

2020. 02. 21.

1. konzultáció

Játékelmélet

Kardai Miklós helyettesíti Kanizsai...

Az alapos: Neumann János (FELISMERNI) (1903 - 1957)

További fontos személyek: John Nash (1928 - 2000?)

Kasányné János (1920 - 2000)

NEH-KOOPERATÍV JÁTEKOK Ezeknél len. itt szö.

Példa nem kooperatív játékra: $\forall$ játékosnak $\exists!$ cél függvénye (szját.)

	D_1	D_2	D_3	D_4	
R_1	7	2	5	5	}
R_2	2	2	3	4	
$\rightarrow R_3$	5	3	4	4	
R_4	3	2	1	6	

D : minimalizálni } akarat.
 R : maximalizálni }

Ez a cél. Ellentétis célok vannak.

Lehetséges stratégia: Veszteséget minimalizálni.

R_3, D_2 választás van. Ebben az esetben.

Nash-féle egyensúlyi helyzet: senki sem ér meg módosítani a stratégiát.

Π : D sorokból } egyensúlyi helyzet
 Π : R oszlopokból }

minimalizál	maximalizál			
	K	P	O	
	K	0	-1	1
	P	-1	0	-1
	O	-1	1	0

Def: Zéró összegű játékok esetén az egyik játékos nyeresége a másik játékos vesztesége. Több is.

Nem zero-sumos játékok:

Fogoly-dilemma.

2. játékos

első játékos

	Vall	tagad
Vall	-5, -5	0, -10
tagad	-10, 0	-1, -1

Nash-féle egyensúlyi helyzet.

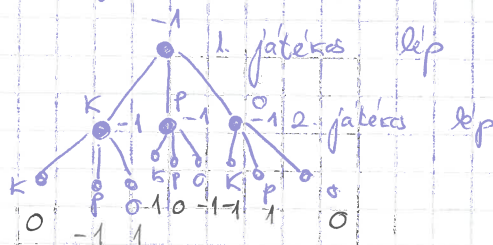
Az egyensúlyi helyzet $\neq$ legjobb stratégia. Ez fontos!

EZEK EDDIG MATRIXJÁTÉKOK VOLTAK.

2 játékos, egyszerre lépnek (választanak), egyszer.

Fákkal leható játékok:

Több játékos is lehet, minden lépésben egy játékos léphet több lépés letehető. A FA VÉGES! Ez is fontos.



1. játékosnál itt 3 stratégiája van.

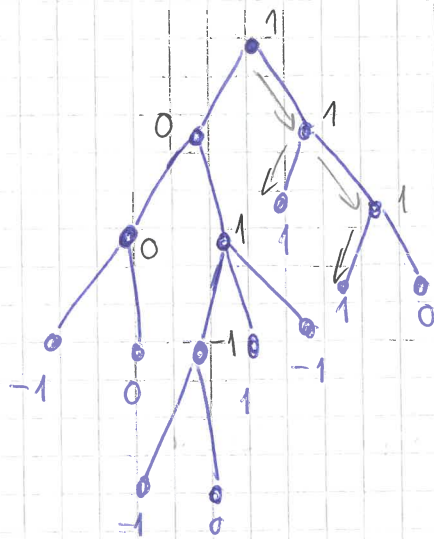
2. játékosnál itt 3.9 stratégiája van.
27

Mindenki tudja a szabályokat.

A 2. játékosnál van 9.9 stratégiaja.

Ez biztosan előbb az ideje.

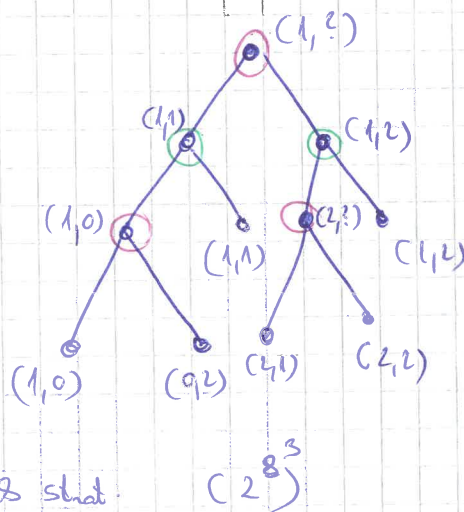
Konstánshozunk 3 játékot.



