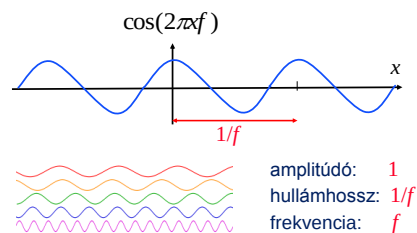
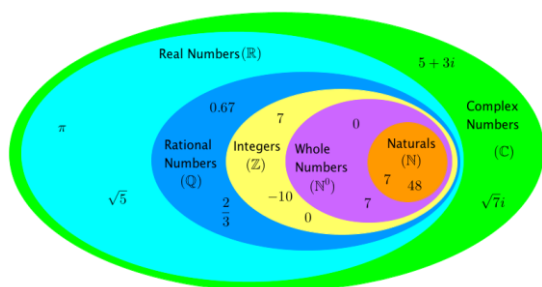


4. Fourier-transzformáció

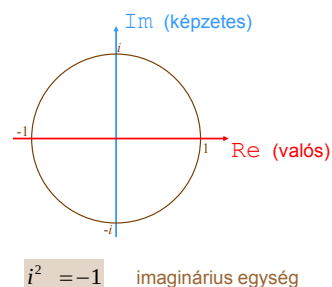
Frekvencia és hullámhossz



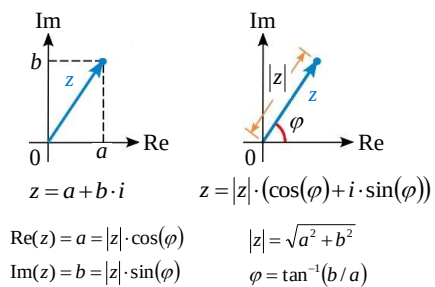
Számok



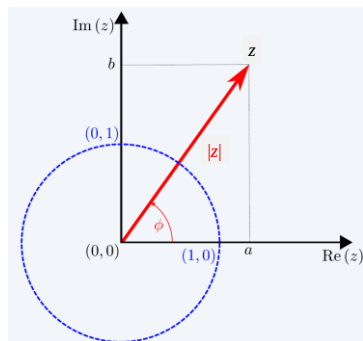
Komplex számok



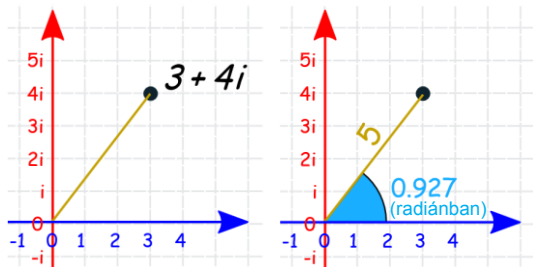
Komplex számok



Komplex számok



Komplex számok



Komplex számok

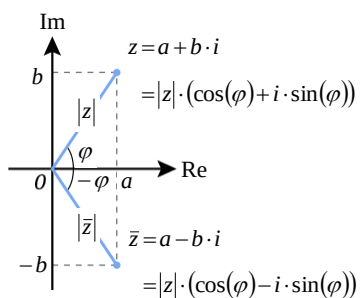
$$\operatorname{Re}(z) = a = |z| \cdot \cos(\varphi) \quad \text{valós rész}$$

$$\operatorname{Im}(z) = b = |z| \cdot \sin(\varphi) \quad \text{képzetes rész}$$

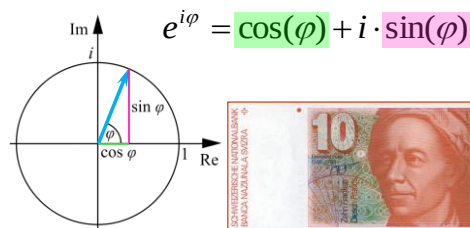
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{abszolút érték / magnitúdó}$$

