

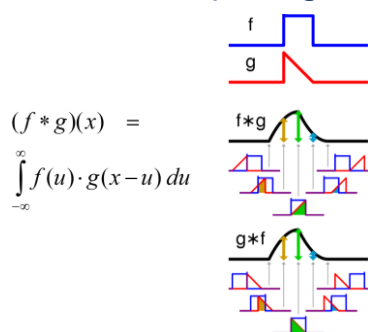
5. Konvolúció

Konvolúció (analóg, 1D-2D)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du$$

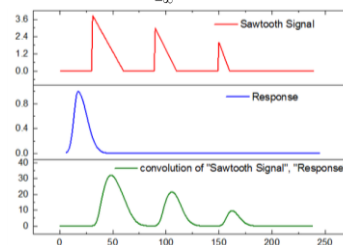
$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \cdot g(x-u, y-v) du dv$$

Konvolúció (analóg, 1D)



Konvolúció (analóg, 1D)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du$$



1D konvolúció

Input (M - és N -elemű):

$$f = [f(0), f(1), \dots, f(M-1)]$$

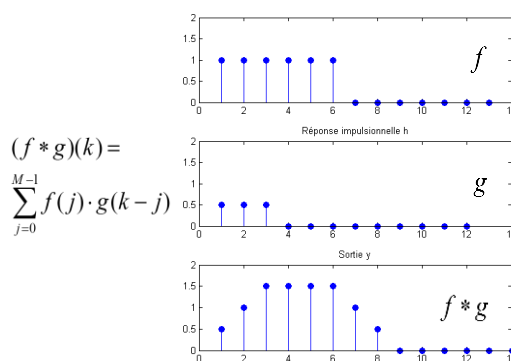
$$g = [g(0), g(1), \dots, g(N-1)]$$

Output ($(M+N-1)$ -elemű):

$$(f * g)(k) = \sum_{j=0}^{M-1} f(j) \cdot g(k-j)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, M+N-2; \quad g(i) = 0, \text{ ha } i < 0).$$

1D konvolúció



1D konvolúció



Példa konvolúcióra

$$M=N=3 \quad h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow & & & \end{array}$$

kiindulási helyzet

Példa konvolúcióra

$$M=N=3 \quad h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow & & & \end{array}$$

$$h(0) = f(0) \cdot g(0)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3 \quad h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow & & & \end{array}$$

$$h(1) = f(0) \cdot g(1) + f(1) \cdot g(0)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3 \quad h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow & & & \end{array}$$

$$h(2) = f(0) \cdot g(2) + f(1) \cdot g(1) + f(2) \cdot g(0)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3 \quad h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ & & & f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow \end{array}$$

$$h(3) = f(1) \cdot g(2) + f(2) \cdot g(1)$$

Példa konvolúcióra

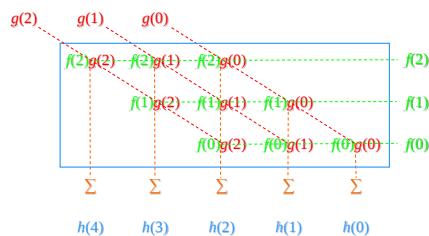
$$M=N=3 \quad h = f * g$$

$$\leftarrow \begin{matrix} g(0) & g(1) & g(2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(2) & f(1) & f(0) \end{matrix} \rightarrow$$

$$h(4) = f(2) \cdot g(2)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3 \quad h = f * g$$



Polinomok szorzása

Polinomok:

$$p(x) = a(m-1) \cdot x^{m-1} + \dots + a(1) \cdot x^1 + a(0) \cdot x^0$$

$$q(x) = b(n-1) \cdot x^{n-1} + \dots + b(1) \cdot x^1 + b(0) \cdot x^0$$

$$p(x) \cdot q(x) = c(m+n-2) \cdot x^{m+n-2} + \dots + c(1) \cdot x^1 + c(0) \cdot x^0$$

Együttható-vektorok:

$$a = [a(m-1), \dots, a(1), a(0)]$$

$$b = [b(n-1), \dots, b(1), b(0)]$$

$$a * b = [c(m+n-2), \dots, c(1), c(0)]$$

Számok mint polinomok

m -jegyű decimális szám:

$$p(x) = a(m-1) \cdot x^{m-1} + \dots + a(1) \cdot x^1 + a(0) \cdot x^0$$

$$x = 10$$

$$0 \leq a(m-1), \dots, a(1), a(0) \leq 9$$

Műveletek nagy számokkal vagy számítások nagy precizitással

Bejelentés 2019. március 14-én (a Pi-napon):

Emma Haruka Iwao, a Google programozónője rekordot döntött azzal, hogy **31 ezermilliárd számjegy** pontossáig számolta ki a Pi értékét – átadva a múltnak a korábbi 22 ezermilliárd számjegyű pontosságot.

