt} + u_2 = 0 \iff \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}u_2 \quad (2.5)$$

alakot ölti. Ezen három differenciálegyenlet által alkotott differenciálegyenlet-rendszert az áramkör állapotváltozós leírásának nevezzük [2]:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}u_2 - \frac{G}{C_1}u_1 - \frac{1}{C_1}i_R, \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{G}{C_2}u_1 - \frac{G}{C_2}u_2 + \frac{1}{C_2}i_L, \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L}u_2. \end{aligned}} \quad (2.6)$$

A Chua-dióda áram-feszültség-karakterisztikája a következőképpen adható meg:

$$i_R(u_1) = \begin{cases} G_b u_1 + (G_b - G_a) B_p, & u_1 < -B_p, \\ G_a u_1, & -B_p \leq u_1 \leq B_p, \\ G_b u_1 + (G_a - G_b) B_p, & u_1 > B_p. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2. Dimenzió nélküli egyenletek

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$x = \frac{u_1}{B_p}, \quad y = \frac{u_2}{B_p}, \quad z = \frac{i_L}{B_p G}, \quad \tau = t \frac{G}{C_2}, \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1} \text{ és } \beta = \frac{C_2}{L G^2},$$

valamint tekintsük az u_1 feszültség τ szerinti deriváltját:

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{du_1}{dt} \frac{C_2}{G} = \frac{C_2}{C_1} \left(u_2 - u_1 - \frac{1}{G} i_R \right). \quad (2.8)$$

Legyen $f(x) = 1/(GB_p) i_R(u_1)$. Elosztva (2.8) mindkét oldalát B_p -vel és felhasználva a bevezetett jelöléseket a

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - f(x)) \quad (2.9)$$

alakú differenciálegyenlet adódik. Hasonlóan járhatunk el az u_2 feszültségre vonatkozó differenciálegyenlettel is. Az eredeti egyenlet mindkét oldalát B_p -vel elosztva, t helyére τ -t helyettesítve, és felhasználva a jelöléseket (2.6) második egyenlete a

$$\frac{dy}{d\tau} = x - y + z \quad (2.10)$$

alakot ölti. Az induktivitás i_L áramára vonatkozó differenciálegyenletből kiindulva, i_L helyére z -t, t helyére pedig τ -t helyettesítve végül

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{L} \frac{C_2}{G} \frac{1}{B_p G} u_2 = -\beta y \quad (2.11)$$

adódik. A fenti átalakításokkal az eredeti állapotváltozós leírásból a következő differenciálegyenlet-rendszerre jutottunk [3]:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha (y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y. \end{aligned}} \quad (2.12)$$

Az idő, az elektromos áram és -feszültség, valamint a vezetőképesség, a kapacitás és az induktivitás mértékegységeinek ismeretében könnyen belátható, hogy az így kapott egyenletekben szereplő együtthatók, függvények és változók mindegyike mentes a fizikai dimenzióktól.

Az első egyenletben szereplő f függvényt a Chua-dióda áram-feszültség-karakterisztikájából származtattuk $1/(GB_p)$ -vel történő szorzással. Bevezetve az

$$m_0 = \frac{G_a}{G} \text{ és } m_1 = \frac{G_b}{G}$$

jelöléseket a függvény a következőképpen írható fel:

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + m_1 - m_0, & x < -1, \\ m_0 x, & -1 \leq x \leq 1, \\ m_1 x + m_0 - m_1, & x > 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Vizsgálataink során

$$\alpha > 0, \beta > 0, m_0 < -1 \text{ és } -1 < m_1 < 0. \quad (2.14)$$

Végül pedig definiáljunk egy, a későbbiek folyamán fontos szerepet játszó konstans is:

$$d = \begin{cases} \frac{m_0 - m_1}{1 + m_1}, & x < -1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{m_1 - m_0}{1 + m_1}, & x > 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

A továbbiakban az itt bevezetett dimenzió nélküli egyenletekkel, a (2.14) feltétellel, az f függvénnyel és a d konstanssal dolgozunk úgy, hogy τ helyett rendre t -t írunk.

2.3. Egyensúlyi helyzetek

1. *Definíció.* Az $(x^*, y^*, z^*)^T \in \mathbb{R}^3$ pont *egyensúlyi helyzete* (2.12)-nek, ha a konstans

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (x^*, y^*, z^*)^T \in \mathbb{R}^3$$

függvény megoldása (2.12)-nek.

1. *Állítás.* A (2.12) egyenletrendszernek a (2.14) feltétel mellett három egyensúlyi helyzete van, melyek $(d, 0, -d)^T$ alakúak.

Bizonyítás. Az 1. Definíció szerint az $(x^*, y^*, z^*)^T$ egyensúlyi helyzetek az

$$\begin{cases} \alpha(y - x - f(x)) = 0, \\ x - y + z = 0, \\ -\beta y = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai lesznek. Az egyenletrendszert vizsgálva azonnal látszik, hogy $y^* = 0$, $z^* = -x^*$ és $f(x^*) = -x^*$.

Írjuk fel az $f(x^*) = -x^*$ egyenletet az $x^* < -1$, $-1 \leq x^* \leq 1$ és $x^* > 1$ esetekre. Az így kapott összefüggéseket x^* -ra rendezve már egyszerűen megmutatható, hogy mindhárom esetben $(d, 0, -d)^T$ alakú egyensúlyi helyzet adódik. \square

Azt mondjuk, hogy az $(x^*, y^*, z^*)^T \in \mathbb{R}^3$ egyensúlyi helyzet *stabil*, ha a közelében indított megoldások örökre közel maradnak. A pontos definíció a következő:

2. *Definíció.* Az $(x^*, y^*, z^*)^T \in \mathbb{R}^3$ egyensúlyi helyzet *stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy tetszőleges $(x, y, z)^T$ megoldás és

$$|x(0) - x^*| + |y(0) - y^*| + |z(0) - z^*| < \delta$$

esetén

$$|x(t) - x^*| + |y(t) - y^*| + |z(t) - z^*| < \varepsilon, \text{ minden } t \geq 0\text{-ra.}$$

Az egyensúlyi helyzet *instabil*, ha nem stabil.

3. *Definíció.* Az $(x^*, y^*, z^*)^T \in \mathbb{R}^3$ egyensúlyi helyzet *aszimptotikusan stabil*, ha stabil és létezik $\delta_0 > 0$ úgy, hogy tetszőleges $(x, y, z)^T$ megoldás és

$$|x(0) - x^*| + |y(0) - y^*| + |z(0) - z^*| < \delta_0$$

esetén $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t))^T = (x^*, y^*, z^*)^T$.

3. fejezet

Elméleti háttér

Az előző fejezetben ismertett, a Chua-áramkör viselkedését leíró differenciálegyenlet-rendszer a fázistér egyes tartományain inhomogén, konstans együtthatós, lineáris rendszerekre redukálódik. A következőkben ezért áttekintjük a lineáris rendszerek elméletét [5].

3.1. Konstans együtthatós, elsőrendű lineáris rendszerek

4. *Definíció.* Az

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad X(t) \in \mathbb{R}^n \quad (H_1)$$

egyenletrendszert *homogén lineáris egyenletrendszernek* nevezzük, melyben $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^T$ ismeretlen, $\dot{X}(t)$ pedig az $X(t)$ idő szerinti első deriváltját jelöli.

Megmutatható, hogy bármely $X_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén az $\dot{X}(t) = AX(t)$, $X(0) = X_0$ kezdetiérték-problémának az egész számegyenesen létezik megoldása. Ezt az állítást mi most nem igazoljuk.

Igaz a következő tétel is, amit később, a Chua-rendszer megoldásainak meghatározása során felhasználunk.

1. *Tétel.* (H_1) megoldásai a folytonosan differenciálható függvények terében egy n -dimenziós alteret alkotnak, azaz igazak a következők:

1. Ha φ_1, φ_2 megoldása (H_1) -nek, akkor $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ is megoldás bármely $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esetén.
2. Létezik $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ megoldása (H_1) -nek, amelyek lineárisan függetlenek, azaz létezik n -elemű alarendszer (bázis).
3. (H_1) bármely $\hat{\varphi}$ megoldásához létezik $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n \in \mathbb{R}$, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\hat{\varphi}(t) = \hat{c}_1\varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n\varphi_n(t)$. Ekkor $\hat{c}_1\varphi_1 + \dots + \hat{c}_n\varphi_n$ neve *általános megoldás*.

Bizonyítás. A tétel első része behelyettesítéssel ellenőrizhető minden $t \in \mathbb{R}$ -re:

$$\begin{aligned} (c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t))' &= c_1\dot{\varphi}_1(t) + c_2\dot{\varphi}_2(t) = \\ &= c_1A\varphi_1(t) + c_2A\varphi_2(t) = A(c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)). \end{aligned}$$

Az n -elemű alaprendszer létezésének igazolásához tekintsük az \mathbb{R}^n -beli $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ standard bázist, és tekintsük az

$$(\text{k.é.p.})_i \begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t), \\ X(0) = e_i \end{cases}$$

kezdetiérték-problémát minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Jelölje $\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén $(\text{k.é.p.})_i$ megoldását.

Igazoljuk a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ megoldások függetlenségét indirekt módon: tegyük fel, hogy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ lineárisan függő. Ekkor létezik

$$\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \in \mathbb{R}, \quad \bar{c}_1^2 + \dots + \bar{c}_n^2 > 0$$

úgy, hogy

$$\bar{c}_1 \varphi_1(t) + \dots + \bar{c}_n \varphi_n(t) = 0 \text{ bármely } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Amennyiben $t = 0$, úgy éppen az \mathbb{R}^n -beli standard bázis lineáris kombinációját kapjuk, ami nem lehet nulla, ezért ellentmondásra jutunk:

$$\bar{c}_1 \varphi_1(0) + \dots + \bar{c}_n \varphi_n(0) = 0,$$

$$\bar{c}_1 e_1 + \dots + \bar{c}_n e_n = 0. \quad \text{!}$$

A tétel harmadik állítása az, hogy (H_1) összes $\hat{\varphi}$ megoldása előáll a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ alaprendszer lineáris kombinációjaként. Létezik $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n$ úgy, hogy

$$\hat{\varphi}(0) = \hat{c}_1 e_1 + \dots + \hat{c}_n e_n.$$

Legyen

$$\psi(t) = \hat{c}_1 \varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n \varphi_n(t),$$

amely a tétel első állítása alapján megoldása (H_1) -nek. Világos, hogy

$$\psi(0) = \hat{c}_1 e_1 + \dots + \hat{c}_n e_n = \hat{\varphi}(0).$$

A Picard-Lindelöf-féle unicitástétel [7] értelmében, ha $\hat{\varphi}$ és ψ megoldások, és $\psi(0) = \hat{\varphi}(0)$, akkor $\hat{\varphi} \equiv \psi$, ami már maga után vonja a 3. állítást. \square

3.2. Inhomogén rendszerek

5. *Definíció.* Az

$$\dot{X}(t) = AX(t) + b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad X(t), b \in \mathbb{R}^n \quad (IH_1)$$

egyenletrendszert *inhomogén lineáris egyenletrendszernek* nevezzük, melyben $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^T$ ismeretlen.

2. *Állítás.* Ha ψ_1 és ψ_2 megoldásai (IH_1) -nek, akkor $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ megoldása (H_1) -nek.

Bizonyítás. Az állítás egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t) = A\psi_1(t) + b - A\psi_2(t) - b = A(\psi_1(t) - \psi_2(t)) = A\varphi(t).$$

\square

2. *Tétel.* Az (IH_1) egyenlet általános megoldása

$$X(t) = \underbrace{c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)}_{(H_1) \text{ általános megoldása}} + \underbrace{\tilde{\varphi}(t)}_{(IH_1) \text{ partikuláris megoldása}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (MO)$$

alakú.

Bizonyítás. Először behelyettesítéssel igazoljuk, hogy az ilyen alakú függvények megoldásai (IH_1) -nek, azaz bármely $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ esetén $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n + \tilde{\varphi}$ megoldása (IH_1) -nek. Elvégezve a behelyettesítést,

$$\begin{aligned} (c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t))' &= c_1\dot{\varphi}_1(t) + \dots + c_n\dot{\varphi}_n(t) + \dot{\tilde{\varphi}}(t) = \\ &= c_1A\varphi_1(t) + \dots + c_nA\varphi_n(t) + (A\tilde{\varphi}(t) + b) = \\ &= A \underbrace{(c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t))}_{X(t)} + b, \end{aligned}$$

adódik, $X(t)$ tehát megoldás.

Most pedig megmutatjuk, hogy minden megoldás (MO) -alakban áll elő, azaz (IH_1) bármely $\hat{\psi}(t)$ megoldása esetén létezik $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden valós t esetén

$$\hat{\psi}(t) = \hat{c}_1\varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n\varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t).$$

Mivel tudjuk, hogy $\hat{\psi} - \tilde{\varphi}$ megoldása (H_1) -nek, így az 1. Tétel 3. pontja szerint

$$\hat{\psi}(t) - \tilde{\varphi}(t) = \hat{c}_1\varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n\varphi_n(t)$$

valamely $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n \in \mathbb{R}$ konstansokkal. Azonnal látszik, hogy

$$\hat{\psi}(t) = \hat{c}_1\varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n\varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t).$$

□

3.3. Konstans együtthatós, n -edrendű lineáris egyenletek

6. *Definíció.* Az

$$Y^{(n)} + a_1Y^{(n-1)} + \dots + a_nY = 0, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad (H_2)$$

egyenletet *homogén, n -edrendű, lineáris, konstans együtthatós egyenletnek*, az

$$Y^{(n)} + a_1Y^{(n-1)} + \dots + a_nY = s, \quad a_1, \dots, a_n, s \in \mathbb{R} \quad (IH_2)$$

egyenletet pedig *inhomogén, n -edrendű, lineáris, konstans együtthatós egyenletnek* nevezzük, ahol $Y = Y(t)$ ismeretlen függvény, $Y^{(i)}$ pedig Y i -edik deriváltját jelöli, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Vegyük észre, hogy (IH_1) és (IH_2) ekvivalensek. Ehhez alkalmazzuk a következő megfeleltetést:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

így az

$$\begin{cases} X'_1 = X_2 \\ X'_2 = X_3 \\ \vdots \\ X'_n = -a_1X_n - a_2X_{n-1} - \dots - a_nX_1 + s \end{cases}$$

egyenletrendszerre jutunk. Ez éppen (IH_1) -alakú úgy, hogy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ és } b = (0, 0, \dots, 0, s)^T.$$

Az ekvivalencia miatt a 2. Tételből azonnal adódik az alábbi állítás.