$$\varphi = \tan^{-1}(b/a) \quad \text{fázis szög}$$

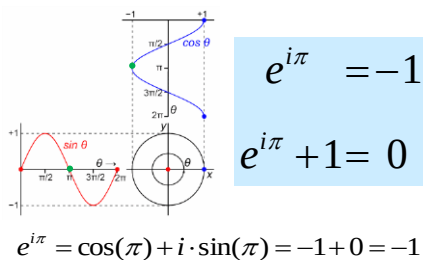
Komplex konjugált



Euler-formula



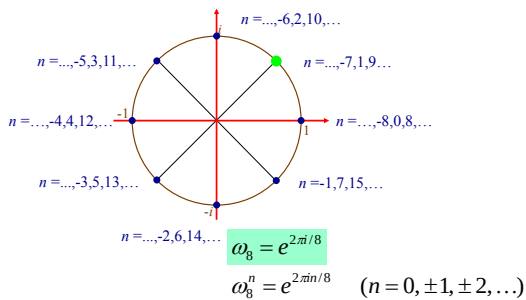
Euler-formula



Komplex számok hatványozása

$$\begin{aligned}
 (e^{i\varphi})^n &= (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n \\
 &= \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi) \\
 &= e^{in\varphi}
 \end{aligned}$$

Egységgyökök és hatványaik



Alkatrészek és termékek

	Mojito	Tequila Sunrise	Daiquiri	Margarita
fehér rum	5 cl	-	5 cl	-
tequila	-	4 cl	-	4 cl
triple sec	-	-	-	2 cl
lime leve	3 cl	-	2 cl	2 cl
grenadine	-	2 cl	-	-
menta	2 ág	-	-	-
cukorszirup	1 ek	-	1 ek	-
narancslé	-	1,5 dl	-	-
szóda	1,5 dl	-	-	-
jégkása	-	-	1,5 dl	1,5 dl

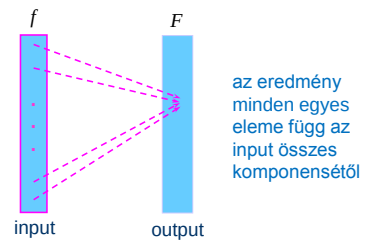
Alkatrészek és termékek

bázisfüggvények

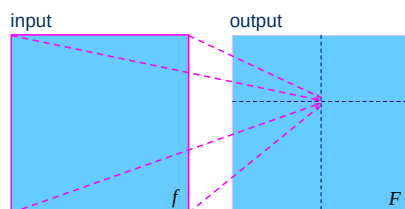
súlyok

fehér rum	5 cl	-	5 cl	-
tequila	-	4 cl	-	4 cl
triple sec	-	-	-	2 cl
lime leve	3 cl	-	2 cl	2 cl
grenadine	-	2 cl	-	-
menta	2 ág	-	-	-
cukorszirup	1 ek	-	1 ek	-
narancslé	-	1,5 dl	-	-
szóda	1,5 dl	-	-	-
jégkása	-	-	1,5 dl	1,5 dl

Globális művelet – 1D



Globális művelet – 2D



az eredmény minden egyes eleme
függ az input összes komponensétől

Transzformáció – 1D

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(M-1) \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(M-1) \end{bmatrix}$$

Lineáris transzformáció – 1D

$$\begin{aligned} \rightarrow F(X) &= \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cdot w(x, X) \\ \leftarrow f(x) &= \sum_{X=0}^{M-1} F(X) \cdot w'(x, X) \end{aligned}$$

($x, X = 0, 1, \dots, M-1$)

súlyok bázis-függvények

Transzformáció – 2D

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

↕

$$\begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \dots & F(0,N-1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \dots & F(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(M-1,0) & F(M-1,1) & \dots & F(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

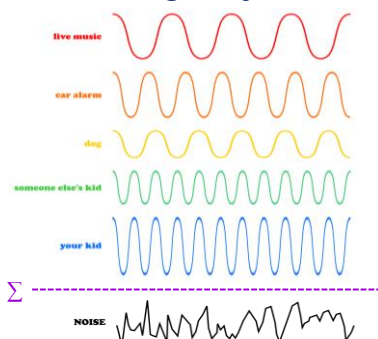
Lineáris transzformáció – 2D

$$\begin{aligned} \rightarrow F(X,Y) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot w(x,y,X,Y) \\ \leftarrow f(x,y) &= \sum_{X=0}^{M-1} \sum_{Y=0}^{N-1} F(X,Y) \cdot w'(x,y,X,Y) \end{aligned}$$

($x, X = 0, 1, \dots, M-1$;
 $y, Y = 0, 1, \dots, N-1$)

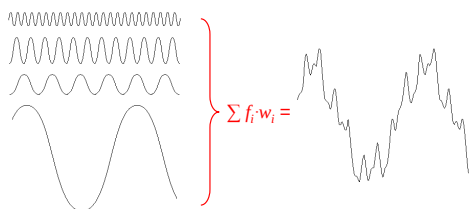
súlyok bázis-függvények

Összegzett jelek



Frekvencia-analízis

Nem-periodikus függvények is felírhatók különböző frekvenciájú sin és cos függvények súlyozott összegeként. Ennek matematikai eszköze a **Fourier-transzformáció**.