1. játékos MAX
2. -II- MIN

Ilyen a sötét

Nem zéró összegű fával leírt játék:



1. MAX
2. MIN

itt már nem világos,
hogy mi a j^o
stratégia...

KOOPERATÍV A
JÁTEK? NEM?

Attól is függ...

1. játékos: 2 stratégia

2. játékos: 1 stratégia

(2, 3)

(2, 4)

	BB	BZ	2. játékos
BBB	1. játékos		
BBZ			
BZB			
ZBB			

ig lehetne ezt feltölteni...

Tétel:

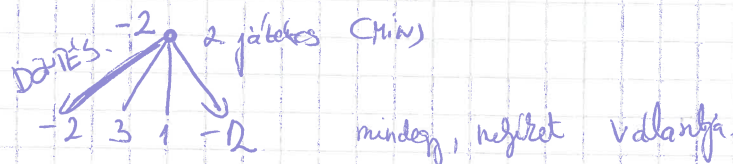
Zéró összegű játékokban mindig van egyensúlyi helyzet. És egzaktan.
És egzaktan meghatározható.

Biz:

① minden csúcsban ha az alatta lévő csúcsokhoz már ismert az érték, akkor az az minimális/maximális vértől függően, hogy ki jár

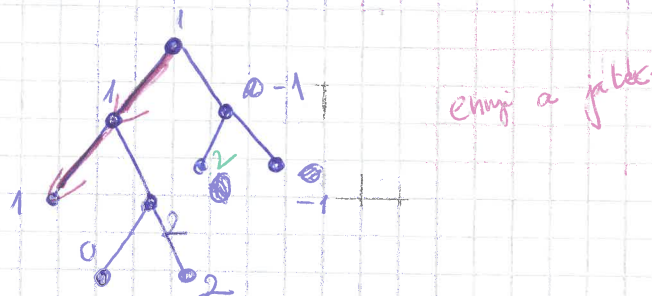
enne a csúcsnak is megadjuk az értéket.

② A játékosnak rendelt érték lesz a játék értéke abban a stratégiában, ahol minden játékos abba az irányba megy, ahová a max. vagy minimum jön.

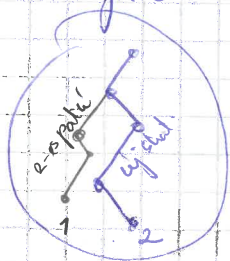


Ezzel mindkét játékos stratégiáját megadjuk.

③ És a stratégiapár egyensúlyi helyzetet ad.
Ezt megmutatjuk, hogy létezik az egyensúlyi helyzet.



④ Vegyünk egy egyensúlyi stratégiapárt.
Ez játszható le a játékot.



Tfh más nyereséget kapok, mint
②-ben.

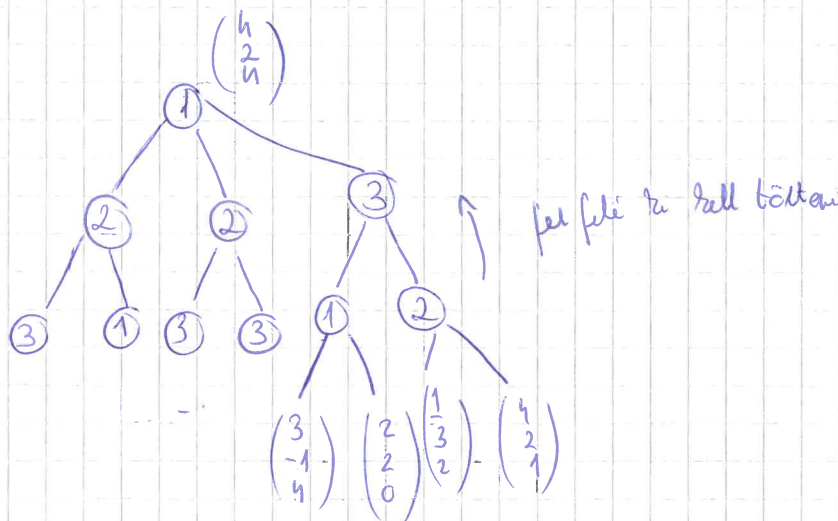
Tudunk játszani, tehát ez nem lehetett egyensúlyi helyzet. $\square$

Ennyit a fajátékokról.

Matrix játékok: Azek is léteznek.