3. *Tétel.* (IH_2) általános megoldása

$$\Psi(t) = c_1\Psi_1(t) + \dots + c_n\Psi_n(t) + \tilde{\Psi}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

alakú, ahol Ψ_1, \dots, Ψ_n lineárisan független megoldásai (H_2) -nek, $\tilde{\Psi}$ pedig partikuláris megoldása (IH_2) -nek. A Ψ_1, \dots, Ψ_n függvényeket *alaprendszernek* hívjuk.

Megjegyezzük, hogy Ψ_i itt nem más, mint 2. Tételben szereplő φ_i első komponense. A továbbiakban $n = 3$ -ra szorítkozva megmutatjuk, hogyan lehetséges az alaprendszer, azaz 3 darab lineárisan független megoldás meghatározása. Ehhez az

$$Y^{(3)} + a_1Y^{(2)} + a_2Y^{(1)} + a_3Y = 0 \quad (H_3)$$

homogén egyenletet vizsgáljuk.

Vegyük észre, hogy $Y(t) = e^{\lambda t}$ -t behelyettesítve, majd $e^{\lambda t}$ -vel egyszerűsítve a

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (3.1)$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökeit *sajátértékeknek* nevezzük. Azonnal látszik, hogy λ akkor és csak akkor gyöke (3.1)-nek, ha $e^{\lambda t}$ megoldása (H_3) -nak. Tudjuk továbbá, hogy a karakterisztikus egyenletnek \mathbb{C} felett 3 gyöke van: λ_1, λ_2 és λ_3 .

3. *Állítás.* Négy esetet különböztetünk meg attól függően, hogy $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ sajátértékek hogyan helyezkednek el a komplex számsíkon:

- Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ páronként különbözők, akkor $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}\}$ alaprendszer;
- Ha $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \in \mathbb{R}$, akkor $\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_3 t}\}$ alaprendszer;

- c. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}\}$ alaprendszer;
- d. Ha $\lambda_1 = \gamma + i\omega$, $\lambda_2 = \gamma - i\omega$, $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, akkor $\{e^{\gamma t} \cos \omega t, e^{\gamma t} \sin \omega t, e^{\lambda_3 t}\}$ alaprendszer.

Bizonyítás. Az első három esetben behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy az egyes függvényrendszerek komponensei valóban megoldásai (H_3) -nak, valamint lineárisan függetlenek is, ezért alaprendszerek.

Komplex konjugált sajátértékpár esetén (d.) tudjuk, hogy

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(\gamma+i\omega)t} = e^{\gamma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \text{ és } e^{\lambda_2 t} = e^{(\gamma-i\omega)t} = e^{\gamma t} (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

megoldásai (H_3) -nak, ezért tetszőleges lineáris kombinációjuk is megoldás, tehát

$$\frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = e^{\gamma t} \cos \omega t \text{ és } \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2i} = e^{\gamma t} \sin \omega t$$

valós megoldásai (H_3) -nak. Könnyen belátható, hogy lineárisan függetlenek is, ezért az $\{e^{\gamma t} \cos \omega t, e^{\gamma t} \sin \omega t, e^{\lambda_3 t}\}$ függvényrendszer valóban alaprendszer. \square

4. fejezet

A Chua-rendszer explicit megoldása és numerikus implementálása

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a Chua-áramkört leíró differenciálegyenlet-rendszerről hogyan térhetünk át egy inhomogén, lineáris, harmadrendű, konstans együtthatós egyenletre. Meghatározzuk az ekvivalens probléma megoldásait a paraméterek és a kezdeti értékek függvényében, végül tárgyaljuk a numerikus implementáció során fellépő technikai nehézségeket.

4.1. Az ekvivalens probléma, harmadrendű egyenlet

Tekintsük a (2.12) egyenletrendszert, valamint vegyük észre, hogy f szakaszonként $f(x) = mx - d(1 + m)$, $m \in \{m_0, m_1\}$ alakú. Szorozzuk be (2.12) harmadik egyenletét $-1/\beta$ -val és deriváljuk mindkét oldalt:

$$y = -\frac{1}{\beta}z^{(1)}, \quad y^{(1)} = -\frac{1}{\beta}z^{(2)}. \quad (4.1)$$

Behelyettesítve y -t és $y^{(1)}$ -t (2.12) második egyenletébe az alábbiakat kapjuk x -re és $x^{(1)}$ -ra:

$$x = -\left(\frac{1}{\beta}z^{(2)} + \frac{1}{\beta}z^{(1)} + z\right), \quad x^{(1)} = -\left(\frac{1}{\beta}z^{(3)} + \frac{1}{\beta}z^{(2)} + z^{(1)}\right).$$

Az így kapott összefüggéseket (2.12) első egyenletébe helyettesítve

$$-\left(\frac{1}{\beta}z^{(3)} + \frac{1}{\beta}z^{(2)} + z^{(1)}\right) = -\frac{\alpha}{\beta}z^{(1)} + \alpha(1+m)\left(\frac{1}{\beta}z^{(2)} + \frac{1}{\beta}z^{(1)} + z\right) + \alpha(1+m)d$$

adódik. Végül, β -val szorozva, az alábbi harmadrendű egyenletet kapjuk:

$$\boxed{z^{(3)} + (1 + \alpha + \alpha m)z^{(2)} + (\beta + \alpha m)z^{(1)} + \alpha\beta(1+m)z + \alpha\beta(1+m)d = 0.} \quad (*)$$

4. *Állítás.* A $z = -d$ partikuláris megoldása $(*)$ -nak.

Bizonyítás. Az állítás egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$z = -d \implies z^{(1)} = z^{(2)} = z^{(3)} = 0, \text{ ezért } \alpha\beta(1+m)(-d) + \alpha\beta(1+m)d = 0.$$

Megjegyezzük, hogy az állítás következik abból is, hogy a $(*)$ -al ekvivalens (2.12) rendszernek az 1. Állítás szerint $(d, 0, -d)^T$ egyensúlyi helyzete. \square

4.2. A megoldás meghatározása

Tekintsük most (*) karakterisztikus egyenletét:

$$\lambda^3 + (1 + \alpha + \alpha m) \lambda^2 + (\beta + \alpha m) \lambda + \alpha \beta (1 + m) = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Következő lépésként meghatározzuk a megoldást az $(x(0), y(0), z(0))^T$ kezdeti érték, a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ karakterisztikus gyökök és az α, β paraméterek függvényében. A 3. Állítás szerint négy eset kezelése szükséges:

a. Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ páronként különböző, akkor a 3. Tétel értelmében

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} - d, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Az ismeretlen együtthatók meghatározásához szükségünk van z -re, valamint annak első és második deriváltjára $t = 0$ -ban. Elvégezve a deriválásokat, behelyettesítve $t = 0$ -át, továbbá (4.1)-et és (2.12) második egyenletét felhasználva

$$\begin{aligned} z(0) &= c_1 + c_2 + c_3 - d, \\ z^{(1)}(0) &= \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = -\beta y(0), \\ z^{(2)}(0) &= \lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 + \lambda_3^2 c_3 = -\beta y^{(1)}(0) = -\beta [x(0) - y(0) + z(0)] \end{aligned}$$

adódik. Ez c_1, c_2, c_3 -ra nézve egy lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z(0) + d \\ -\beta y(0) \\ -\beta [x(0) - y(0) + z(0)] \end{pmatrix}.$$

b. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \in \mathbb{R}$, akkor

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} - d,$$

ezért

$$\begin{aligned} z(0) &= c_1 + c_3 - d, \\ z^{(1)}(0) &= \lambda_1 c_1 + c_2 + \lambda_3 c_3 = -\beta y(0), \\ z^{(2)}(0) &= \lambda_1^2 c_1 + 2\lambda_1 c_2 + \lambda_3^2 c_3 = -\beta [x(0) - y(0) + z(0)], \end{aligned}$$

és

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z(0) + d \\ -\beta y(0) \\ -\beta [x(0) - y(0) + z(0)] \end{pmatrix}.$$

c. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$z(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 t^2 e^{\lambda t} - d,$$

ezért

$$\begin{aligned} z(0) &= c_1 - d, \\ z^{(1)}(0) &= \lambda c_1 + c_2 = -\beta y(0), \\ z^{(2)}(0) &= \lambda^2 c_1 + 2\lambda c_2 + 2c_3 = -\beta [x(0) - y(0) + z(0)], \end{aligned}$$

és

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z(0) + d \\ -\beta y(0) \\ -\beta [x(0) - y(0) + z(0)] \end{pmatrix}.$$

d. Ha $\lambda_1 = \gamma + i\omega$, $\lambda_2 = \gamma - i\omega$, $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, akkor

$$z(t) = c_1 e^{\gamma t} \cos \omega t + c_2 e^{\gamma t} \sin \omega t + c_3 e^{\lambda_3 t} - d,$$

ezért

$$z(0) = c_1 + c_3 - d,$$

$$z^{(1)}(0) = c_1 \gamma + c_2 \omega + c_3 \lambda_3 = -\beta y(0),$$

$$z^{(2)}(0) = c_1 (\gamma^2 - \omega^2) + c_2 2\gamma\omega + c_3 \lambda_3^2 = -\beta [x(0) - y(0) + z(0)],$$

és

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \gamma & \omega & \lambda_3 \\ (\gamma^2 - \omega^2) & 2\gamma\omega & \lambda_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z(0) + d \\ -\beta y(0) \\ -\beta [x(0) - y(0) + z(0)] \end{pmatrix}.$$

4.3. Numerikus implementálás, nehézségek

Az előző szakaszban ismertettük a megoldás meghatározására szolgáló esetkezeléses eljárást. Ez alapján már lehetőségünk nyílik a Chua-rendszer viselkedésének, pályáinak numerikus meghatározására és vizsgálatára. Ehhez `Matlab`-kódot [6] készítettünk, amely megtalálható a dolgozat Függelékében.

A program folyamatosan vizsgálja, hogy x pillanatnyi értéke melyik tartományba esik ($x < -1$, $-1 \leq x \leq 1$ vagy $x > 1$), és ez alapján tekinti a megfelelő lineáris rendszert.

Ha a numerikusan meghatározott pálya átlép két tartomány határán (ekkor $x = 1$ vagy $x = -1$), akkor új kezdeti értéként a törésponthoz tartozó $(x, y, z)^T$ értéket kell alkalmazni. Ennek minél pontosabb meghatározására van szükségünk, melyre számos iteratív numerikus technika létezik.

Mivel a program megvalósítása során a Bolzano-tételen alapuló *felező módszert* alkalmaztuk, ezért a tétel kimondása után egy példán megmutatjuk az algoritmus működését.

4. *Tétel. (Bolzano)* Ha $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos és zárt (kompakt) intervallumon értelmezett folytonos függvény, és $f(a)f(b) < 0$, akkor létezik $c \in (a, b)$ úgy, hogy $f(c) = 0$.

A tétel tananyag, ezért a bizonyítást nem közöljük, az számos könyvben, jegyzetben (pl. [8]-ben) megtalálható.

Az alábbi példán megmutatjuk, hogyan alkalmazható a felező módszer a Chua-rendszer esetében a határátlépések esetén szükséges új kezdeti értékek meghatározására.

1. *Példa.* Tegyük fel, hogy valamely $i \in \mathbb{N}$ időlépésre létezik

$$(x_i, y_i, z_i)^T \text{ és } (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})^T \text{ úgy, hogy } x_i < -1 = x_{\text{vált}} < x_{i+1}.$$

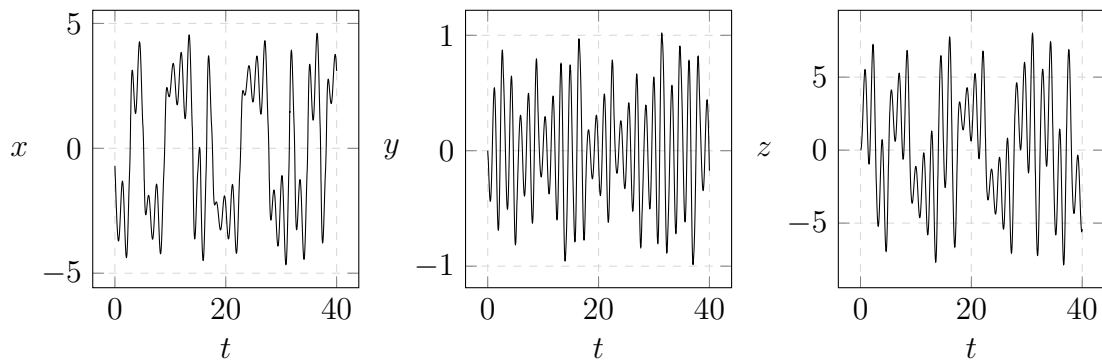
Ekkor tudjuk, hogy átléptünk az $x < -1$ tartományból a $-1 \leq x \leq 1$ tartományba. Legyen ε adott. Meghatározandó az új $(\hat{x}(\varepsilon), \hat{y}(\varepsilon), \hat{z}(\varepsilon))^T$ kezdeti feltétel a $-1 \leq x \leq 1$ tartományhoz tartozó lineáris rendszerhez.

Legyen t_i és t_{i+1} az idő értéke az i -edik és az $i + 1$ -edik időlépésben. Kezdetben $a_0 = t_i, b_0 = t_{i+1}$. A k -adik lépésben ($k = 0, 1, 2, \dots$) járjunk el a következő, tetszőleges tartományátlépés esetén alkalmazható algoritmus szerint:

1. Határozzuk meg $(x(c_k), y(c_k), z(c_k))^T$ értékét, ahol $c_k = (a_k + b_k)/2$, továbbá legyen $f(c_k) = x(c_k) - x_{\text{várt}}$;
2. Ha $|f(c_k)| < \varepsilon$, akkor $(\hat{x}(\varepsilon), \hat{y}(\varepsilon), \hat{z}(\varepsilon))^T = (x(c_k), y(c_k), z(c_k))^T$ és az algoritmus leáll;
3. Ha $|f(c_k)| \geq \varepsilon$, $f(c_k) < 0$ és $f(a_k) < f(b_k)$, akkor $a_{k+1} = c_k$ és $b_{k+1} = b_k$;
4. Ha $|f(c_k)| \geq \varepsilon$, $f(c_k) < 0$ és $f(a_k) > f(b_k)$, akkor $a_{k+1} = a_k$ és $b_{k+1} = c_k$;
5. Ha $|f(c_k)| \geq \varepsilon$, $f(c_k) > 0$ és $f(a_k) > f(b_k)$, akkor $a_{k+1} = c_k$ és $b_{k+1} = b_k$;
6. Ha $|f(c_k)| \geq \varepsilon$, $f(c_k) > 0$ és $f(a_k) < f(b_k)$, akkor $a_{k+1} = a_k$ és $b_{k+1} = c_k$.