Fourier-transzformáció



Jean Baptiste Joseph Fourier

1D Fourier-transzformáció

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{DFT}} F(X) &= \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cdot w(x, X) \quad (X = 0, 1, \dots, M-1) \\ w(x, X) &= \frac{1}{M} e^{-2\pi i \frac{xX}{M}} \\ \xleftarrow{\text{IDFT}} f(x) &= \sum_{X=0}^{M-1} F(X) \cdot w'(x, X) \quad (x = 0, 1, \dots, M-1) \\ w'(x, X) &= e^{2\pi i \frac{xX}{M}} \end{aligned}$$

($x, X = 0, 1, \dots, M-1$)

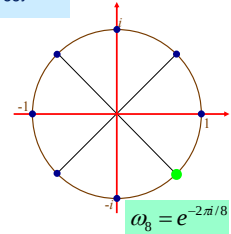
Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) – 1D

$$\omega_M = e^{-2\pi i / M} \quad \text{egy } M\text{-edik egységgyök}$$

$$w(x, X) = \frac{1}{M} e^{-2\pi i \frac{xX}{M}} = \frac{1}{M} \omega_M^{xX}$$

$$w'(x, X) = e^{2\pi i \frac{xX}{M}} = \bar{\omega}_M^{xX}$$

$$(x, X = 0, 1, \dots, M-1)$$



Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) – 1D

$$F(X) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cdot e^{-2\pi i \frac{xX}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cdot \omega_M^{xX} \quad (X = 0, 1, \dots, M-1)$$

$$\omega_M = e^{-2\pi i / M}$$

$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} \omega_M^0 & \omega_M^0 & \omega_M^0 & \cdots & \omega_M^0 \\ \omega_M^0 & \omega_M^1 & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{M-1} \\ \omega_M^0 & \omega_M^2 & \omega_M^4 & \cdots & \omega_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_M^0 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(M-1) \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{A}}$

Inverz Diszkrét Fourier-transzformáció (IDFT) – 1D

$$f(x) = \sum_{X=0}^{M-1} F(X) \cdot e^{2\pi i \frac{xX}{M}} = \sum_{X=0}^{M-1} F(X) \cdot \bar{\omega}_M^{xX} \quad (x = 0, 1, \dots, M-1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^0 & \cdots & \bar{\omega}_M^0 \\ \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^1 & \bar{\omega}_M^2 & \cdots & \bar{\omega}_M^{M-1} \\ \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^2 & \bar{\omega}_M^4 & \cdots & \bar{\omega}_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^{M-1} & \bar{\omega}_M^{2(M-1)} & \cdots & \bar{\omega}_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(M-1) \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{B}}$

$$\omega_M = e^{-2\pi i / M}$$

A DFT és az IDFT mátrixai

$$A = A^T = \frac{1}{M} \cdot \bar{B} = B^{-1}$$

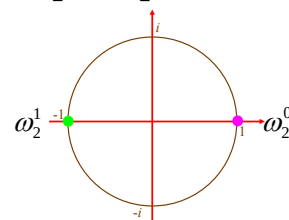
$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} \omega_M^0 & \omega_M^0 & \omega_M^0 & \cdots & \omega_M^0 \\ \omega_M^0 & \omega_M^1 & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{M-1} \\ \omega_M^0 & \omega_M^2 & \omega_M^4 & \cdots & \omega_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_M^0 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}$$

$$B = B^T = M \cdot \bar{A} = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^0 & \cdots & \bar{\omega}_M^0 \\ \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^1 & \bar{\omega}_M^2 & \cdots & \bar{\omega}_M^{M-1} \\ \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^2 & \bar{\omega}_M^4 & \cdots & \bar{\omega}_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\omega}_M^0 & \bar{\omega}_M^{M-1} & \bar{\omega}_M^{2(M-1)} & \cdots & \bar{\omega}_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}$$