A számítás 25 virtuális számítógépen 125 napig tartott (170 terabyte tárigénnyel).

<https://www.bbc.com/news/technology-47524760>

1D konvolúció – mátrix-vektor szorzás

$$h = f * g \quad (M=4, N=3)$$

$$\begin{bmatrix} f(3) & f(2) & f(1) & f(0) & 0 & 0 \\ 0 & f(3) & f(2) & f(1) & f(0) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) & f(2) & f(1) & f(0) \\ 0 & 0 & 0 & f(3) & f(2) & f(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(3) & f(2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f(3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ h(4) \\ h(5) \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{(M+N-1) \times (M+N-1)} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{(M+N-1) \times 1} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{(M+N-1) \times 1}$

felső triagonális Toeplitz mátrix

Az 1D konvolúció műveletigénye

szorzások száma

$$\begin{aligned}
 h(0) &= f(0) \cdot g(0) & 1 \\
 h(1) &= f(0) \cdot g(1) + f(1) \cdot g(0) & 2 \\
 &\vdots & \vdots \\
 h(M-2) &= f(0) \cdot g(M-2) + \dots + f(M-2) \cdot g(0) & M-1 \\
 h(M-1) &= f(0) \cdot g(M-1) + f(1) \cdot g(M-2) + \dots + f(M-1) \cdot g(0) & M \\
 h(M) &= f(1) \cdot g(M-1) + \dots + f(M-1) \cdot g(1) & M-1 \\
 &\vdots & \vdots \\
 h(2M-3) &= f(M-2) \cdot g(M-1) + f(M-1) \cdot g(M-2) & 2 \\
 h(2M-2) &= f(M-1) \cdot g(M-1) & 1
 \end{aligned}$$

$$M + 2 \sum_{i=1}^{M-1} i = M + 2 \frac{(M-1)(M-2)}{2} = M^2 - 2M + 3 = O(M^2)$$

2D konvolúció

Input:

$$f = [f(x, y)] \quad M \times N \text{-es}$$

$$g = [g(u, v)] \quad K \times L \text{-es}$$

Output:

$$(f * g)(s, t) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) \cdot g(s-i, t-j)$$

$$(M + K - 1) \times (N + L - 1) \text{-es};$$

$$g(p, q) = 0, \text{ ha } p, q < 0$$

Képek konvolúciója a gyakorlatban

Input:

$$f = [f(x, y)] \quad M \times N \text{-es}$$

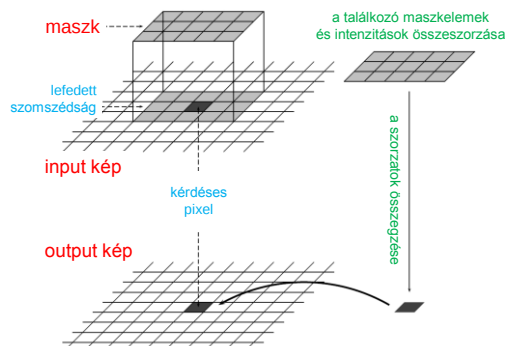
$$g = [g(u, v)] \quad (2K+1) \times (2K+1) \text{-es}$$