Könnyen belátható, hogy bármely $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [t_i, t_{i+1}]$ intervallum esetén $f(a_{k+1})f(b_{k+1}) < 0$, így a Bolzano-tétel miatt a kapott algoritmus tetszőlegesen kicsi ε mellett véges időben lefut.

A gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy a numerikus problémák kiküszöbölésének érdekében az $(\hat{x}(\varepsilon), \hat{y}(\varepsilon), \hat{z}(\varepsilon))^T$ kezdeti feltétel lehető legpontosabb meghatározására van szükség. Célszerű ezért ε értékét minél kisebbre (pl. $\varepsilon = 10^{-12}$) választani.



4.1. ábra. Szimulációs eredmények: az x, y, z koordináták t függvényében

Az alábbiakban közlünk néhány szimulációs eredményt, melyek a 4.1., 4.2. és 4.3. ábrákon láthatók. Az eredmények a következő paraméterek mellett adódtak:

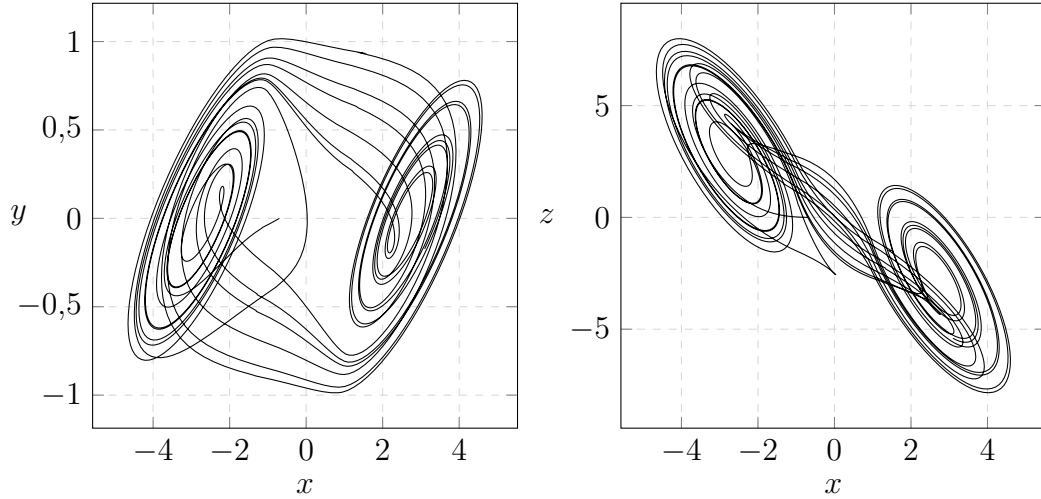
$C_1 = 10$ nF, $C_2 = 156$ nF, $G = 1$ mS, $L = 6$ mH, $G_a = 1,5G$, $G_b = -0,7G$, $t \in [0, 40]$ s, az időlépések száma $i = 2000$.

A villamos paraméterekből származtatott dimenzió nélküli együtthatók és a kezdeti érték:

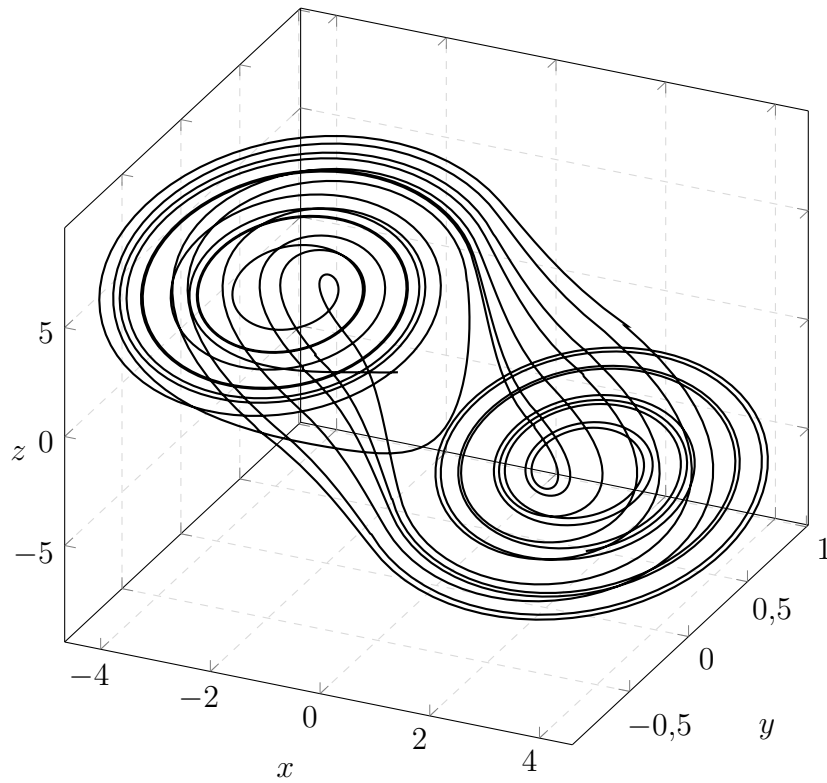
$$\alpha = 15,6, \beta = 26, m_0 = -1,5, m_1 = -0,7, (x(0), y(0), z(0))^T = (-0,7, 0, 0)^T.$$

Az egyes szakaszokhoz tartozó sajátértékek a következők:

$$\lambda(\alpha, \beta, m_0) \approx \begin{pmatrix} 9,0097 \\ -1,1049 + 4,6139i \\ -1,1049 - 4,6139i \end{pmatrix}, \quad \lambda(\alpha, \beta, m_1) \approx \begin{pmatrix} -6,3328 \\ 0,3264 + 4,3712i \\ 0,3264 - 4,3712i \end{pmatrix}.$$



4.2. ábra. Szimulációs eredmények: y és z függése x -től



4.3. ábra. A rendszer pályája

5. fejezet

Hopf-bifurkáció

Ebben a fejezetben egy kétdimenziós példán keresztül ismertetjük a Hopf-bifurkációt. Az elméleti áttekintés után numerikus módszerek segítségével mutatunk példát a jelenségre a dolgozatban vizsgált Chua-rendszerben.

5.1. Elméleti bevezető

Hopf-bifurkáció során – valamely rendszerparaméter megváltoztatásával – egyensúlyi helyzet környezetében periodikus pálya jön létre vagy tűnik el. Ennek szükséges feltétele, hogy a rendszer valamely egyensúlyi helyzetében felírt Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékeinek valós része a paraméterváltoztatás során előjelet váltson.

A jelenség bemutatásához tekintsük a következő kétdimenziós rendszert, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter:

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\mu x - y - x(x^2 + y^2)}_{g(x,y)}, \\ \dot{y} = \underbrace{x + \mu y - y(x^2 + y^2)}_{h(x,y)}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Azonnal látszik, hogy $(0,0)$ tetszőleges μ esetén egyensúlyi helyzet. A Jacobi-mátrixhoz tekintsük az alábbi deriváltakat:

$$\begin{aligned} \partial_x g(x,y) &= \mu - 3x^2 - y^2, & \partial_y g(x,y) &= -2xy - 1, \\ \partial_x h(x,y) &= 1 - 2xy, & \partial_y h(x,y) &= \mu - 3y^2 - x^2, \end{aligned}$$

melyek alapján a $(0,0)$ -hoz tartozó Jacobi-mátrix:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Könnyen megmutatható, hogy $J(0,0)$ sajátértékei: $\mu \pm i$. Világos, hogy ezek a sajátértékek $\mu = 0$ esetén a képzetes tengelyre esnek, és ha μ áthalad a nullán, akkor a valós részük előjelet vált.

Legyen $z = x + iy$ komplex változó. Ekkor $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$. Behelyettesítve (5.1) egyenleteit, valamint felhasználva, hogy $|z|^2 = x^2 + y^2$, egyszerűen ellenőrizhető, hogy fennál a

$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2$$

egyenlőség. Térjünk át polárkoordinátákra, azaz legyen $z = re^{i\varphi}$, ahol $r = |z|$ és $\tan \varphi = \mathcal{I}m(z) / \mathcal{R}e(z)$. Figyelembe véve, hogy ebben az esetben z , r és φ is t függvénye, a polárkoordinátás formula deriválásával azt kapjuk, hogy

$$\dot{z} = \dot{r}e^{i\varphi} + re^{i\varphi}i\dot{\varphi}.$$

Tegyük egyenlővé a \dot{z} -ra kapott két összefüggést úgy, hogy z helyett annak polárkoordinátás alakját használjuk. Így azt kapjuk, hogy

$$\dot{r}e^{i\varphi} + re^{i\varphi}i\dot{\varphi} = (\mu + i)re^{i\varphi} - re^{i\varphi}r^2.$$

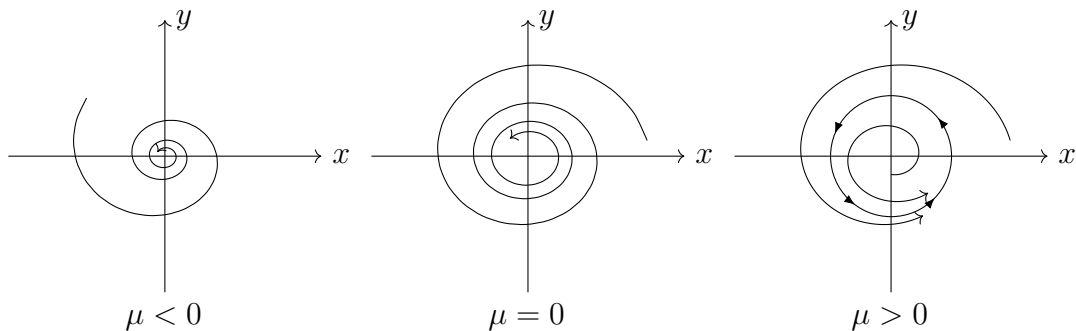
Egyszerűsítve az $e^{i\varphi}$ nemnulla tényezővel az $\dot{r} + ir\dot{\varphi} = (\mu + i)r - r^3$ összefüggésre jutunk.

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha az egyenlet két oldalán elhelyezkedő valós és képzetes részek megegyeznek, ami az alábbi egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

A μ paraméter függvényében három esetet szükséges vizsgálni:

1. Ha $\mu = 0$, akkor $\dot{r} = -r^3$. Tudjuk, hogy r pozitív, hiszen $r = |z| > 0$, ezért $-r^3 < 0$, így $\dot{r} < 0$, azaz r szigorúan monoton csökken, tehát a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet stabil. (A konkrét példánál globálisan aszimptotikusan stabil.)
2. Ha $\mu < 0$, akkor bármely r esetén $r(\mu - r^2) < 0$, tehát $\dot{r} < 0$. Látjuk, hogy r ebben az esetben is szigorúan monoton csökken, de kis $|r|$ esetén az előzőnél gyorsabban.
3. Ha $\mu > 0$, akkor három aleset lehetséges:
 - Ha $r = \sqrt{\mu}$, akkor $\dot{r} = 0$, r konstans, tehát van egy $\sqrt{\mu}$ sugarú periodikus pálya;
 - Ha $r > \sqrt{\mu}$, akkor \dot{r} negatív, r tehát szigorúan monoton csökken;
 - Ha $0 < r < \sqrt{\mu}$, akkor \dot{r} pozitív, r ezért szigorúan monoton nő.



5.1. ábra. Szuperkritikus Hopf-bifurkáció

Azt látjuk, hogy $\mu > 0$ esetén a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet instabil, és a periodikus megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabil. Ez azt jelenti, hogy a periodikus pályához közel indított megoldások örökre közel maradnak, és a periodikus pályának létezik olyan környezete, hogy az abból indított megoldások a periodikus pályához konvergálnak.

Ezt a jelenséget *szuperkritikus Hopf-bifurkációnak* nevezzük. A különböző paraméterekhez tartozó fázisképeket az 5.1. ábrán szemléltetjük.

Tekintsük most az alábbi rendszert:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \mu y + y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (5.2)$$

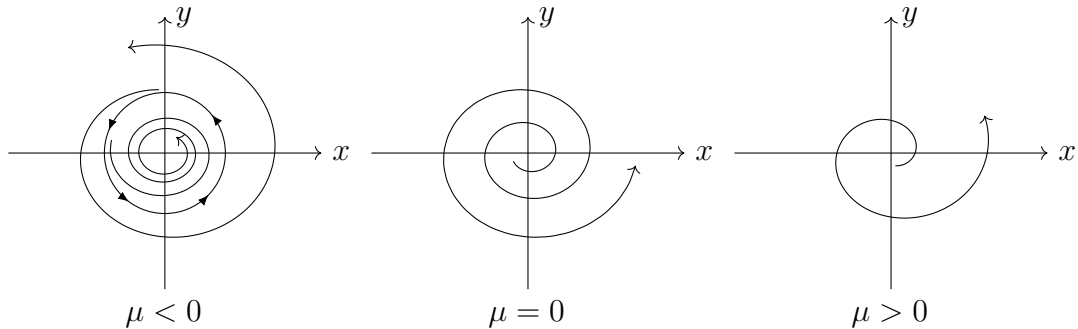
Az előző esettel teljesen analóg módon eljárva azt kapjuk, hogy (5.2) ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu + r^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Ezúttal is három esetet szükséges vizsgálni μ paramétertől függően:

1. Ha $\mu = 0$, akkor $\dot{r} = r^3$ pozitív, azaz r szigorúan monoton nő, tehát a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet instabil.
2. Ha $\mu > 0$, akkor bármely r esetén $r(\mu + r^2) > 0$, ezért \dot{r} pozitív. Látjuk, hogy r ebben az esetben is szigorúan monoton nő, de kis $|r|$ esetén az előzőnél gyorsabban.
3. Ha $\mu < 0$, akkor három aleset lehetséges:
 - Ha $r = \sqrt{-\mu}$, akkor $\dot{r} = 0$, r tehát konstans és van egy $\sqrt{-\mu}$ sugarú periodikus pálya;
 - Ha $r > \sqrt{-\mu}$, akkor \dot{r} pozitív, r ezért szigorúan monoton nő;
 - Ha $0 < r < \sqrt{-\mu}$, akkor \dot{r} negatív, r tehát szigorúan monoton csökken.