A DFT mátrixa: $M=2$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_2^0 & \omega_2^0 \\ \omega_2^0 & \omega_2^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



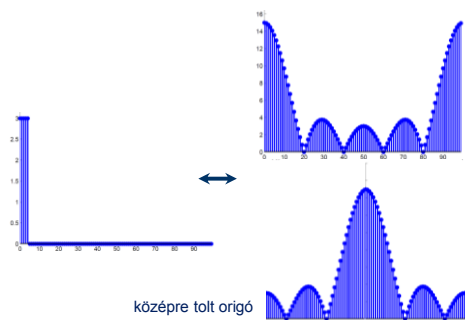
A unit circle in the complex plane. The horizontal axis is labeled with -1 on the left and 1 on the right. The vertical axis is labeled with i at the top and -1 at the bottom. Four points are marked on the circle: ω_4^0 at $(1, 0)$, ω_4^1 at $(0, -1)$, ω_4^2 at $(-1, 0)$, and ω_4^3 at $(0, 1)$. The points are connected by a brown circle.

valós rész: folytonos vonal
képzetes rész: szaggatott vonal

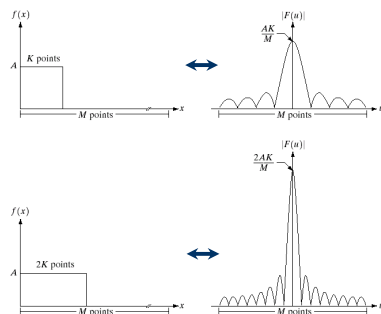
A DFT tórusz mátrixa

The diagram illustrates the transformation of a function $f(x)$ into its absolute value $|f(x)|$. On the left, the plot of $f(x)$ shows a function with both positive and negative values. On the right, the plot of $|f(x)|$ shows the function where all negative values have been reflected above the x-axis, making the entire function non-negative. A double-headed arrow between the two plots indicates the transformation process.

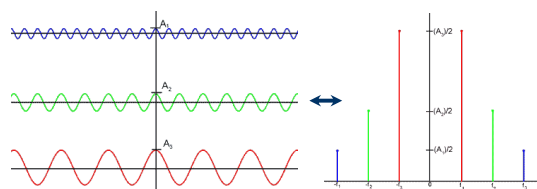
Példák 1D DFT-re



Példák 1D DFT-re



Példa 1D DFT-re



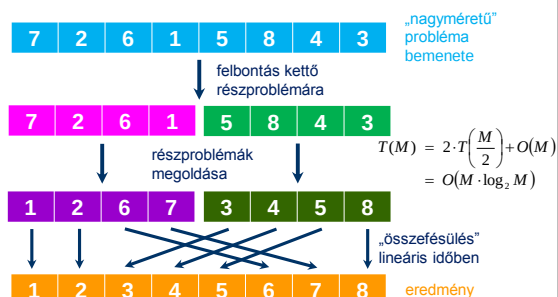
Az 1D DFT műveletigénye

$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} \omega_M^0 & \omega_M^0 & \omega_M^0 & \cdots & \omega_M^0 \\ \omega_M^0 & \omega_M^1 & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{M-1} \\ \omega_M^0 & \omega_M^2 & \omega_M^4 & \cdots & \omega_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_M^0 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(M-1) \end{bmatrix}$$

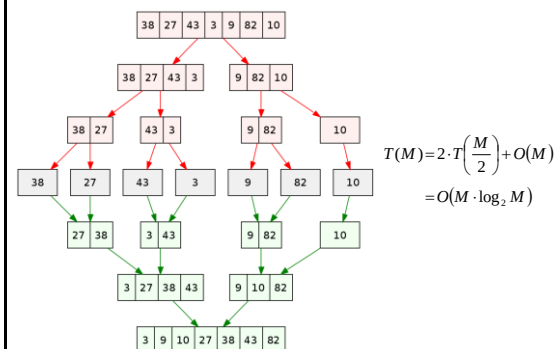
$M \times M$ $M \times 1$ $M \times 1$

$$M \cdot M = M^2 \text{ szorzás}$$

Merge sort



Merge sort – divide-and-conquer



Gyors Fourier transzformáció (Fast Fourier Transform, FFT)

A Fourier transzformáció $M \times M$ -es mátrixa speciális (szimmetrikus és csak M -féle elemet tartalmaz), ugyanis:

$$A(u, v) = \frac{1}{M} \cdot \omega_M^{uv} \quad (u, v = 0, 1, \dots, M-1).$$

Ezt kihasználva, egy M -elemű jel transzformációja megkapható kettő $(M/2)$ -elemű jel transzformáltjának $O(M)$ (lineáris) idejű „összefűtésével”, így az időigény $O(M \cdot \log_2 M)$.