Output:

$$(f * g)(s, t) = \sum_{i=-K}^K \sum_{j=-K}^K f(s+i, t+j) \cdot g(i, j)$$

$$(M \times N \text{-es, vagy } (M-K) \times (N-K) \text{-es}).$$

Képek konvolúciója a gyakorlatban



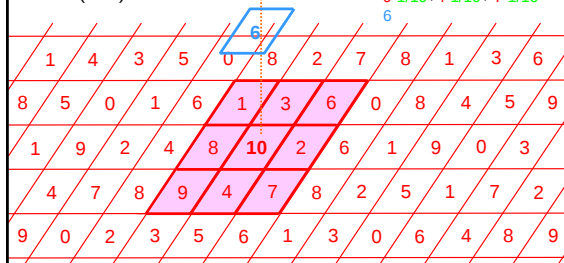
Példa

A g maszk
mérete:
 3×3 ($K=1$)

$$\begin{bmatrix}
 1/10 & 1/10 & 1/10 \\
 1/10 & 1/5 & 1/10 \\
 1/10 & 1/10 & 1/10
 \end{bmatrix}$$

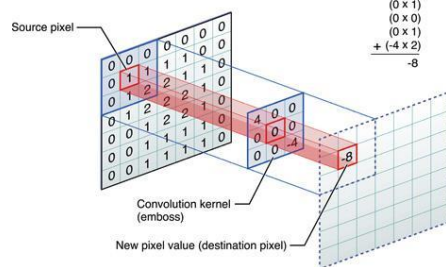
A $h=f*g$ konvolált
kép adott pontjának
számítása:

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot 1/10 + 3 \cdot 1/10 + 6 \cdot 1/10 + \\
 &8 \cdot 1/10 + 10 \cdot 1/5 + 2 \cdot 1/10 + \\
 &9 \cdot 1/10 + 4 \cdot 1/10 + 7 \cdot 1/10 = \\
 &6
 \end{aligned}$$

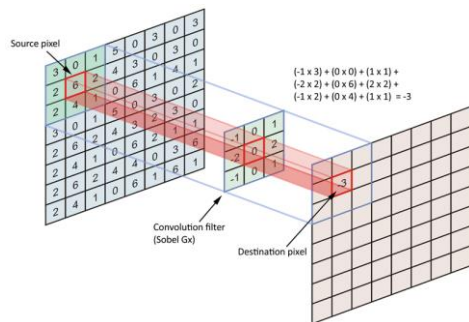


Példa

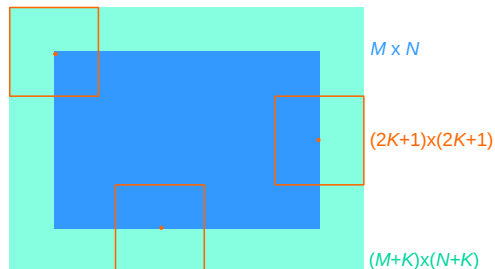
Center element of the kernel is placed over the source pixel. The source pixel is then replaced with a weighted sum of itself and nearby pixels.



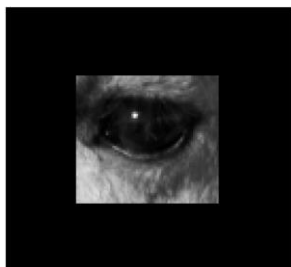
Példa



A „kilógó” terület problémája (mérettartó konvolúció esetén)



A „kilógó” terület problémája (mérettartó konvolúció esetén)



PAD
(kipárnázás
0 értékű pixelelkel)

A „kilógó” terület problémája (mérettartó konvolúció esetén)



EXTEND
(a határ kiterjesztése)

A „kilógó” terület problémája (mérettartó konvolúció esetén)



WRAP
(becsomagolás)

A konvolúció tulajdonságai

$$f * g = g * f$$

$$a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

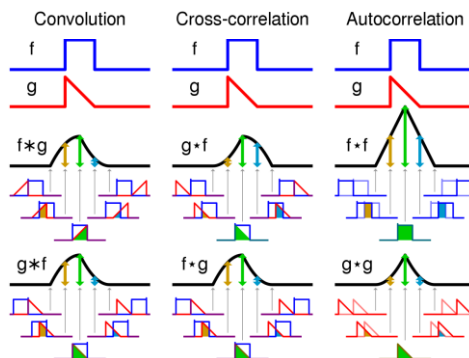
Korreláció

$$f(x) \otimes g(x) = \overline{f(-x)} * g(x)$$

↑
komplex konjugált

($f=g$: auto-korreláció; $f \neq g$: kereszt-korreláció)

Konvolúció és korreláció



Konvolúciós, korrelációs tétel

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(f \otimes g) = \overline{F(f)} \cdot F(g)$$

pontonkénti (!) szorzás

Konvolúciós tétel

Alternatív formulák:

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(f \cdot g) = F(f) * F(g)$$

$$f * g = F^{-1}(F(f) \cdot F(g))$$

$$f \cdot g = F^{-1}(F(f) * F(g))$$

(A második a mintavételezési tétel kulcsa.)