Azt látjuk, hogy ekkor a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet stabil, a periodikus pálya pedig instabil. A rendszer ekkor *szubkritikus Hopf-bifurkáción* megy keresztül. A különböző paraméterekhez tartozó fázisképeket az 5.2. ábra szemlélteti.



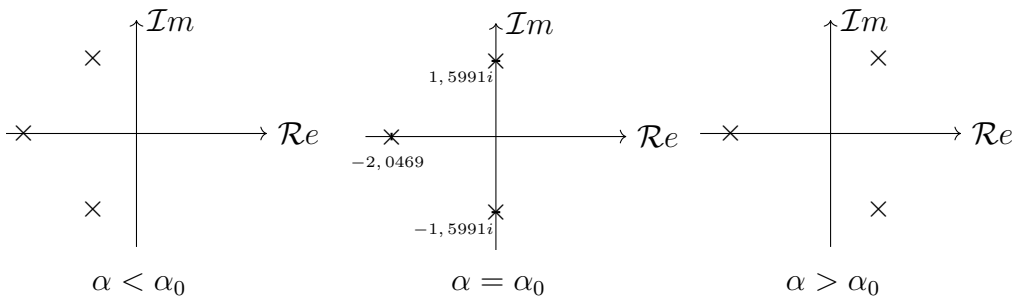
5.2. ábra. Szubkritikus Hopf-bifurkáció

5.2. Hopf-bifurkáció a Chua-rendszerben

Ebben a szakaszban numerikus vizsgálatok segítségével mutatunk példát szuperkritikus Hopf-bifurkációra a Chua-rendszerben. Ehhez tekintsük ismét a (2.12) egyenletrendszert. Elvégezve az egyenletek jobb oldalának x -, y - és z -szerinti deriválását a következő Jacobi-mátrixot kapjuk:

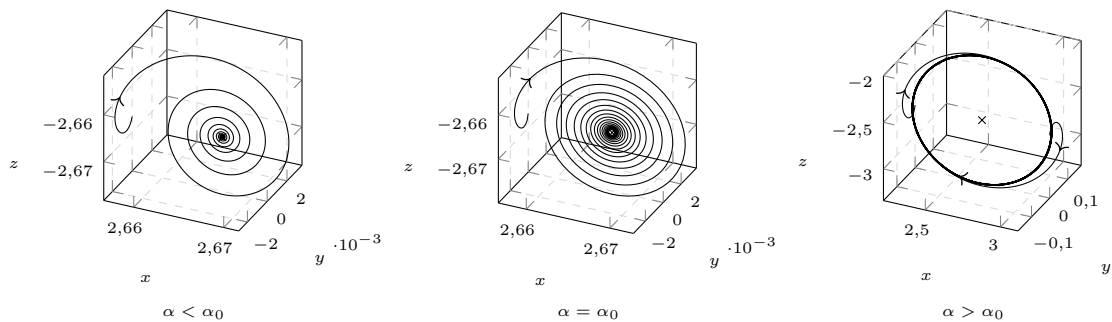
$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\alpha(1 + m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Látjuk, hogy a Jacobi-mátrix nem függ az x , y és z változóktól. Olyan α_0 és β_0 paramétereket keresünk $m_1 = -0,7$ mellett, hogy ha α áthalad α_0 -on és β rögzítve van β_0 -ban, akkor J komplex konjugált sajátértékeinek valós része előjelet vált.



5.3. ábra. A Jacobi-mátrix sajátértékei α_0 környezetében

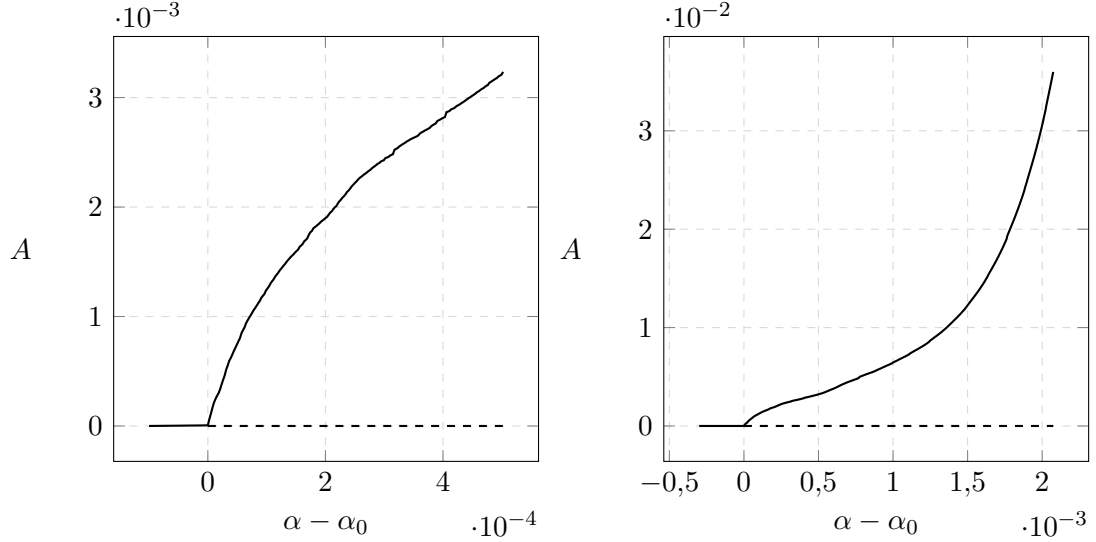
A [3] dolgozat szerint ha $d \neq 0$ és $\beta_0 \in (0, 15)$, akkor létezik ilyen α_0 a $(0, 5)$ intervallumban. Legyen $\beta = \beta_0 = 5$ és $m_1 = -0,7$ rögzített. Ezen feltételeket figyelembe véve Matlab-kódot írtunk azon kritikus $\alpha = \alpha_0$ meghatározására, amely esetén a Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátértékei éppen a képzetes tengelyre esnek. A kódot a dolgozat Függeléke tartalmazza.



5.4. ábra. Fázisképek különböző α paraméterek esetén

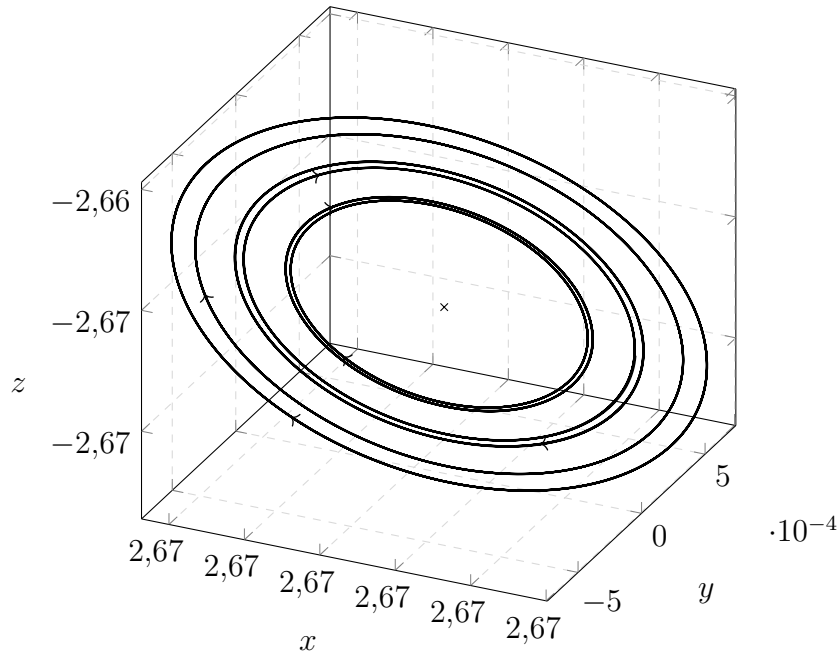
A szimulációs eredmények alapján a kritikus α -érték a megadott feltételek mellett $\alpha_0 \approx 3,4896$. A Jacobi-mátrix sajátértékeinek viselkedését az 5.3. ábrán, a rendszer fázisképeit különböző α paraméterek és $m_0 = 1,5$ esetén, az $((m_1 - m_0) / (1 + m_1), 0, (m_0 - m_1) / (1 + m_1))^T$ egyensúlyi helyzet környezetében pedig az 5.4. ábrán szemléltetjük.

A numerikus vizsgálatok alapján kapott fázisképek azt mutatják, hogy $\alpha \leq \alpha_0$ esetén az $((m_1 - m_0) / (1 + m_1), 0, (m_0 - m_1) / (1 + m_1))^T$ egyensúlyi helyzet stabil, de $\alpha > \alpha_0$ esetén ez az egyensúlyi helyzet instabil, és megjelenik egy aszimptotikusan stabil periodikus pálya.



5.5. ábra. Bifurkációs diagramok

Azt látjuk, hogy a Chua-rendszer szuperkritikus Hopf-bifurkáción megy keresztül. A rendszer bifurkációs diagramját, azaz a periodikus pálya A amplitúdóját α függvényében különböző tartományok és $\alpha > \alpha_0$ esetén az 5.5. ábra szemlélteti, az 5.6. ábrán pedig néhány periodikus pálya numerikus közelítése látható.



5.6. ábra. Periodikus pályák

6. fejezet

Perióduskettőző (flip-) bifurkáció

Ebben a fejezetben egy példa segítségével ismertetjük a perióduskettőző (más néven flip-) bifurkációt leképezésekre, majd megmutatjuk, mit jelent a perióduskettőző bifurkáció differenciálegyenlet-rendszerek esetén. Az elméleti bevezetőt követően példát mutatunk a jelenségre a Chua-rendszerben.

6.1. Flip-bifurkáció leképezések esetén

A perióduskettőző (vagy flip-) bifurkáció bemutatásához tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, \alpha) \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \in \mathbb{R}$$

leképezést $(0, 0)$ közelében, és vezessük be az $f_\alpha(x) = f(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, jelölést.

7. *Definíció.* Legyen $\varphi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ leképezés, és legyen $x \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy x a φ leképezés *fixpontja*, ha $\varphi(x) = x$.

Világos, hogy az f_α leképezés fixpontjai éppen az $x = -(1 + \alpha)x + x^3$ egyenlet megoldásai. Azonnal látszik, hogy $x = 0$ fixpont. Ha $x \neq 0$, akkor

$$1 = -1 - \alpha + x^2 \iff 2 + \alpha = x^2 \iff x = \pm\sqrt{2 + \alpha} \not\approx 0, \text{ ha } |\alpha| \text{ kicsi,}$$

ezért az $x = 0$ a leképezés egyetlen origóközeli fixpontja.

Leképezések esetén a bifurkáció szükséges feltétele, hogy a fixpontban vett deriválnak legyen olyan sajátértéke, ami az egységkörre esik. Tekintsük f x -szerinti deriváltját: $f'_x = -(1 + \alpha) + 3x^2$. Látjuk, hogy $f'_x(0, \alpha) = -(1 + \alpha)$, ezért $\alpha = 0$ esetén $f'_x(0, 0) = -1$, ami az egységkörre esik.

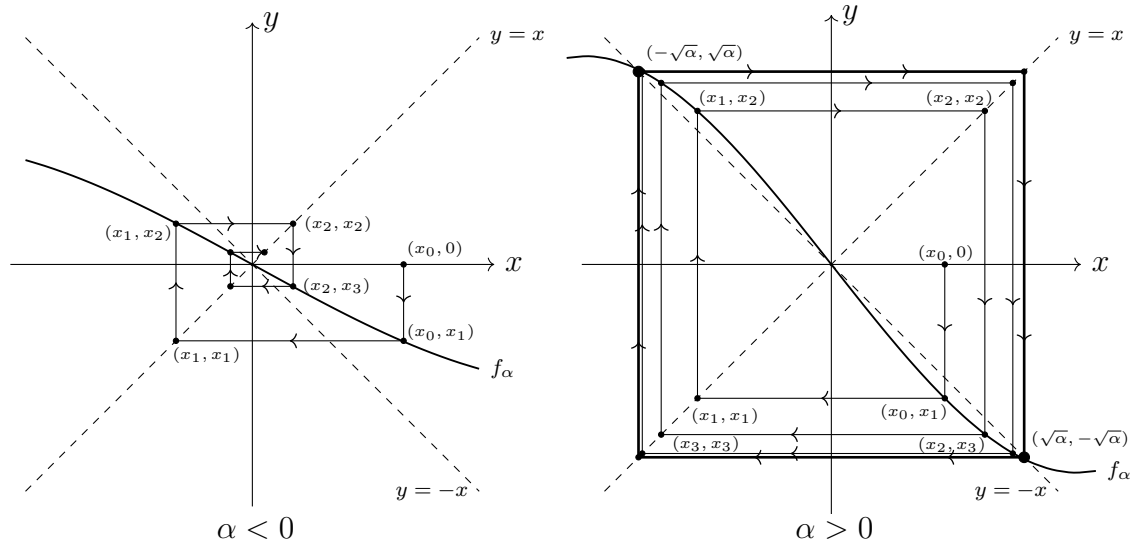
Vizsgáljuk most a leképezés második iteráltjának fixpontjait:

$$f_\alpha^2(x) = f_\alpha(f_\alpha(x)) = -(1 + \alpha)f_\alpha(x) + (f_\alpha(x))^3.$$

Elvégezve a behelyettesítést, valamint figyelembe véve, hogy $|x|$ kicsi,

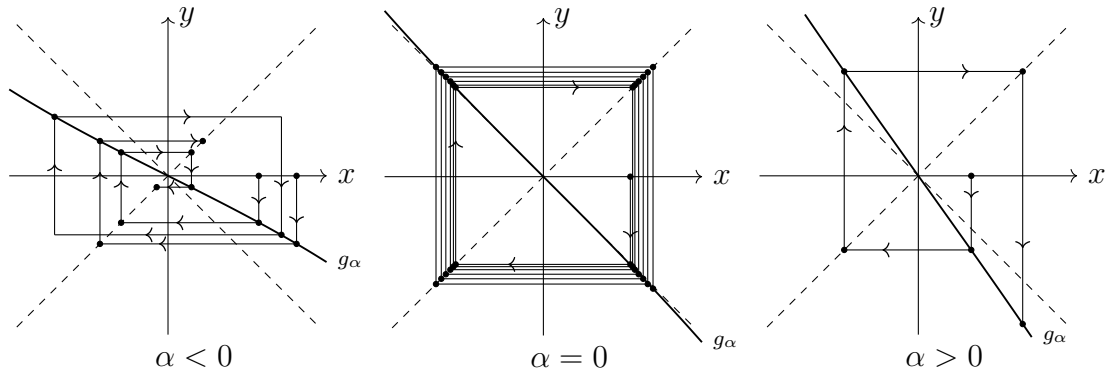
$$f_\alpha^2(x) = (1 + \alpha)^2 x - [(1 + \alpha) + (1 + \alpha)^3] x^3 + \mathcal{O}(x^5) = (1 + \alpha)^2 x + \mathcal{O}(x^3)$$

írható fel. Az világos, hogy $x = 0$ fixpontja f_α^2 -nek is. Megmutatható, hogy f_α^2 -nek csak $\alpha > 0$ esetén létezik további nemtriviális fixpontja, és belátható az is, hogy pontosan kettő ilyen van: $\sqrt{\alpha}$ és $-\sqrt{\alpha}$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $f_\alpha(\pm\sqrt{\alpha}) = \mp\sqrt{\alpha}$, azaz f_α^2 fixpontjai éppen f_α 2-periodikus pályáját adják.