Cooley, Tukey, 1965

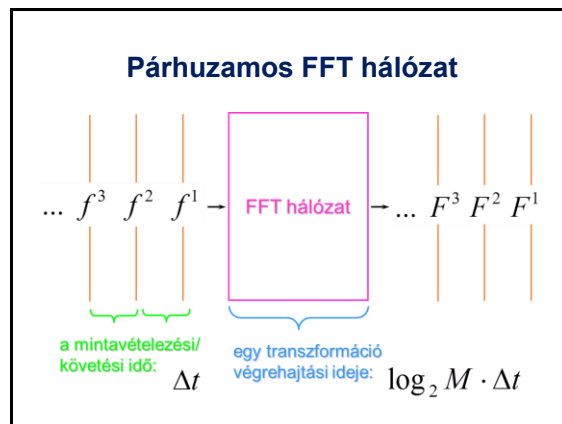
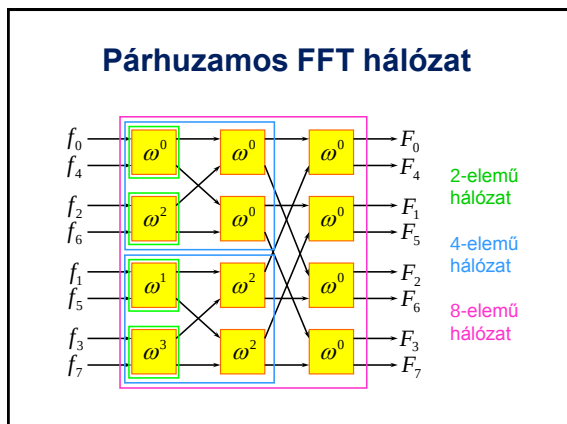
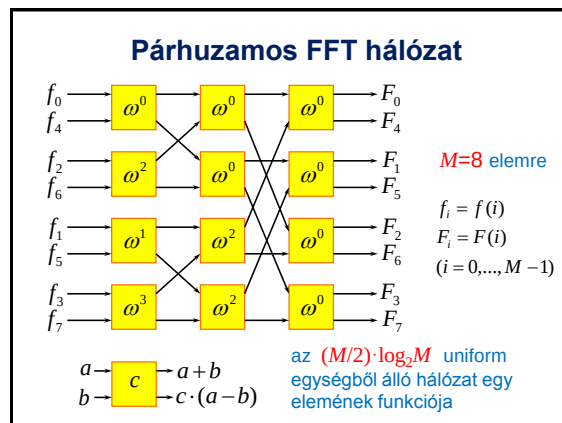
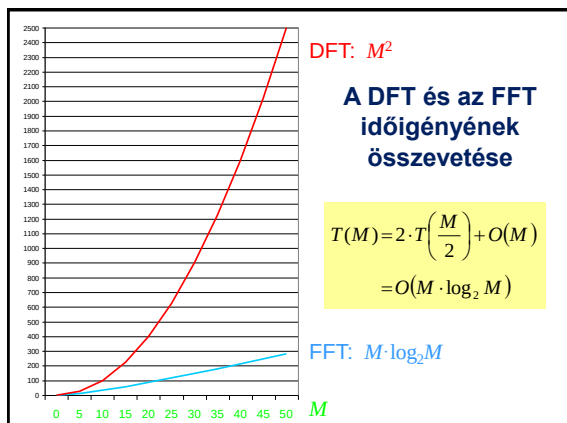
FFT

$$M = 2^n = 2K$$

$$\omega_M = e^{-2\pi i / M}$$

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{2K} \sum_{x=0}^{2K-1} f(x) \cdot \omega_{2K}^{xX} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) \cdot \omega_{2K}^{2xX} + \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) \cdot \omega_{2K}^{(2x+1)X} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) \cdot \omega_K^{xX} + \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) \cdot \omega_K^{xX} \cdot \omega_{2K}^X \right] \\ &= \frac{1}{2} [F_{\text{even}}(X) + \omega_{2K}^X \cdot F_{\text{odd}}(X)] \end{aligned}$$