Konvolúció, korreláció időigénye

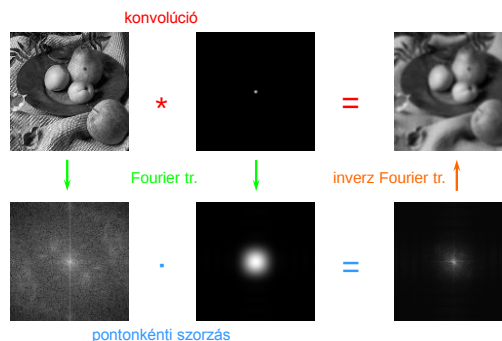
$$f * g = F^{-1}(F(f) \cdot F(g))$$

$$f \otimes g = F^{-1}(\overline{F(f)} \cdot F(g))$$

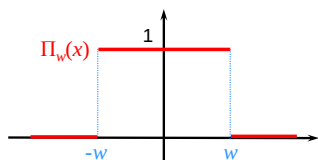
$O(M \cdot \log_2 M)$ $O(M \cdot \log_2 M)$ $O(M)$ $O(M \cdot \log_2 M)$

Az M -elemű 1D f és g jelek konvolúciója és korrelációja egyaránt $O(M^2)$ műveletet igényel. Az FFT alkalmazásával elérhető az $O(M \cdot \log_2 M)$ komplexitás.

Példa a konvolúciós tételre

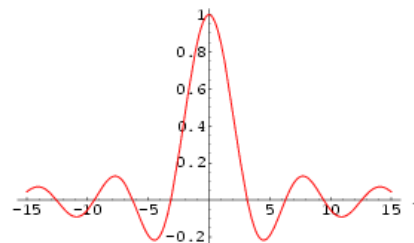


Doboz függvény



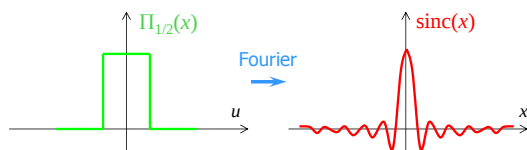
$$\Pi_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| \leq w \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

sinc függvény



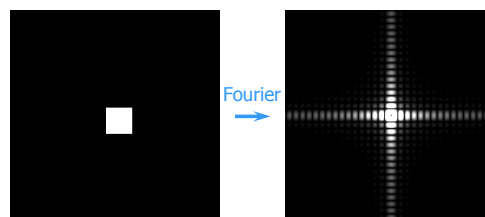
$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \end{cases} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

A sinc és a doboz függvény kapcsolata



$$F[\Pi_{1/2}(x)](k) = \text{sinc}(k \cdot \pi)$$

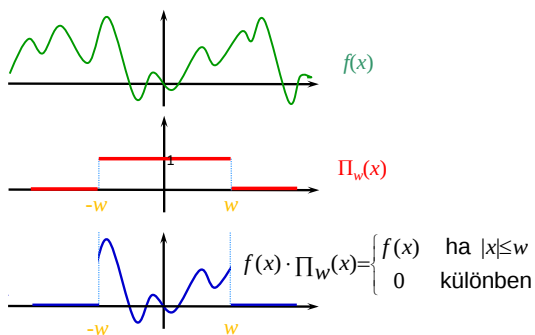
A sinc és a doboz függvény kapcsolata



2D doboz függvény

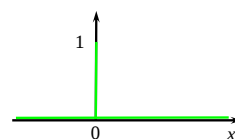
2D sinc függvény

Pontenkénti szorzás doboz függvénnyel

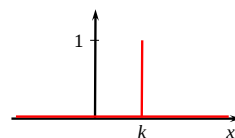


$$f(x) \cdot \Pi_w(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } |x| \leq w \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A δ-függvény és eltolója