6.1. ábra. Szuperkritikus flip-bifurkáció (Jelölés: $x_{n+1} = f_\alpha(x_n)$, $n \geq 0$)

Vizsgáljuk meg az úgynevezett pókháló-módszer segítségével f_α fixpontjának, valamint 2-periodikus pályájának stabilitását.

A 6.1. ábra alapján $\alpha < 0$ esetén $x = 0$ vonzza az x_0, x_1, x_2, \dots pályát, ezért az f_α leképezés $x = 0$ fixpontja aszimptotikusan stabil. Ha $\alpha = 0$, akkor f_α érinti az $y = -x$ egyenest, és a pókháló-módszer segítségével megmutatható, hogy $x = 0$ aszimptotikusan stabil. Azt is látjuk, hogy a kicsi, pozitív α esetén kialakuló 2-periodikus megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabil, és $x = 0$ elveszíti a stabilitását. Ezt a jelenséget *szuperkritikus flip-bifurkációnak* nevezzük.



6.2. ábra. Szubkritikus flip-bifurkáció

Hasonlóan vizsgálható a

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, \alpha) \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3 \in \mathbb{R}$$

leképezés is az origó közelében. Megmutatható, hogy kizárólag $\alpha < 0$ esetén létezik 2-periodikus pálya, és ebben az esetben $g_\alpha(\pm\sqrt{-\alpha}) = \mp\sqrt{-\alpha}$. A 6.2. ábrán azt látjuk, hogy ha $\alpha < 0$, akkor az $x = 0$ fixpont stabil, a 2-periodikus pálya pedig instabil. Ha $\alpha \geq 0$, akkor a pókháló-módszer alapján az $x = 0$ fixpont instabil. Ezt a jelenséget *szubkritikus flip-bifurkációnak* nevezzük.

Az itt bemutatott példáktól eltérő leképezésekre az alábbi tétel alkalmazható, melynek bizonyítása megtalálható például a [9] könyvben.

5. *Tétel.* Tegyük fel, hogy a háromszor folytonosan differenciálható $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ leképezésre teljesülnek az alábbi feltételek:

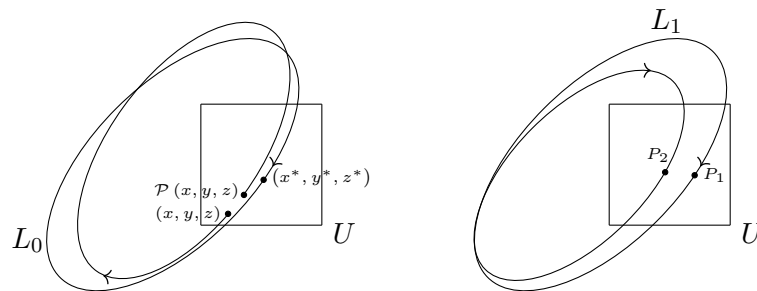
1. $f(0, 0) = 0$;
2. $f'_x(0, 0) = -1$;
3. $\frac{1}{2} [f''_{xx}(0, 0)]^2 + \frac{1}{3} f'''_{xxx}(0, 0) \neq 0$;
4. $f''_{x\alpha}(0, 0) \neq 0$.

Ekkor f perióduskettőző bifurkáción megy át, ahogy α áthalad a nullán.

6.2. Flip-bifurkáció differenciálegyenlet-rendszerek esetén

Ebben a szakaszban megmutatjuk, mit jelent a perióduskettőző (flip-) bifurkáció differenciálegyenlet-rendszerek esetében. Az egyszerűség kedvéért csak 3-dimenziós rendszereket tekintünk.

Tegyük fel, hogy a vizsgált háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszernek létezik L_0 periodikus pályája. Állítsunk L_0 -ra transzverzálisan egy síkot valamely



6.3. ábra. Flip-bifurkáció differenciálegyenlet-rendszerek esetén

(x^*, y^*, z^*) pontján keresztül, azaz úgy, hogy az L_0 pálya (x^*, y^*, z^*) -ban vett érintője ne essen bele a síkba. Tekintsük (x^*, y^*, z^*) egy kicsi U környezetét ebben a síkban. A differenciálegyenlet-rendszerek megoldásai folytonosan függenek a kezdeti feltételektől, ezért elég kicsi U környezet esetén a tetszőleges $(x, y, z) \in U$ kezdeti pontból induló megoldás újra metszeni fogja a síkot.

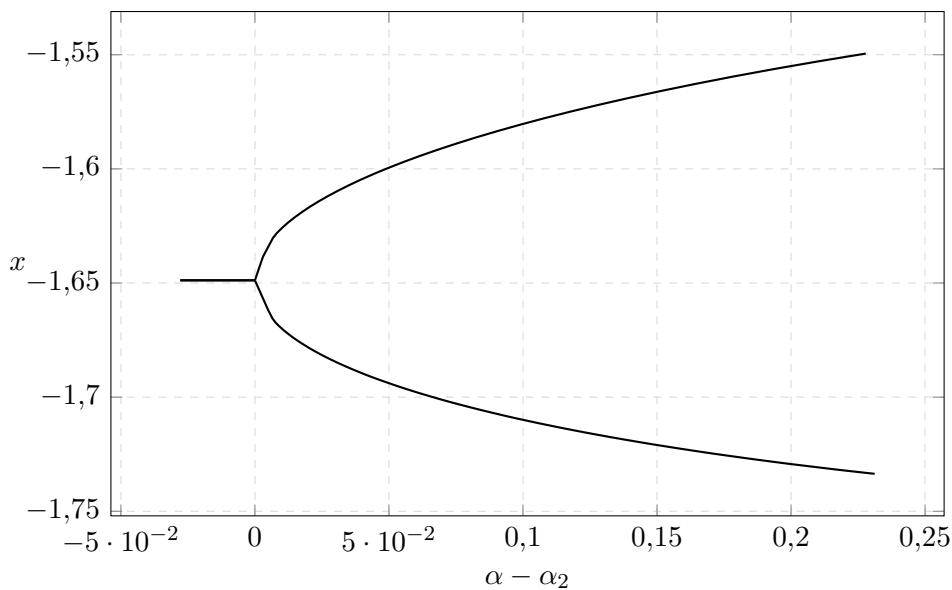
Definiáljuk a $\mathcal{P}: U \mapsto \mathbb{R}^3$ leképezést úgy, hogy tetszőleges $(x, y, z) \in U$ esetén $\mathcal{P}(x, y, z)$ legyen a sík azon pontja, ahol az (x, y, z) kezdeti pontból induló megoldás újra metszi a síkot. A \mathcal{P} leképezés fixpontjai megfeleltethetők a differenciálegyenlet-rendszer periodikus pályáinak. Világos, hogy az (x^*, y^*, z^*) pont \mathcal{P} fixpontja.

Ha bizonyos paraméterek esetén \mathcal{P} perióduskettőző bifurkáción megy át, azaz \mathcal{P} -nek lesz egy $P_1, P_2, P_1, P_2, \dots$ periodikus pályája, akkor az eredeti differenciálegyenlet-rendszer L_0 periodikus pályája közelében megjelenik egy új, L_1 periodikus pálya úgy, hogy ezen pálya minimális periódusa megközelítőleg kétszerese az eredetinek. Differenciálegyenlet-rendszerek esetén ezt a jelenséget nevezzük perióduskettőző bifurkációnak. A jelenséget a 6.3. ábra szemlélteti.

6.3. A jelenség megfigyelése a Chua-rendszerben

Az alábbiakban numerikus vizsgálatok segítségével mutatunk példát perióduskettőző bifurkációkra a Chua-rendszerben. Az ehhez írt `Matlab`-scriptet a Függelék tartalmazza. A [3] dolgozat alapján, ha $m_0 = -8/7$, $m_1 = -5/7$ és $\beta = 16$ rögzített, és α 8,855 és 9,173 között mozog, akkor a Chua-rendszer perióduskettőző bifurkációk sorozatán megy keresztül.

Először vizsgáljuk a rendszert 8,8557-közel α paraméterekre. Tekintsük egy periodikus pálya L_0 közelítését $\alpha = 8,855$ esetén, és legyen $(x_0, y_0, z_0) \in L_0$. Állítsunk (x_0, y_0, z_0) -ra egy S síkot úgy, hogy az L_0 -ra nézve transzverzális legyen. Ezt megtehetjük például úgy, hogy S normálvektorát $(\tilde{x} - x_0, \tilde{y} - y_0, \tilde{z} - z_0)$ -nak választjuk, ahol $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in L_0$ egy tetszőleges pont (x_0, y_0, z_0) kis környezetében.



6.4. ábra. Bifurkációs diagram $\alpha_2 \approx 8,8557$ környezetében

Az α paraméter növelése esetén minden egyes α értékre egy stabil periodikus pályát figyelhetünk meg. A 6.4. ábra azt szemlélteti, hogy mi az x -koordinátája ezen periodikus pályák és az S sík (x_0, y_0, z_0) -hoz közeli metszéspontjainak. Ez a szimuláció azt támasztja alá, hogy a rendszer perióduskettőző bifurkáción megy keresztül.

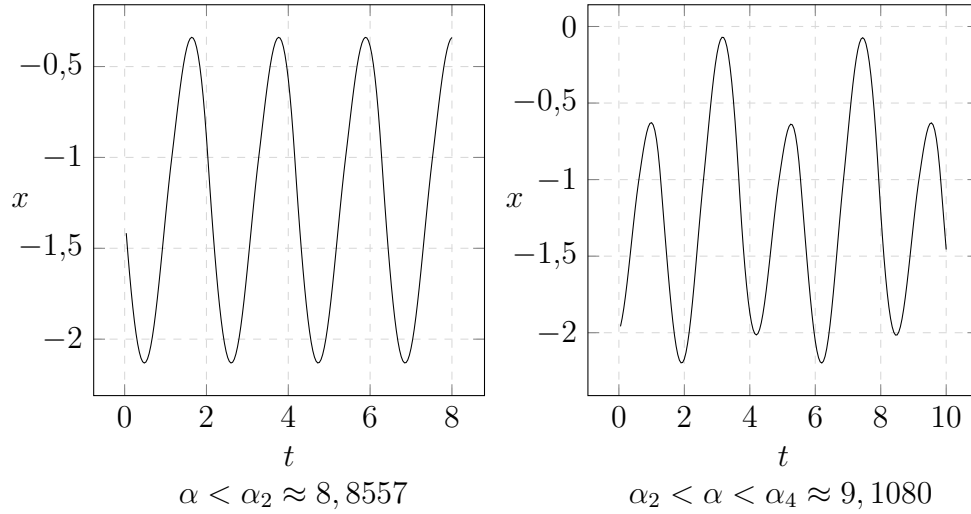
Ez azt jelenti, hogy létezik egy kritikus $\alpha_2 \approx 8,8557$ paraméter a következő tulajdonságokkal: Ha $\alpha < \alpha_2$, és α közel van α_2 -höz, akkor létezik egy orbitálisan stabil periodikus megoldás. Ha $\alpha > \alpha_2$ és $\alpha - \alpha_2$ kicsi, akkor azt láthatjuk, hogy ez a periodikus megoldás elveszíti stabilitását, és a közelében minden α esetén figyelhetünk egy olyan másik stabil periodikus pályát, melynek minimális periódusa megközelítőleg kétszerese az eredeti periodikus megoldásénak. Világos, hogy ezen periodikus pályáknak és az S síknak (x_0, y_0, z_0) közelében két metszéspontja van.

A 6.4. bifurkációs diagram numerikus előállításánál számos technikai nehézséggel szembesültünk. Az S sík és az $\alpha > \alpha_2$ esetén közelített L_α periodikus megoldások metszéspontjainak numerikus meghatározása során szükség van egy jól megválasztott $\varepsilon > 0$ küszöbértékre azon $(x_k, y_k, z_k) \in L_\alpha$, $k = 1, 2, \dots$ pontok megtalálásához,

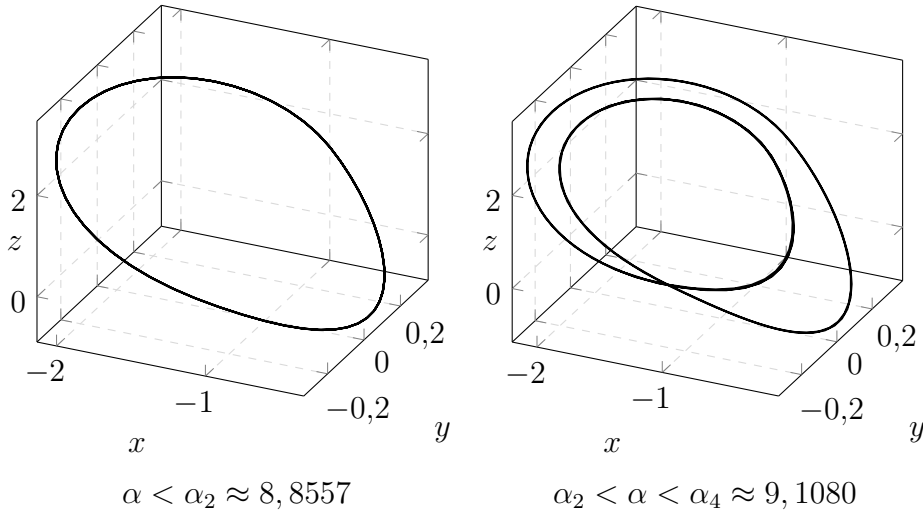
amelyek ε -nál nagyobb pontossággal kielégítik S egyenletét, azaz kielégítik az

$$|x_k(\tilde{x} - x_0) + y_k(\tilde{y} - y_0) + z_k(\tilde{z} - z_0) - d| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget, ahol $d = x_0(\tilde{x} - x_0) + y_0(\tilde{y} - y_0) + z_0(\tilde{z} - z_0)$. A gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy az $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ választás megfelelő. Ezt követően ki kell válogatni azokat a pontokat, melyek (x_0, y_0, z_0) közelében találhatók. Ehhez (x_0, y_0, z_0) és (x_k, y_k, z_k) pontok euklideszi távolságát vizsgáljuk minden k -ra.