páros páratlan



2D Fourier-transzformáció

$$\xrightarrow{\text{DFT}} F(X,Y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot w(x,y,X,Y)$$

$$w(x,y,X,Y) = \frac{1}{MN} e^{-2\pi i \left(\frac{xX}{M} + \frac{yY}{N} \right)}$$

$$\xleftarrow{\text{IDFT}} f(x,y) = \sum_{X=0}^{M-1} \sum_{Y=0}^{N-1} F(X,Y) \cdot w'(x,y,X,Y)$$

$$w'(x,y,X,Y) = e^{2\pi i \left(\frac{xX}{M} + \frac{yY}{N} \right)}$$

($x, X = 0, 1, \dots, M-1$; $y, Y = 0, 1, \dots, N-1$)

2D Fourier-transzformáció

$$f(x,y) = \sum_{X=0}^{M-1} \sum_{Y=0}^{N-1} F(X,Y) \cdot w'(x,y,X,Y)$$

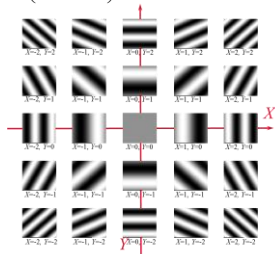
egy pixel bázisfüggvény

$$f = \sum_{X=0}^{M-1} \sum_{Y=0}^{N-1} F(X,Y) \cdot W'(X,Y)$$

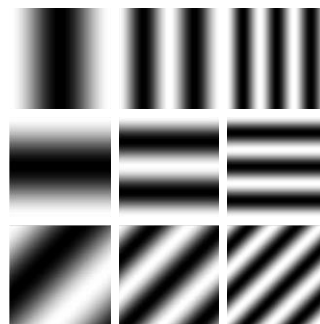
teljes kép báziskép

2D DFT bázisképei

$$\operatorname{Re} \left(e^{-2\pi i \left(\frac{xX}{M} + \frac{yY}{N} \right)} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{M} xX + \frac{2\pi}{N} yY \right)$$



2D DFT bázisképei



2D Fourier-transzformáció

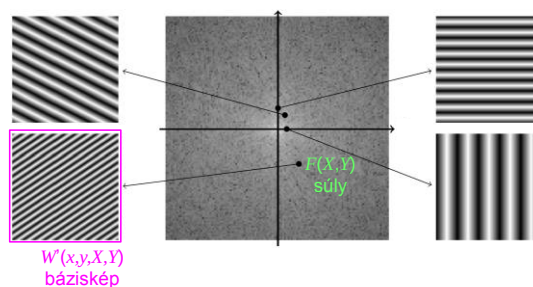
$$f(x,y) = F(0,0) \cdot W'(0,0) +$$

$$F(0,1) \cdot W'(0,1) +$$

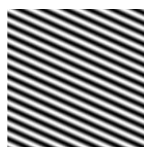
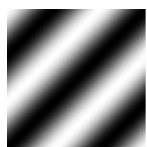
$$F(0,2) \cdot W'(0,2) +$$

...

2D Fourier-transzformáció



Bázisképek lineáris kombinációja

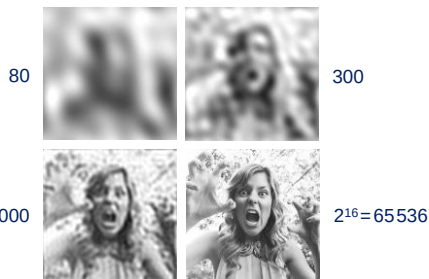


kettő a 2^{16} -féle
256x256-os
báziskép közül



lineáris kombinációjuk
(súlyozott összegük)

Bázisképek lineáris kombinációja



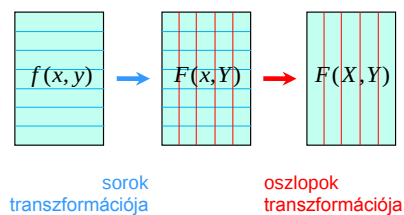
... báziskép súlyozott összege

A 2D DFT szeparálható

$$\begin{aligned}
 F(X,Y) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-i2\pi(xX/M + yY/N)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-i2\pi yY/N} \cdot e^{-i2\pi xX/M} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-i2\pi yY/N} \right] e^{-i2\pi xX/M} \\
 &= F(x,Y) \cdot e^{-i2\pi xX/M}
 \end{aligned}$$