PÉLDA.

5. feladat



MINDENKI MAXIMALIZÁL EBBEN. ÚGY KELL KI-TÖLTENI.

E_2 egy egyszerű példa.

Ennyi

Matrix játék:

zérösségű.

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

A befizetési matrix.

1. játékos:

m db választása van.

$$i \in \{1, \dots, m\}$$

2. - " - :

n db - " -

$$j \in \{1, \dots, n\}$$

1. játékos nyeresége: $a_{ij} \in A$

2. - " - : $-a_{ij} \in A$.

Hi az optstat? Eh?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ nincs egyensúlyi helyzet. 1A}$$

De van, amiből van.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad i=2, j=1 \text{ EH.}$$

Mikor van? Mikor nincs! Sok kérdés van...

Def.:

alsóhatár:

száminimimum

maximum

felsőhatár:

szálextrimum

minimum

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

alsóhatár: 1

felsőhatár: 2.

1999. 09. 09. (pl.)

All: alsóérték $\leq$ felsőérték

$$\max_{i=1}^m \left(\min_{j=1}^n a_{ij} \right) \leq \min_{j=1}^n \left(\max_{i=1}^m a_{ij} \right)$$

Biz: $\exists i_0$ hogy $\min_{j=1}^n a_{ij} = \text{alsóérték} \leq a_{i_0 j_0}$
 $\exists j_0$ hogy $\max_{i=1}^m a_{ij} = \text{felsőérték} \geq a_{i_0 j_0}$

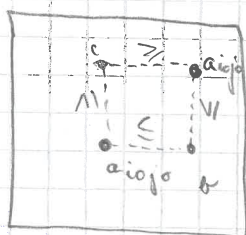
Ha alsóérték = felsőérték $\Rightarrow$ EH.



Def: nyeregpont i_0, j_0
 $\forall i \quad a_{i j_0} \geq a_{i_0 j_0}$
 $\forall j \quad a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j_0}$

All: nyeregpont $\equiv$ egyensúlyi helyzet

All: Ha van két nyeregpont, akkor ott az extrem megfigyelés
 nyeregpont



amiatt a nyeregpont egyensúlyi.

És ha nincs nyeregpont?

$$i \in \{1, \dots, m\}$$

$$j \in \{1, \dots, n\}$$

$\Rightarrow$ TISZA STRATÉGIA. ez

Kérvet stratégia: Az meg mi?

Def: Tiszta stratégiák halmaza $S = \{1, \dots, n\}$
 $i \in$
 (determinisztikus választás)

Kévt. stratégia $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
 $\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad x_i \geq 0$

véletlen választás ezen állapotok szerint.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1 játékos: kévt. stratégia $X = (0.5, 0.5)$

2. - - - - - $Y = (0.1, 0.9)^T$

$$1 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.05$$

$$2 \cdot 0.5 \cdot 0.9 = 0.9$$

$$3 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.15$$

$$0 \cdot 0.5 \cdot 0.9 = 0$$

XAY est végsőérték el.

1,1 a várható nyeremény

Def: Kévt. stratégiákra alsó érték alsó érték

$$\max_{X \in S_1} \left(\min_{Y \in S_2} XAY \right)$$

felső érték

$$\min_{Y \in S_2} \left(\max_{X \in S_1} XAY \right)$$

Állítások:

Kévt. stratégiákra is alsóérték $\leq$ felsőérték

van $X_0 \in S_1$, and

$$\min_{Y \in S_2} X_0AY = \text{alsóérték} \leq X_0AY_0$$

van $Y_0 \in S_2$, and

$$\max_{X \in S_1} XAY_0 = \text{felsőérték} \geq X_0AY_0 \quad \text{D}$$

All: Ha $a \cdot e = f \cdot e \Rightarrow X_0, Y_0$ egyensúlyi helyzet.

$$\text{alsó érték} = X_0 A Y_0 = \text{felső érték}$$

$$\min_{Y \in S_2} X_0 A Y$$

2. játékos nem tudja csökkenteni a veszteséget

$$\max_{X \in S_1} X A Y_0$$

1. játékos nem tudja növelni a nyereségét.