6.5. ábra. x időfüggvénye különböző α -értékek esetén



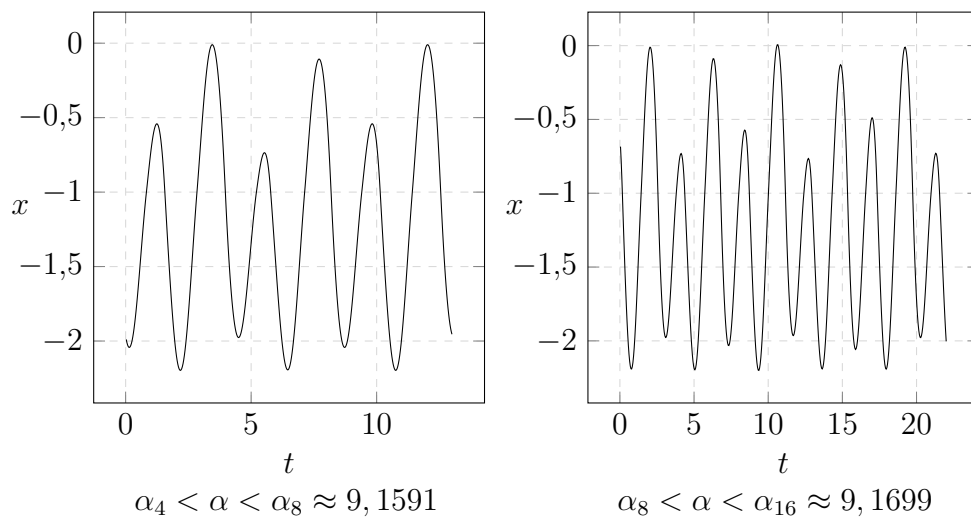
6.6. ábra. A rendszer pályája különböző α -értékek esetén

Az (x_0, y_0, z_0) -közeli pontokat ezután elhelyezkedésük szerint két csoportra kell osztani. Az utolsó lépés egy-egy pont kiválasztása ezen két csoportból aszerint, hogy a csoporton belül melyik pont elégíti ki a legpontosabban S egyenletét. A 6.4. ábra ezen két pont x -koordinátáját szemlélteti α függvényében.

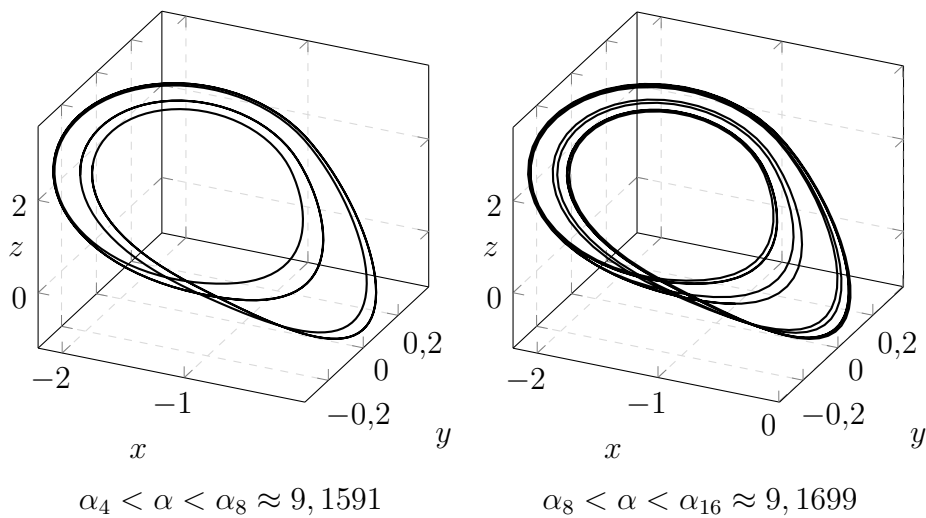
További szimulációs eredményeket láthatunk a 6.5., 6.6., 6.7. és a 6.8. ábrákon, amelyek azt támasztják alá, hogy a Chua-rendszerben perióduskettőző bifurkációk sorozata történik.

Az α paraméter értékét tovább növelve $\alpha_4 \approx 9,1080$ és $\alpha_8 \approx 9,1591$ kritikus értékek közé olyan orbitálisan stabil periodikus megoldásokat figyelhetünk meg, melyek minimális periódusa megközelítőleg kétszerese az $\alpha_2 < \alpha < \alpha_4$ esetén vizsgált periodikus pályáknak, ezért négyszerese L_0 minimális periódusának.

Amennyiben az α paraméter értékét tovább növeljük, úgy azt tapasztaljuk, hogy bizonyos α_{2^n} , $n = 1, 2, \dots$ kritikus paraméterek esetén L_0 közelében megfigyelhető periodikus megoldások rendre elveszítik stabilitásukat, és kis környezetükben további periodikus megoldások bifurkálódnak, melyek minimális periódusa 2^n -szerint növekszik L_0 minimális periódusához képest.



6.7. ábra. x időfüggvénye különböző α -értékek esetén



6.8. ábra. A rendszer pályája különböző α -értékek esetén

7. fejezet

Káosz

Hétköznapi értelemben a "káosz" kifejezés egyfajta rendezetlen, szokatlan, megjósolhatatlan viselkedésre utal. A matematikában leképezések esetén találkozhatunk kaotikus viselkedéssel, melynek pontos definiálása a következő célunk.

Ebben a fejezetben ismertetjük a káosz definíciójához szükséges alapfogalmakat, majd a definíciót követően példát mutatunk káoszra a Chua-rendszerben.

7.1. Alapfogalmak

Tekintsük az \mathcal{X} metrikus teret d metrikával, legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ folytonos leképezés, valamint vezessük be az $N_\varepsilon(x) = \{y \in \mathcal{X} \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ jelölést. Utóbbit x ε -sugarú környezetének nevezzük. Az \mathcal{X} metrikus tér $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmaza *nyílt*, ha bármely $x \in \mathcal{U}$ esetén létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $N_\varepsilon(x) \subset \mathcal{U}$. Ha \mathcal{X} metrikus tér, $x \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$, akkor $N_\varepsilon(x)$ nyílt.

8. *Definíció.* A $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz *sűrű* \mathcal{X} -ben, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik $y \in \mathcal{D}$ úgy, hogy $d(x, y) \leq \varepsilon$.

Például az $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ és $\mathcal{D} = \mathbb{Q}$ választás esetén \mathcal{D} sűrű \mathcal{X} -ben, mert bármely két valós szám között végtelen sok racionális szám található.

9. *Definíció.* Az f leképezés *topologikusan tranzitív*, ha bármely nyílt, nemüres $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazok esetén létezik $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathcal{U}$ úgy, hogy $f^n(x) \in \mathcal{V}$.

5. *Állítás.* Ha létezik $x_0 \in \mathcal{X}$ úgy, hogy az f leképezés x_0 -ból induló pályája sűrű \mathcal{X} -ben, akkor f topologikusan tranzitív.

Bizonyítás. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ leképezés, legyenek $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ tetszőleges, nyílt, nemüres halmazok, és tegyük fel, hogy az f leképezés x_0 -ból induló pályája sűrű \mathcal{X} -ben. Ebből következik, hogy létezik $k, m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $f^k(x_0) \in \mathcal{U}$ és $f^m(x_0) \in \mathcal{V}$. Ha $m \geq k$, akkor készen vagyunk az $n = m - k$ választással.

Amint már említettük, a \mathcal{V} halmaz x_0 legalább egy iteráltját tartalmazza. Tegyük fel \mathcal{V} -ről, hogy x_0 véges sok iteráltját tartalmazza. Legyen $v \in \mathcal{V}$ úgy, hogy v nem iteráltja x_0 -nak. Tudjuk, hogy

$$\varepsilon = \min \{|v - f^n(x_0)|\} > 0,$$

ezért v $\varepsilon/2$ -sugarú környezete nem tartalmaz olyan elemet, amely x_0 iteráltja. Ekkor az x_0 -ból induló pálya nem sűrű \mathcal{X} -ben, ami ellentmondás.

Ebből következik, hogy a \mathcal{V} halmaz x_0 végtelen sok iteráltját tartalmazza, azaz létezik $m > k$ úgy, hogy $f^m(x_0) \in \mathcal{V}$. Ha az $n = m - k$ választással élünk, akkor a bizonyítás kész. \square

Egy kaotikus leképezéstől elvárt, hogy érzékenyen függjön a kezdeti adatoktól. Ezt a tulajdonságot pillangóhatásnak is szokás nevezni. A kezdeti adatoktól való érzékeny függés pontos definíciója a következő.

10. *Definíció.* Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ folytonos leképezés *érzékenyen függ a kezdeti adatoktól*, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ -hez és bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $y \in \mathcal{X}$ és $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $d(x, y) < \varepsilon$ és $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

7.2. A káosz definíciója

A káosznak számos definíciója létezik [10]. Az alábbi definíció *R. Devaney* amerikai matematikus nevéhez fűződik, aki 1989-ben publikálta azt először [11].

11. *Definíció.* (*Devaney*) Legyen \mathcal{X} metrikus tér. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ leképezés *kaotikus*, ha

- (a) periodikus pontjainak halmaza sűrű \mathcal{X} -ben,
- (b) topologikusan tranzitív, és
- (c) érzékenyen függ a kezdeti adatoktól.

Az alábbi tétel szerint, ha \mathcal{X} végtelen számosságú, f kaotikus viselkedéséhez elegendő csak az (a) és (b) feltételeket megkövetelni.

6. *Tétel.* Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ topologikusan tranzitív, és legyen f periodikus pontjainak halmaza sűrű \mathcal{X} -ben. Ekkor, ha \mathcal{X} végtelen számosságú, f érzékenyen függ a kezdeti feltételektől.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ topologikusan tranzitív, és periodikus pontjainak halmaza sűrű \mathcal{X} -ben. Jelölje $\text{Per}(f)$ ezt a halmazt.

Először megmutatjuk, hogy megadható $\delta_0 > 0$ úgy, hogy minden $x \in \mathcal{X}$ -hez létezik $q \in \text{Per}(f)$ a következő tulajdonsággal: bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(x, f^n(q)) \geq \delta_0$. Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ legalább δ_0 távolságra van f egy periodikus pályájától.

Legyen $p, q \in \text{Per}(f)$ különböző pályájú, és legyen

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min \{d(f^n(p), f^m(q)) \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Tudjuk, hogy p és q pályái véges sok pontot tartalmaznak, mert periodikusak, ezért $\delta_0 > 0$. A fenti definíció szerint p pályájának minden pontja legalább $2\delta_0$ távolságra van q pályájának összes pontjából. A háromszög-egyenlőtlenség értelmében

$$2\delta_0 \leq d(f^n(p), f^m(q)) \leq d(f^n(p), x) + d(x, f^m(q)),$$

tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén. Ez alapján két eset lehetséges:

- 1. Ha valamely n -re $d(f^n(p), x) \leq \delta_0$, akkor bármely m -re $d(x, f^m(q)) \geq \delta_0$, vagy
- 2. ha valamely m -re $d(x, f^m(q)) \leq \delta_0$, akkor bármely n -re $d(f^n(p), x) \geq \delta_0$,

ami azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ legalább δ_0 távolságra van vagy p vagy q periodikus pályájától.

Legyen most $\delta = \delta_0/4$, és $x \in \mathcal{X}$ tetszőleges. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez a δ megfelelő a kezdeti adatoktól való érzékeny függés igazolásához, azaz minden $x \in \mathcal{X}$ -hez és minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $y \in \mathcal{X}$ úgy, hogy $d(x, y) < \varepsilon$ és $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tekintettel arra, hogy ez a feltétel csökkenő ε esetén egyre szigorúbb, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\varepsilon < \delta$.

Mivel f periodikus pontjainak halmaza sűrű \mathcal{X} -ben, ezért létezik olyan $p \in \text{Per}(f)$ egy $k \in \mathbb{N}$ periódussal, hogy $d(x, p) < \varepsilon$. Továbbá a bizonyítás első része alapján tudjuk, hogy létezik $q \in \text{Per}(f)$ úgy, hogy $d(q \text{ pályája}, x) \geq \delta_0 = 4\delta$. Végül definiáljunk egy \mathcal{V} halmazt a következőképpen:

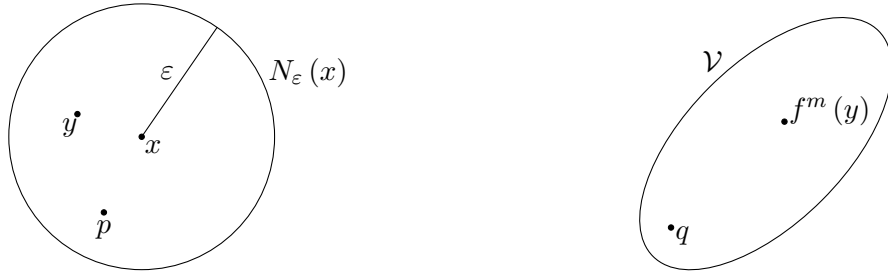
$$\mathcal{V} = \{x \mid d(f^i(x), f^i(q)) < \delta, \forall 0 \leq i \leq k\}.$$

A definícióból következik, hogy $q \in \mathcal{V}$, valamint megmutatható [10], hogy \mathcal{V} nyílt.

Mivel \mathcal{V} és $N_\varepsilon(x)$ nyílt halmazok, továbbá feltettük, hogy f topologikusan tranzitív, ezért létezik $y \in N_\varepsilon(x)$ és $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $f^m(y) \in \mathcal{V}$. Legyen $j \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\frac{m}{k} < j \leq \frac{m}{k} + 1 \iff 0 < kj - m \leq k.$$

A bizonyítás befejezése előtt tekintsük át az eddigieket. Az $x \in \mathcal{X}$ pont tetszőleges, valamint tudjuk, hogy $0 < \varepsilon < \delta$. Az $N_\varepsilon(x)$ halmazon belül található az alábbi három pont: az x , a p periodikus pont k periódussal, valamint az y .