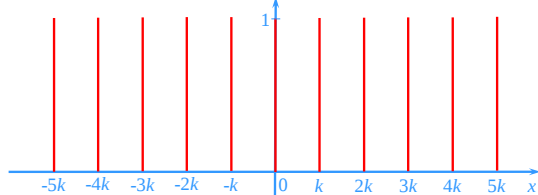
$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



$$\delta(x-k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

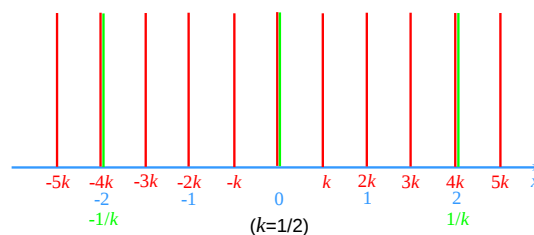
Dirac fésű (Shah function)

$$\text{comb}_k(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n \cdot k)$$

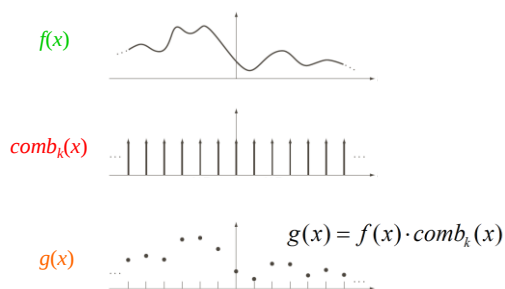


A Dirac fésű Fourier transzformáltja

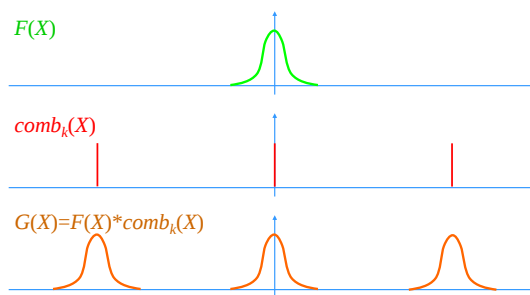
$$F[\text{comb}_k(x)] = \text{comb}_{1/k}(x)$$



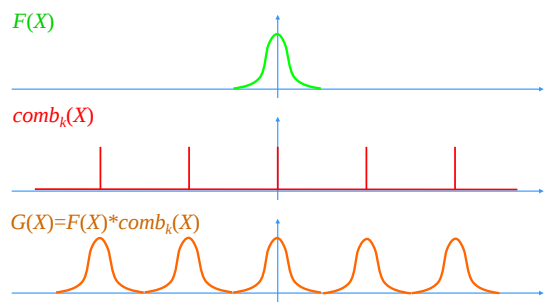
Pontonkénti szorzás a Dirac fésűvel – mintavételezés



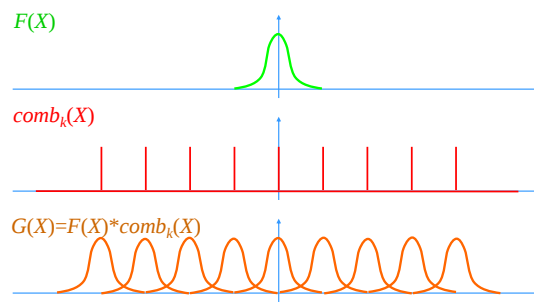
Konvolúció a Dirac fésűvel – periodikus másolás



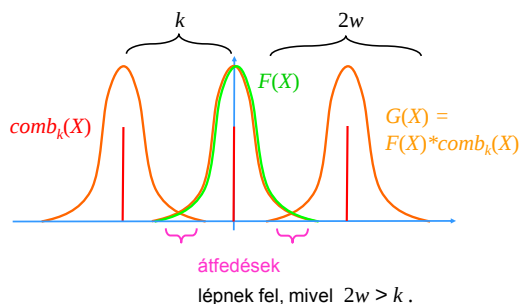
Konvolúció a Dirac fésűvel – periodikus másolás



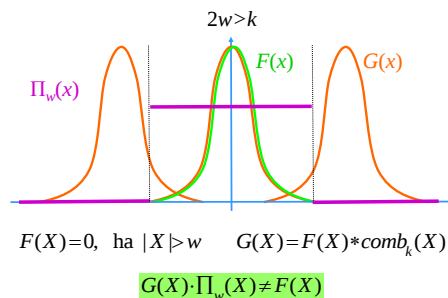
Konvolúció a Dirac fésűvel – periodikus másolás



