

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

JÁTÉKELMÉLET, 44. FELADAT (+)

Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 22 szavazó esetén a preferenciasorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ u \succ z$: 9 szavazónál,
- $y \succ x \succ z \succ u$: 6 szavazónál,
- $z \succ u \succ y \succ x$: 7 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is, majd hajtson végre taktikai manipulációt is.

Megoldás:

Először meghatározzuk a győztest és a közös sorrendet is. Ehhez

$$\begin{aligned} x: 9 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 &= 61, \\ y: 9 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 2 &= 65, \\ z: 9 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 &= 49, \\ u: 9 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 &= 45. \end{aligned}$$

A győztes tehát az y , a közös sorrend pedig a következő: $y \succ x \succ z \succ u$.

A taktikai manipulációhoz tegyük fel, hogy a 22 szavazó közül 1 szavazó tudja, hogy az x és az y alternatíva lehet esélyes a győzelemre. Próbáljunk meg végrehajtani manipulációt úgy, hogy az eredeti y helyett egyetlen szavazó preferenciájának megváltoztatásával megforduljon a sorrend az első és a második között, azaz legyen a győztes az x . Három eset lehetséges.

Tegyük fel, hogy az első csoportból (9 szavazó) kerül ki ez az 1 szavazó. Jelölje rendre α, β, γ és δ az ezen szavazó által kialakított preferenciasorrend szerint x -nek, y -nak, z -nek és u -nak járó pontokat. Ekkor

$$\begin{aligned} x: 8 \cdot 4 + 1 \cdot \alpha + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 &= 57 + \alpha, \\ y: 8 \cdot 3 + 1 \cdot \beta + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 2 &= 62 + \beta, \\ z: 8 \cdot 1 + 1 \cdot \gamma + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 &= 48 + \gamma, \\ u: 8 \cdot 2 + 1 \cdot \delta + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 &= 43 + \delta. \end{aligned}$$

Mivel α legfeljebb 4, β pedig legalább 1 lehet, ezért x -nek legfeljebb 61, y -nak pedig legalább 63 pontja lehet, ami nem változtat az eredeti sorrenden.

Most tegyük fel, hogy a második csoportból (6 szavazó) kerül ki ez az 1 szavazó. Jelölje rendre α, β, γ és δ az ezen szavazó által kialakított preferenciasorrend szerint x -nek, y -nak,

z -nek és u -nak járó pontokat. Ekkor

$$\begin{aligned} x: 9 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot \alpha + 7 \cdot 1 &= 58 + \alpha, \\ y: 9 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot \beta + 7 \cdot 2 &= 61 + \beta, \\ z: 9 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot \gamma + 7 \cdot 4 &= 47 + \gamma, \\ u: 9 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot \delta + 7 \cdot 3 &= 44 + \delta. \end{aligned}$$

Mivel α legfeljebb 4, β pedig legalább 1 lehet, ezért x -nek legfeljebb 62, y -nak pedig legalább 62 pontja lehet. Ezzel döntetlen alakul ki.

Végül vizsgáljuk meg, hogy mi történik akkor, ha az utolsó csoportból (7 szavazó) kerül ki az 1 vizsgált szavazó. A szokásos jelölések mellett

$$\begin{aligned} x: 9 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot \alpha &= 60 + \alpha, \\ y: 9 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot \beta &= 63 + \beta, \\ z: 9 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot \gamma &= 45 + \gamma, \\ u: 9 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot \delta &= 42 + \delta. \end{aligned}$$

Azt látjuk, hogy $\alpha = 4$ és $\beta = 1$ esetén ismét döntetlen alakítható ki. Ez azt jelenti, hogy 1 szavazó preferenciasorrendjének megváltoztatásával legfeljebb döntetlen érhető el x és y között.

Világos, hogy több szavazó együttes preferenciaváltoztatásával már elérhető lenne x egyértelmű győzelme. Tegyük fel, hogy például a második csoportból (6 szavazó) 2 szavazó összefog, és y győzelmének érdekében megváltoztatja a preferenciasorrendjét. Ekkor az eddigi jelölések segítségével

$$\begin{aligned} x: 9 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot \alpha + 7 \cdot 1 &= 55 + 2\alpha, \\ y: 9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot \beta + 7 \cdot 2 &= 57 + 2\beta, \\ z: 9 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot \gamma + 7 \cdot 4 &= 45 + 2\gamma, \\ u: 9 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot \delta + 7 \cdot 3 &= 43 + 2\delta \end{aligned}$$

írható fel. Azonnal látszik, hogy például az $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (4, 1, 3, 2)$ választás esetén

$$\begin{aligned} x: 9 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 7 \cdot 1 &= 63, \\ y: 9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 &= 59, \\ z: 9 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 &= 51 \\ u: 9 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 3 &= 47, \end{aligned}$$

azaz a győztes az x lesz, a közös sorrend pedig: $x \succ y \succ z \succ u$. A vonatkozó módosított preferenciasorrend a következő:

- $x \succ y \succ u \succ z$: 9 szavazónál,
- $y \succ x \succ z \succ u$: 4 szavazónál,
- $y \succ z \succ u \succ x$: 2 szavazónál,
- $z \succ u \succ y \succ x$: 7 szavazónál.