7.1. ábra. A bizonyításban használt halmazok és elemek elhelyezkedése

A \mathcal{V} halmazról tudjuk, hogy $\mathcal{V} \cap N_\varepsilon(x) = \emptyset$. Ez következik \mathcal{V} definíciójából, és abból, hogy $d(x, f^n(q)) \geq \delta_0 = 4\delta$ minden n -re, valamint abból, hogy $\varepsilon < \delta$. Tudjuk azt is, hogy $q \in \mathcal{V}$, valamint ha $z \in \mathcal{V}$ és $i \leq k$, akkor $d(f^i(z), f^i(q)) < \delta$, és $f^m(y) \in \mathcal{V}$. Ezt mutatja a 7.1. ábra.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a $d(f^{kj}(p), f^{kj}(x)) > \delta$ és $d(f^{kj}(y), f^{kj}(x)) > \delta$ egyenlőtlenségek közül valamelyik mindig fennáll. Ekkor, mivel p és y pontok x -től mért távolsága kisebb, mint ε , teljesülnek a kezdeti adatoktól való érzékeny függés definíciójában előírt egyenlőtlenségek.

Mivel y olyan, hogy $f^m(y) \in \mathcal{V}$, ezért \mathcal{V} definíciója alapján

$$d(\underbrace{f^{kj}(y)}_{f^{kj-m}(f^m(y))}, f^{kj-m}(q)) < \delta, \text{ hiszen } kj - m \leq k.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával pedig azt kapjuk, hogy

$$d(x, f^{kj-m}(q)) \leq d(x, p) + d(p, f^{kj}(y)) + d(f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)).$$

Egyrészt feltettük, hogy $d(x, p) < \varepsilon < \delta$. Másrészt az előbb megmutattuk, hogy $d(f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)) < \delta$, ezért

$$d(x, f^{kj-m}(q)) < d(p, f^{kj}(y)) + 2\delta.$$

Mivel tudjuk, hogy $d(x, f^{kj-m}(q)) > \delta_0 = 4\delta$, ezért az előző egyenlőtlenségből az következik, hogy $d(p, f^{kj}(y)) > 2\delta$. Tudjuk, hogy p -nek k periódusa, ezért $f^{kj}(p) = p$, így $d(f^{kj}(p), f^{kj}(y)) > 2\delta$. Végül vegyük észre, hogy

$$2\delta < d(f^{kj}(p), f^{kj}(y)) \leq d(f^{kj}(p), f^{kj}(x)) + d(f^{kj}(x), f^{kj}(y)),$$

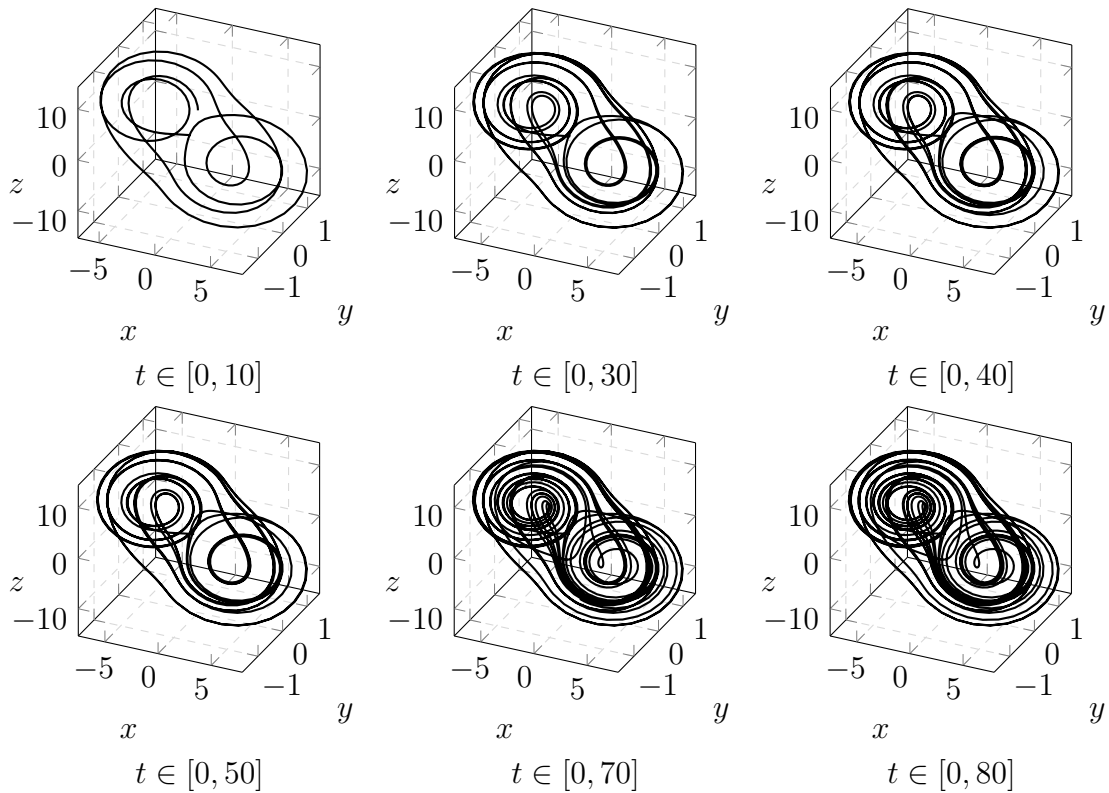
amiből következik, hogy $d(f^{kj}(p), f^{kj}(x)) > \delta$ vagy $d(f^{kj}(x), f^{kj}(y)) > \delta$. \square

7.3. Káosz a Chua-rendszerben

Differenciálegyenlet-rendszerek esetén akkor beszélünk káoszlól, ha valamely (a dolgozat 6.2. szakaszában definiált) \mathcal{P} visszatérési leképezés kaotikus.

A 7.2. ábrán azt láthatjuk, hogy a Chua-rendszer az $\alpha = 15$, $\beta = 25$, $m_0 = -1,6$ és $m_1 = -0,8$ paraméterek, valamint a $(-0.4, 0, 0)^T$ kezdeti érték mellett kaotikusan viselkedik: a numerikus szimulációk alapján úgy tűnik, hogy ezen megoldás pályája sűrű a fázistér egy részalmazában.

A rendszer kaotikus viselkedést mutat a 4.1., 4.2. és 4.3. ábrákon látható szimulációs eredmények esetén is.



7.2. ábra. A rendszer pályája

Irodalomjegyzék

- [1] Simonyi K. *Elméleti villamosságtan*. Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1976.
- [2] Kuczmann M. *Jelek és Rendszerek*. Universitas-Győr, Győr, 2005.
- [3] Leon O. Chua, Luong T. Huynh. *Bifurcation Analysis of Chua's Circuit*. Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems, Washington DC, 1992.
- [4] Bronstein I. N., Szemengyaljev K. A. *Matematikai kéziköny*. TypoT_EX kiadó, Budapest, 2009.
- [5] Terjéki J. *Differenciálegyenletek*. Polygon jegyzet, Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, Szeged, 1997.
- [6] <https://www.mathworks.com/> (utolsó látogatás: 2020. január 20.)
- [7] Simon L. P., Tóth J. *Differenciálegyenletek*. TypoT_EX kiadó, Budapest, 2009.
- [8] Laczkovich M., T. Sós V. *Analízis I-II*. TypoT_EX kiadó, Budapest, 2013.
- [9] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*. Springer, New York, 1998.
- [10] R. A. Holmgren. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [11] R. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Boston, 1989.

A. függelék

Függelék

A.1. A Chua-rendszer Matlab-kódja

chua_script.m

```
%Chua-aramkor, ungert, 2019
clear; clc;

%Villamos input
C1 = 10*10^(-9); %10 nF
C2 = 156*10^(-9); % 156 nF
R = 1*10^3; G = 1/R; % 1 kOhm
L = 6*10^(-3); %6 mH
Ga = -1.5*G; Gb = -0.7*G;

%Parameterezes
alpha = C2/C1; beta = C2/(L*G^2);
m0 = Ga/G; m1 = Gb/G;

n = 2000; %Idolepesek
x = zeros(1,n); y = x; z = y;
t = linspace(0,50,n);
dt = t(2) - t(1);

KF = [-0.7 0 0]; %Kezdeti feltetel
x(1) = KF(1); y(1) = KF(2); z(1) = KF(3);

ujszakasz = true; t_1 = 0; t_2 = dt;
for i = 2:n
    %%
    if (ujszakasz == true) && ((x(i-1) < -1) || (x(i-1) > 1))
        m = m1;
        %Sajatertekek
        SE = roots([1 (1+alpha+alpha*m) (beta+alpha*m) (alpha*beta*(1+m))]);
        if (x(i-1) < -1)
            d = (m0-m1) / (1+m1);
        elseif (x(i-1) > 1)
            d = (m1-m0) / (1+m1);
        end
    elseif (ujszakasz == true)
        m = m0;
        d = 0;
        %Sajatertekek
        SE = roots([1 (1+alpha+alpha*m) (beta+alpha*m) (alpha*beta*(1+m))]);
    end
    %%
    %Konstansok meghatarozasa elsokent es minden szakaszatlepeskor

    %Harom kulonbozo valos sajátérték
    if (ujszakasz == true) && (isreal(SE) == 1) && (SE(1) ~= SE(2)) && ...
        (SE(1) ~= SE(3)) && (SE(2) ~= SE(3))
        if i == 2
```

```

        k = inv([1 1 1; SE(1) SE(2) SE(3); SE(1)^2 SE(2)^2 SE(3)^2]) * ...
            [z(1) + d; -beta*y(1); -beta*(x(1)-y(1)+z(1))];
    else
        k = inv([1 1 1; SE(1) SE(2) SE(3); SE(1)^2 SE(2)^2 SE(3)^2]) * ...
            [z0 + d; -beta*y0; -beta*(x0-y0+z0)];
    end
end

%Valos sajátértékek, ketto azonos
if (ujszakasz == true) && (isreal(SE) == 1) && ...
    (((SE(1) == SE(2)) && (SE(2) ~= SE(3))) || ((SE(1) == SE(3)) && (SE(3) ~= SE(2))) ...
    || ((SE(2) == SE(3)) && (SE(3) ~= SE(1))))

    if (SE(1) == SE(2)) && (SE(2) ~= SE(3))
        lambda12 = SE(1); lambda3 = SE(3);
    elseif (SE(1) == SE(3)) && (SE(3) ~= SE(2))
        lambda12 = SE(1); lambda3 = SE(2);
    elseif (SE(2) == SE(3)) && (SE(3) ~= SE(1))
        lambda12 = SE(2); lambda3 = SE(1);
    end

    if i == 2
        k = inv([1 0 1; lambda12 1 lambda3; lambda12^2 2*lambda12 lambda3]) * ...
            [z(1) + d; -beta*y(1); -beta*(x(1)-y(1)+z(1))];
    else
        k = inv([1 0 1; lambda12 1 lambda3; lambda12^2 2*lambda12 lambda3]) * ...
            [z0 + d; -beta*y0; -beta*(x0-y0+z0)];
    end
end

%Valos sajátértékek, mindharom azonos
if (ujszakasz == true) && (isreal(SE) == 1) && (SE(1) == SE(2)) && ...
    (SE(1) == SE(3)) && (SE(2) == SE(3))
    lambda = SE(1);

    if i == 2
        k = inv([1 0 0; lambda 1 0; lambda^2 2*lambda 2]) * ...
            [z(1) + d; -beta*y(1); -beta*(x(1)-y(1)+z(1))];
    else
        k = inv([1 0 0; lambda 1 0; lambda^2 2*lambda 2]) * ...
            [z0 + d; -beta*y0; -beta*(x0-y0+z0)];
    end
end

%Konjugalt komplex sajátértékek vannak
if (ujszakasz == true) && (isreal(SE) == 0)

    if isreal(SE(1)) == 0
        gamma = real(SE(1)); omega = abs(imag(SE(1)));
    elseif isreal(SE(2)) == 0
        gamma = real(SE(2)); omega = abs(imag(SE(2)));
    else
        gamma = real(SE(3)); omega = abs(imag(SE(3)));
    end

    if isreal(SE(1)) == 1
        lambda3 = SE(1);
    elseif isreal(SE(2)) == 1
        lambda3 = SE(2);
    else
        lambda3 = SE(3);
    end

    if i == 2
        k = inv([1 0 1; gamma omega lambda3; gamma^2-omega^2 2*gamma*omega lambda3^2]) * ...
            * [z(1) + d; -beta*y(1); -beta*(x(1)-y(1)+z(1))];
    else
        k = inv([1 0 1; gamma omega lambda3; gamma^2-omega^2 2*gamma*omega lambda3^2]) * ...
            * [z0 + d; -beta*y0; -beta*(x0-y0+z0)];
    end
end

%%
%Fuggvenyertekek meghatározása minden idolepesben