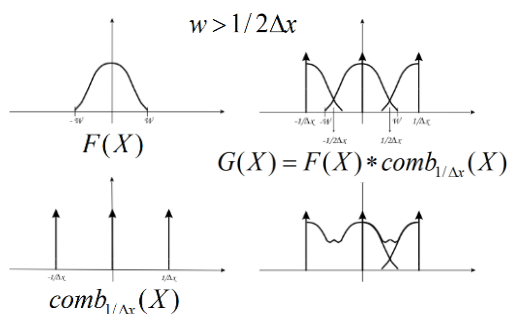
Átfedés, álcázás (aliasing)



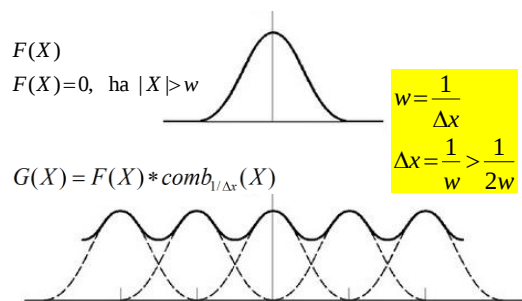
Átfedés, álcázás (aliasing)



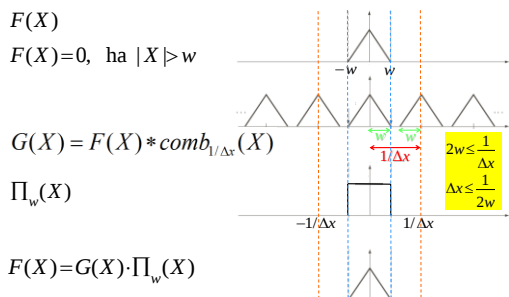
Átfedés, álcázás (aliasing)



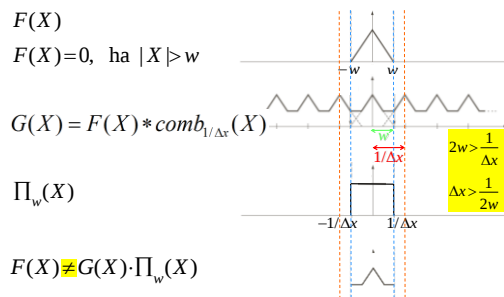
Átfedés, álcázás (aliasing)



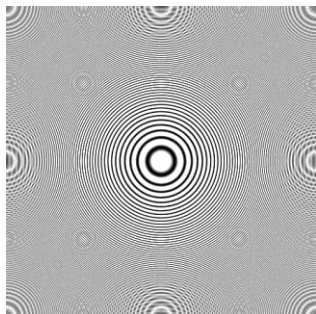
Ha nincs átfedés



Ha van átfedés

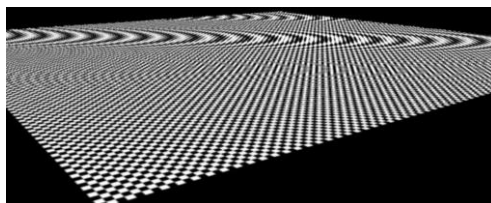


Átfedés, álcázás (*aliasing*)



a képen
hamis/fantom
minták jelennek
meg

Átfedés, álcázás (*aliasing*)



Átfedés, álcázás (*aliasing*)



korrekt mintavételezés



alul-mintavételezett

Átfedés, álcázás (*aliasing*)



Átfedés, álcázás (*aliasing*)

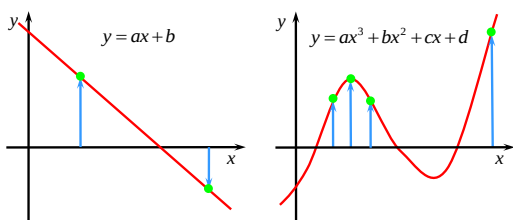


Anti-aliasing

A mintavételezés hibáinak korrigálása (pl. lépcsős élek lekerekítésével), az álcázás hatásainak csökkentése.