All: Ha X_0, Y_0 egyensúlyi helyzet, akkor $a \cdot e = f \cdot e$.

$$a \cdot e = f \cdot e$$

Biz:

$$f \cdot e = \min_{Y \in S_2} \left(\max_{X \in S_1} X A Y \right) \leq \max_{X \in S_1} X A Y_0 \leq X_0 A Y_0$$

$$\parallel \parallel$$

$$\max_{X \in S_1} \left(\min_{Y \in S_2} X A Y \right) \geq \min_{Y \in S_2} X_0 A Y \geq X_0 A Y_0 \quad \square$$

Tétel (Nash): Minden matrixra levan stratégia párral, alsó érték = felső érték.

Def: A JÁTÉK ÉRTÉKE

Tétel: legyen V az A matrixjáték értéke.

X_0 és Y_0 egy egyensúlyi helyzet.

$$X_0 A Y_0 = V.$$

1) Ha A i -edik sorát $\cdot Y_0 \leq V$, akkor $X_i = 0$

$$A_{i*} \cdot Y_0 < V \Rightarrow X_i = 0.$$

$$V = \max_{X \in S_1} X A Y_0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\mathbb{R}^{1 \times m}$ $\mathbb{R}^{m \times 1}$
 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

$Y_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Valami ilyen

② $A_{1*} Y_0 \stackrel{?}{=} V.$

Használjuk X_0 -ra

$$X_0 A_{*j} \stackrel{?}{=} V \Rightarrow y_j = 0$$

$$X_0 A_{1*} \stackrel{?}{=} V$$

és kábé ennyi.

2x2-es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

① $a \cdot e = f \cdot e \Rightarrow$ van tiszta stratégiával egyensúlyi helyzet.
 $\Rightarrow$ ugyanis levál stratégiákról is.

② $a \cdot e \neq f \cdot e \Rightarrow$ nincs egyensúlyi helyzet

2a) $a < c > d < b > a$

2b) $a > b < d > c < a$

Körbe lehet
 menni.

$$X_0 = (x \quad 1-x)$$

$$Y_0 = (y \quad 1-y)$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

v

nincs tiszta stratégia,

$$A_{1*} Y_0 = V$$

$$X_0 A_{*1} = V$$

$$A_{2*} Y_0 = V$$

$$X_0 A_{*2} = V$$

3 ismeretlen: x, y, V

4 egyenlet (lin.)

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = V$$

$$ay + b(1-y) = V$$

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = V$$

$$cy + d(1-y) = V$$

$$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = V$$

$$ax + c(1-x) = V$$

$$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = V$$

$$bx + d(1-x) = V$$

$$\left. \begin{array}{l} ay + b(1-y) = V \\ cy + d(1-y) = V \end{array} \right\} a - cy + (b-d)$$

$$y = \frac{d-b}{a-b-c+d}$$

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d}$$

$$V = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$$

ig határozható meg az eh.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{0-3}{1-2-3+0} = \frac{3}{4} = \underline{\underline{0,75}}$$

$$y = \frac{0-2}{1-2-3+0} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{0,5}}$$

$$V = \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 3}{1-2-3+0} = \frac{6}{4} = \underline{\underline{1,5}}$$

alsó érték: 1

felső érték: 2

$$(1 \ 2) \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1,5}}$$

$$(3 \ 0) \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1,5}}$$

$$(0,75 \ 0,25) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1,5}}$$

$$(0,75 \ 0,25) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1,5}}$$

OK, a tétel működik.

$$\max_{x \in S_1} x A y_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} (x \ 1-x) \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1,5}}$$

$$\min_{y \in S_2} x_0 A y = (1,5 \ 1,5) \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \underline{\underline{1,5}}$$

A Nash-tétel enyi 2x2-esre.

$$\max_{x \in S_1} \left(\min_{y \in S_2} x A y \right) \leq \min_{y \in S_2} \left(\max_{x \in S_1} x A y \right)$$

alsó

felső.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

első sor: 2

első s.: 3

$$X = (x \quad 1-x)$$

$$Y = (y \quad 1-y)$$

$$x = \frac{2-4}{2-3-4+2} = \frac{-2}{-3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$$y = \frac{2-3}{-3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$X = (2/3 \quad 1/3)$$

$$Y = (1/3 \quad 2/3)$$

$$v = \frac{4-12}{-3} = \frac{-8}{-3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

Ellenőrzés:

$$(x \quad 1-x) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ (x+1-x)8/3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \text{ es fix.}$$

$$(2/3 \quad 1/3) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (8/3 \quad 8/3) \text{ ugyanaz... } \checkmark \text{ OK.}$$

ennyi

Nagyobb mátrixok?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lesz.