```

```

if (isreal(SE) == 1) && (SE(1) ~= SE(2)) && (SE(1) ~= SE(3)) && (SE(2) ~= SE(3))
    %Harom kulonbozo valos sajatertek

    [z(i),y(i),x(i)] = ValosNemAzonosak(k(1),k(2),k(3),SE(1),SE(2),SE(3),d,beta,t_2);

elseif (isreal(SE) == 1) && ... %Valos sajatertekek, ketto azonos
    (((SE(1) == SE(2)) && (SE(2) ~= SE(3))) || ((SE(1) == SE(3)) && (SE(3) ~= SE(2)))) ...
    || ((SE(2) == SE(3)) && (SE(3) ~= SE(1))))

    [z(i),y(i),x(i)] = ValosKettoAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda12,lambda3,d,beta,t_2);

elseif (isreal(SE) == 1) && (SE(1) == SE(2)) && ...
    (SE(1) == SE(3)) && (SE(2) == SE(3)) %Valos sajatertekek, mindharom azonos

    [z(i),y(i),x(i)] = ValosHaromAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda,d,beta,t_2);

elseif (isreal(SE) == 0) %Konjugalt komplex sajatertekek vannak

    [z(i),y(i),x(i)] = KonjugaltKomplex(k(1),k(2),k(3),lambda3,gamma,omega,d,beta,t_2);

end

%%
%Szakaszhatar-atlepes ellorzese
if ((x(i-1) < -1) && (x(i) > -1)) || ((x(i-1) > -1) && (x(i) < -1))
    ujszakasz = true;
    x_vart = -1;
elseif ((x(i-1) < 1) && (x(i) > 1)) || ((x(i-1) > 1) && (x(i) < 1))
    ujszakasz = true;
    x_vart = 1;
else
    ujszakasz = false;
end

%%
%x0,y0,z0 szakaszhatar-atlepes eseten (Bisection method)
if ujszakasz == true

    a = t_1; b = t_2;

    epsilon = 100;

    while abs(epsilon) > 1*10^(-12)

        c = (a+b)/2;

        if (isreal(SE) == 1) && (SE(1) ~= SE(2)) && ...
            (SE(1) ~= SE(3)) && (SE(2) ~= SE(3)) %Harom kulonbozo valos sajatertek

            [z0,y0,x0] = ValosNemAzonosak(k(1),k(2),k(3),SE(1),SE(2),SE(3),d,beta,c);
            [za,ya,xa] = ValosNemAzonosak(k(1),k(2),k(3),SE(1),SE(2),SE(3),d,beta,a);
            [zb,yb,xb] = ValosNemAzonosak(k(1),k(2),k(3),SE(1),SE(2),SE(3),d,beta,b);

        elseif (isreal(SE) == 1) && ... %Valos sajatertekek, ketto azonos
            (((SE(1) == SE(2)) && (SE(2) ~= SE(3))) || ((SE(1) == SE(3)) && ...
            (SE(3) ~= SE(2)))) || ((SE(2) == SE(3)) && (SE(3) ~= SE(1))))

            [z0,y0,x0] = ValosKettoAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda12,lambda3,d,beta,c);
            [za,ya,xa] = ValosKettoAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda12,lambda3,d,beta,a);
            [zb,yb,xb] = ValosKettoAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda12,lambda3,d,beta,b);

        elseif (isreal(SE) == 1) && (SE(1) == SE(2)) && (SE(1) == SE(3)) && ...
            (SE(2) == SE(3)) %Valos sajatertekek, mindharom azonos

            [z0,y0,x0] = ValosHaromAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda,d,beta,c);
            [za,ya,xa] = ValosHaromAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda,d,beta,a);
            [zb,yb,xb] = ValosHaromAzonos(k(1),k(2),k(3),lambda,d,beta,b);
        elseif (isreal(SE) == 0) %Konjugalt komplex sajatertekek vannak

            [z0,y0,x0] = KonjugaltKomplex(k(1),k(2),k(3),lambda3,gamma,omega,d,beta,c);
            [za,ya,xa] = KonjugaltKomplex(k(1),k(2),k(3),lambda3,gamma,omega,d,beta,a);
            [zb,yb,xb] = KonjugaltKomplex(k(1),k(2),k(3),lambda3,gamma,omega,d,beta,b);

```

```

end

epsilon = x0 - x_vart;

if sign(epsilon) == -1 && sign(xa-x_vart) == -1
    a = c;
elseif sign(epsilon) == -1 && sign(xb-x_vart) == -1
    b = c;
elseif sign(epsilon) == 1 && sign(xa-x_vart) == 1
    a = c;
elseif sign(epsilon) == 1 && sign(xb-x_vart) == 1
    b = c;
end
end
end
if ujszakasz == true
    t_1 = 0; t_2 = dt;
else
    t_1 = t_2; t_2 = t_2 + dt;
end
end
end

```

KonjugaltKomplex.m

```

function [z,y,x] = KonjugaltKomplex(C1,C2,C3,lambda3,gamma,omega,d,beta,t)

%Konjugalt komplex sajátertekek vannak

z = C1*exp(gamma*t)*cos(omega*t) + C2*exp(gamma*t)*sin(omega*t) + C3*exp(lambda3*t) - d;
y = (-1/beta)*(C1*gamma*exp(gamma*t)+C2*omega*exp(gamma*t))*cos(omega*t) + ...
    (-1/beta)*(C2*gamma*exp(gamma*t)-C1*omega*exp(gamma*t))*sin(omega*t) + ...
    (-1/beta)*C3*lambda3*exp(lambda3*t);

dy = (-1/beta)*exp(gamma*t)*(C1*gamma^2-C1*omega^2+C2*gamma*omega)*cos(omega*t) + ...
    (-1/beta)*exp(gamma*t)*(C2*gamma^2-C2*omega^2-C1*gamma*omega)*sin(omega*t) + ...
    (-1/beta)*C3*lambda3^2*exp(lambda3*t);

x = dy + y - z;

end

```

ValosHaromAzonos.m

```

function [z,y,x] = ValosHaromAzonos(C1,C2,C3,lambda,d,beta,t)

%Harom valos sajátertekek, mindharom azonos

z = C1*exp(lambda*t) + C2*t*exp(lambda*t) + C3*t^2*exp(lambda*t) - d;
y = (-1/beta)*exp(lambda*t)*(C1*lambda + C2 + C2*lambda*t + C3*2*t + C3*lambda*t^2);

dy = (-1/beta)*exp(lambda*t)*(C1*lambda^2 + 2*C2*lambda + C2*lambda^2*t + ...
    2*C3 + 4*C3*lambda*t + C3*lambda^2*t^2);

x = dy + y - z;

end

```

ValosKettoAzonos.m

```

function [z,y,x] = ValosKettoAzonos(C1,C2,C3,lambda12,lambda3,d,beta,t)

%Harom valos sajátertekek, ketto kozuluk azonos

z = C1*exp(lambda12*t) + C2*t*exp(lambda12*t) + C3*exp(lambda3*t) - d;
y = (-1/beta)*(C1*lambda12 + C2 + C2*lambda12*t)*exp(lambda12*t) + ...
    (-1/beta)*C3*lambda3*exp(lambda3*t);

dy = (-1/beta)*(C1*lambda12^2+2*C2*lambda12+C2*lambda12^2*t)*exp(lambda12*t) + ...
    (-1/beta)*C3*lambda3^2*exp(lambda3*t);

```

```
x = dy + y - z;
```

```
end
```

ValosNemAzonosak.m

```
function [z,y,x] = ValosNemAzonosak(C1,C2,C3,lambda1,lambda2,lambda3,d,beta,t)
```

```
%Harom valos sajatertek, paronkent kulonboznek
```

```
z = C1*exp(lambda1*t) + C2*exp(lambda2*t) + C3*exp(lambda3*t) - d;
```

```
y = -(1/beta) * (lambda1*C1*exp(lambda1*t) + lambda2*C2*exp(lambda2*t) + ...  
    lambda3*C3*exp(lambda3*t));
```

```
dy = -(1/beta) * (lambda1^2*C1*exp(lambda1*t) + lambda2^2*C2*exp(lambda2*t) + ...  
    lambda3^2*C3*exp(lambda3*t));
```

```
x = dy + y - z;
```

```
end
```

A.2. További Matlab-kódok

HopfKereses.m

```
%Jacobi-matrix vizsgálata Hopf-bifurkaciohoz a Chua-rendszerben
```

```
%ungert, 2019
```

```
clear; clc;
```

```
m1 = -0.7; beta = 5;
```

```
alpha = linspace(3.4,3.6,10000);
```

```
SE = zeros(3,length(alpha));
```

```
for i = 1:length(alpha)
```

```
    SE(:,i) = eig([-alpha(i)-alpha(i)*m1 alpha(i) 0;1 -1 1; 0 -beta 0]);
```

```
    if i>1
```

```
        for j = 1:3
```

```
            if isreal(SE(j,i)) == 0
```

```
                sign_kov = sign(real(SE(j,i)));
```

```
            end
```

```
            if isreal(SE(j,i-1)) == 0
```

```
                sign_elo = sign(real(SE(j,i-1)));
```

```
            end
```

```
        end
```

```
        if sign_kov*sign_elo < 0
```

```
            alpha0 = 0.5*(alpha(i) + alpha(i-1));
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

BifDiag.m

```
%Bifurkacios diagram felvetele ungert 2019
```

```
clear; clc;
```

```
alpha0 = 3.48961989619896;
```

```
beta = 5;
```

```
m0 = -1.5;
```

```
m1 = -0.7;
```

```
alpha = linspace(alpha0-0.0001,alpha0+0.000007,1000);
```

```
Ampl = zeros(size(alpha));
```

```
for i = 1:length(alpha)
```

```
    if i == 1
```

```

[t,y] = ode45(@(t,in) chua(t,in,alpha(i),beta,m0,m1),linspace(0,20,10000),...
[(m1-m0)/(1+m1)+1e-7 0 (m0-m1)/(1+m1)]);

else

[t,y] = ode45(@(t,in) chua(t,in,alpha(i),beta,m0,m1),linspace(0,20,10000),...
[x_elozo y_elozo z_elozo]);

end

x_elozo = y(9500,1); y_elozo = y(9500,2); z_elozo = y(9500,3);

for j = 8000:10000
    for k = 8000:10000
        if sqrt( (y(j,1)-y(k,1))^2 + (y(j,2)-y(k,2))^2 + (y(j,3)-y(k,3))^2 ) > Ampl(i)
            Ampl(i) = sqrt( (y(j,1)-y(k,1))^2 + (y(j,2)-y(k,2))^2 + (y(j,3)-y(k,3))^2 );
        end
    end
end

if (i > 1) && (Ampl(i) < Ampl(i-1))
    Ampl(i) = Ampl(i-1);
end

%figure(1)
%hold on;
%plot(alpha(i),Ampl(i),'b. ');

%figure(2)
%hold on;
%plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));
end

```

chua.m

```

function out = chua(t,KF,alpha,beta,m0,m1)

x = KF(1);
y = KF(2);
z = KF(3);

h = m1*x+0.5*(m0-m1)*(abs(x+1)-abs(x-1));

xdot = alpha*(y-x-h);
ydot = x - y+ z;
zdot = -beta*y;

out = [xdot ydot zdot]';

```

BifDiag_pdoub.m

%Periodusketteso bifurkacio, Chua, ungert, 2019

```

clear; clc;

alpha0 = 8.9;
beta = 16;
m0 = -8/7;
m1 = -5/7;

alpha = linspace(8.855726163,9.1,8000);
T = zeros(1,size(alpha,2));

n = 10000; %Idolepesek
t = linspace(0,10,n);

KF = [-1.6195    0.2226    2.7174];

nyers1 = zeros(length(alpha),1);

```

```

nyers2 = zeros(length(alpha),1);

for i = 1:length(alpha)

    %CHUA + kezdeti feltetel
    [x,y,z] = chua_script(alpha(i),beta,m0,m1,t,n,KF);
    KF = [x(0.9*n) y(0.9*n) z(0.9*n)];

    if i == 1
        spont = [x(3500) y(3500) z(3500)]; %Pont
        normvec = [x(3510)-spont(1) y(3510)-spont(2) z(3510)-spont(3)];
        d = normvec(1)*spont(1) + normvec(2)*spont(2) + normvec(3)*spont(3); %Sik egyenlete
        x_egyper = x; y_egyper = y; z_egyper = z;
    end

    l = 1;

    epsilon = 2e-4;
    for j = 1:length(x)
        if abs((normvec(1)*x(j) + normvec(2)*y(j) + normvec(3)*z(j)) - d) < epsilon %Sikon van
            sikon(l,1) = x(j); sikon(l,2) = y(j); sikon(l,3) = z(j);
            l = l+1;
        end
    end

    k = 1;
    %Kozeli pontok kivalogatasa
    for j = 1:size(sikon,1)
        if sqrt((sikon(j,1)-spont(1))^2+(sikon(j,2)-spont(2))^2+(sikon(j,3)-spont(3))^2) < 0.5
            kozeli(k,:) = sikon(j,:);
            k = k+1;
        end
    end

    %Bal-jobb szetosztas
    k = 1; l = 1; m = 1;
    for j = 1:size(kozeli,1)
        elojel = det([normvec(1) kozeli(j,1)-spont(1) spont(1); ...
            normvec(2) kozeli(j,2)-spont(2) spont(2); ...
            normvec(3) kozeli(j,3)-spont(3) spont(3)]);
        if elojel > 0
            bal(k,:) = kozeli(j,:);
            k = k+1;
        elseif elojel < 0
            jobb(l,:) = kozeli(j,:);
            l = l+1;
        elseif elojel == 0
            rajtavan(m,:) = kozeli(j,:);
        end
    end

    %Legkozelebbi kivalasztasa

    if k > 1
        epsilon = 10;
        for j = 1:size(bal,1)
            if abs((normvec(1)*bal(j,1) + normvec(2)*bal(j,2) + normvec(3)*bal(j,3)) - d) < epsilon
                balpont = bal(j,:);
                epsilon = abs((normvec(1)*bal(j,1) + normvec(2)*bal(j,2) + normvec(3)*bal(j,3)) - d);
            end
        end

        if l > 1
            epsilon = 10;
            for j = 1:size(jobb,1)
                if abs((normvec(1)*jobb(j,1) + normvec(2)*jobb(j,2) + normvec(3)*jobb(j,3)) - d) < epsilon
                    jobbpont = jobb(j,:);
                    epsilon = abs((normvec(1)*jobb(j,1) + normvec(2)*jobb(j,2) + normvec(3)*jobb(j,3)) - d);
                end
            end
        end
    end

```

```

    if (k > 1) && (l > 1) && (i > 50)
        nyers1(i) = balpont(1);
        nyers2(i) = jobbpont(1);
    else
        nyers1(i) = spont(1);
        nyers2(i) = spont(1);
    end

    %Abrazolas
    % plot3(x_egyper,y_egyper,z_egyper);
    % hold on;
    % plot3(x,y,z);
    % plot3(spont(1),spont(2),spont(3),'black+');
    % plot3(balpont(1),balpont(2),balpont(3),'r+');
    % plot3(jobbpont(1),jobbpont(2),jobbpont(3),'r+');

    if i < length(alpha)
        clear kozeli sikon bal jobb rajtavan balpont jobbpont;
        %close(1);
    end
end

j = 1;

for i = 1:length(nyers1)
    if i == 1
        ag1(j) = nyers1(i);
        alfa1(j) = alpha(i);
        j = j+1;
    elseif (i > 1) && ((nyers1(i)-ag1(j-1)) < -2e-4)
        ag1(j) = nyers1(i);
        alfa1(j) = alpha(i);
        j = j+1;
    end
end

k = 1;

for i = 1:length(nyers2)
    if i == 1
        ag2(k) = nyers2(i);
        alfa2(k) = alpha(i);
        k = k+1;
    elseif (i > 1) && ((nyers2(i)-ag2(k-1)) > 10e-4)
        ag2(k) = nyers2(i);
        alfa2(k) = alpha(i);
        k = k+1;
    end
end

figure(1)
hold on;
plot(alfa1,ag1);
plot(alfa2,ag2);
%Eredmenyritkitas
k = 1;
for i = 1:length(x)
    if mod(i,40) == 0
        xe(k,1) = x(i);
        ye(k,1) = y(i);
        ze(k,1) = z(i);
        te(k,1) = t(i);
        k = k+1;
    end
end
end

```