Folytonos függvény megadása néhány pontjával



Bármely n -edfokú polinomot egyértelműen meghatároz $n+1$ tetszőlegesen kiválasztott pontja.

Következésképpen: egy (mintavételezett) diszkrét jelből helyreállítható lehet a kiindulási (végtelen sok pontból álló) analóg jel.

A digitalizálás (mintavételezés) alapkérdése

Milyen (uniform) mintavételezés mentén hordoz ugyanannyi információt a mintavételezett kép, mint a folytonos?

(Hangsúlyozandó, hogy ezúttal csak az értelmezési tartomány digitalizálásával (vagyis a mintavételezéssel) foglalkozunk, az értékkészletével (a kvantálással) nem.)

Sávhatárolt (bandlimited) függvények

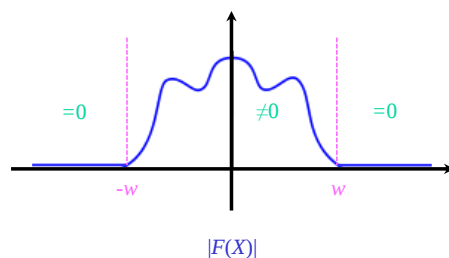
Az $f(x)$ függvény **sávhatárolt**, ha létezik olyan w , hogy $F(X)$ (vagyis az $f(x)$ Fourier transzformáltja) nem tartalmaz w -nél nagyobb frekvenciákat, azaz:

$$F(X)=0, \text{ ha } |X|>w.$$

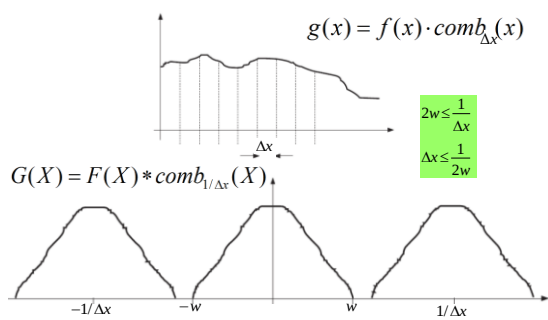
w -t **Nyquist-frekvenciának** nevezzük, ha

$$F(X)=0, \text{ ha } |X|>w, \text{ ugyanakkor } F(-w) \neq 0 \text{ vagy } F(w) \neq 0.$$

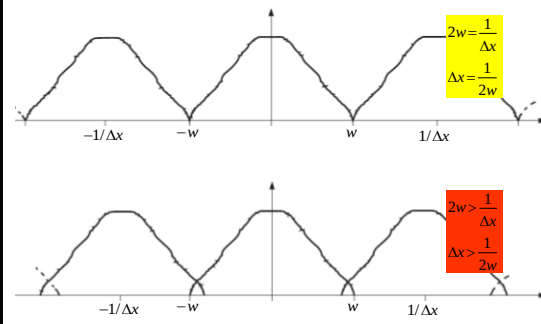
Sávhatárolt 1D függvény



Mintavételezés az Nyquist-frekvencia fölött



Mintavételezés az Nyquist-frekvenciánál és az alatt



Konvolúciós tétel (felidézés)

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(f \cdot g) = F(f) * F(g)$$

$$f * g = F^{-1}(F(f) \cdot F(g))$$

$$f \cdot g = F^{-1}(F(f) * F(g))$$

Folytonos képfüggvény visszaállítása mintákból

képtér

frekvencia-tér

$$f(x)$$

 $\Leftrightarrow$

$$F(X)$$

$$\text{comb}_{1/2w}(x)$$

 $\Leftrightarrow$

$$\text{comb}_{2w}(X)$$

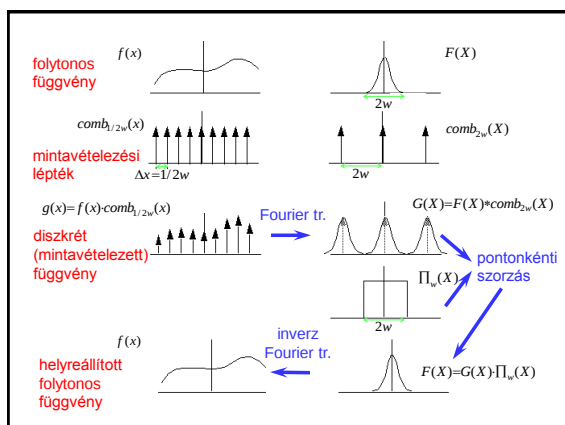
$$g(x) = f(x) \cdot \text{comb}_{1/2w}(x) \stackrel{+}{\Leftrightarrow} G(X) = F(X) * \text{comb}_{2w}(X)$$

$$f(x)$$

 $\Leftrightarrow$

$$F(X) = G(X) \cdot \Pi_w(X)$$

* A konvolúciós tétel 2. formulájából adódóan.