Ez meg már számolható.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

vagy

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

megszól.

Mi a helyzet a $2 \times n$ -es játékokkal?

2x3-as:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$X = (x \quad 1-x)$$

$$Y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i = 1$$

$$0 \leq y_i \leq 1$$

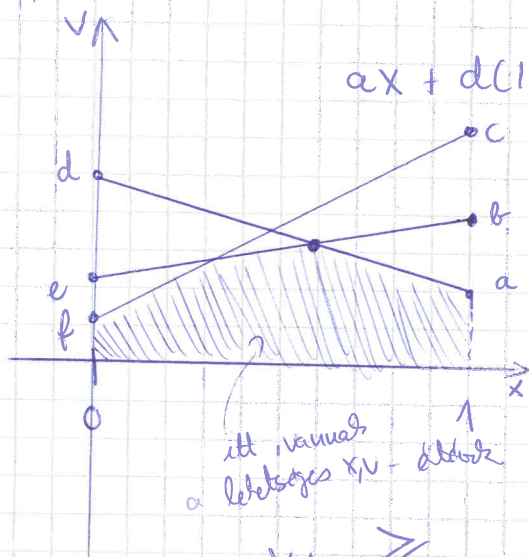
$$A_{i*} Y_0 \leq V \Rightarrow X_i = 0 \quad \text{if } X_i > 0$$

$$X_0 A_{*j} \geq V \Rightarrow y_j = 0$$

$$y_i \neq 0 \Rightarrow X A_{*j} = V$$

Ha $y_1 \neq 0$, akkor

$$(x \quad 1-x) \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = V$$



$$X A_{*j} \geq V \text{ mindig igaz}$$

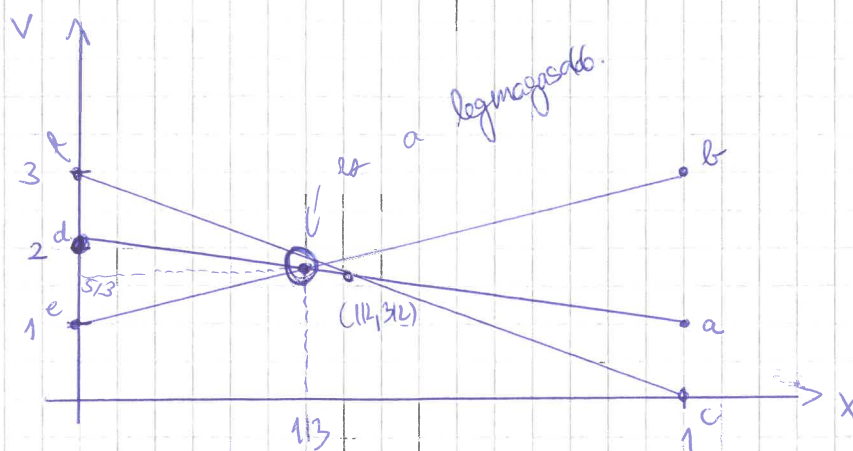
V minden egyes fellet van alatt

Képe ez.

Példa jön!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

grafikusan



első egyen

$$(x \quad 1-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq v$$

második egyen

$$(x \quad 1-x) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \geq v$$

3 egyen

$$(x \quad 1-x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \geq v$$

Tehát $x = 1/3$ lesz a jó választás.

$v = 5/3$ is adódik ebből.

$$\left. \begin{aligned} (1 \quad 3 \quad 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \frac{5}{3} \\ (2 \quad 1 \quad 3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \frac{5}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$(3 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{10}{3}$$

$$(3 \quad 3 \quad 3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\underline{y_2 = 1/3}$$

$$\underline{y_1 = 2/3}$$

$$\underline{y_3 = 0}$$

Ez a megoldás.

Tehát:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X_0 = (1/3 \quad 2/3) \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_0 A = (5/3 \quad 5/3 \quad 6/3) \quad \checkmark \text{ ez OK.}$$

$$A Y_0 = (5/3 \quad 5/3)^T \quad \checkmark \text{ 190 is OK.}$$

ez $2 \times n$ -es játékosra mindig működik. $\square$ Hátra ennyi.