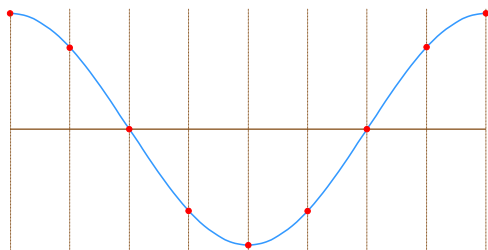


Whittaker-Shannon mintavételezési tétele

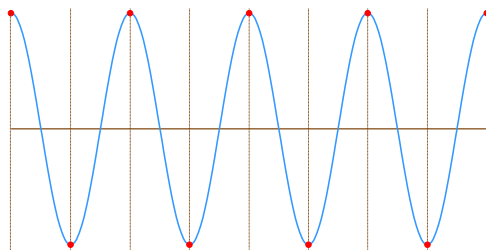
Az 1D folytonos, w -nél nagyobb frekvenciákat nem tartalmazó (sávhatárolt) jel akkor és csakis akkor állítható vissza a mintavételezettjéből, ha a Δx mintavételezési léptékre teljesül az alábbi feltétel:

$$\Delta x \leq \frac{1}{2w}.$$

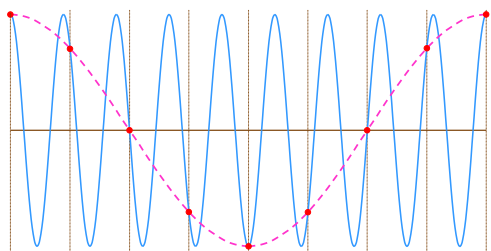
Mintavételezés az Nyquist-frekvencia fölött



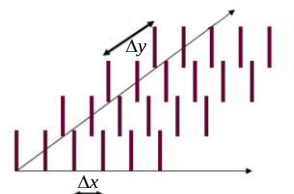
Mintavételezés az Nyquist-frekvenciával



Mintavételezés az Nyquist-frekvencia alatt



A 2D Dirac kefe



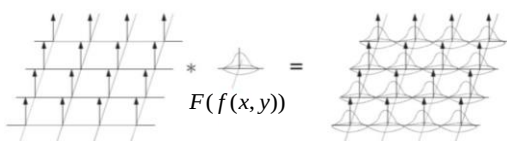
$$brush_{\Delta x, \Delta y}(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x = k \cdot \Delta x \text{ és } y = k \cdot \Delta y \\ 0 & , \text{ különben} \end{cases}$$

A Dirac kefe tulajdonságai

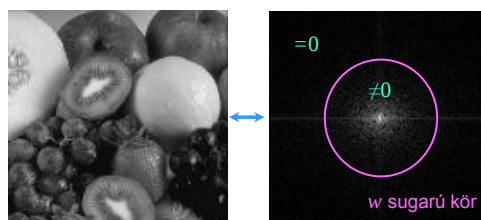
$$F(brush_{\Delta x, \Delta y}(x, y)) = brush_{1/\Delta x, 1/\Delta y}(x, y)$$

Pontonkénti szorzás (képtérben): mintavételezés

Konvolúció (frekvenciatérben): periodikus másolás



Sávhatárolt 2D függvény



$f(x, y)$

$|F(X, Y)|$

Whittaker-Shannon mintavételezési tétele 2D-ben

Az 1D folytonos, w -nél nagyobb frekvenciákat nem tartalmazó (sávhatárolt) jel akkor és csakis akkor állítható vissza a mintavételezettjéből, ha a Δx és a Δy mintavételezési léptékekre teljesülnek az alábbiak:

$$\Delta x, \Delta y \leq \frac{1}{2w}.$$