$F(x,Y) =$

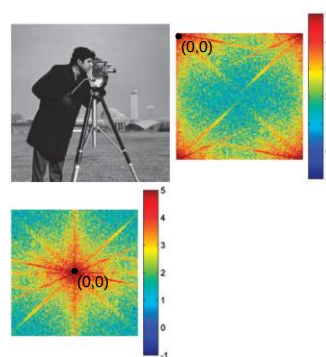
A 2D DFT szeparálható



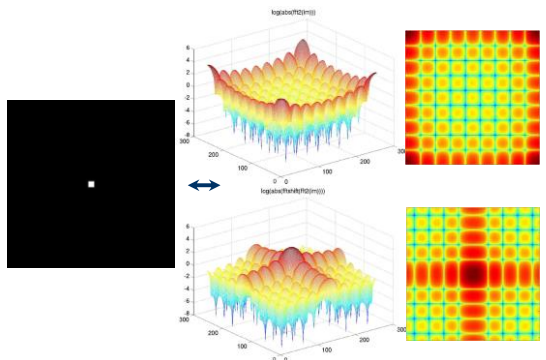
Az origó középére tolása

$$(-1)^{x+y} f(x,y) \leftrightarrow F\left(X - \frac{M}{2}, Y - \frac{N}{2}\right)$$

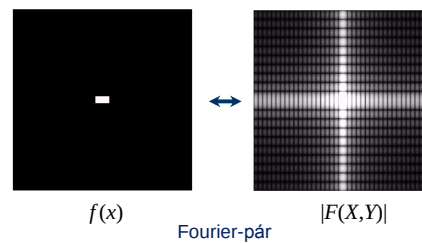
Az origó középére tolása



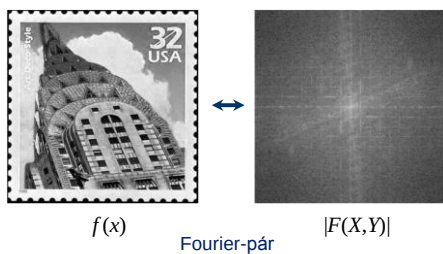
Az origó középre tolása



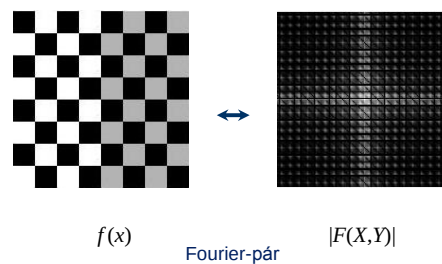
Kép-tér és frekvencia-tér



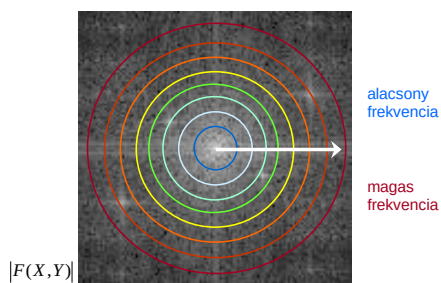
Kép-tér és frekvencia-tér



Kép-tér és frekvencia-tér



Frekvencia tér



A frekvenciakép megjelenítése

Általában a Fourier-spektrum az origótól távolodva gyorsan lecseng, ezért az

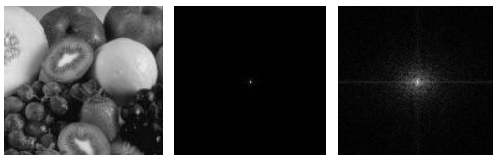
$$|F(x,y)|$$

helyett a

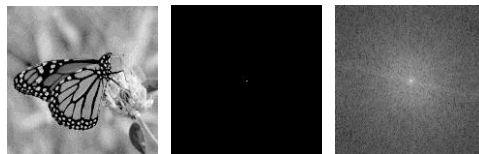
$$\log(1 + |F(X,Y)|)$$

megjelenítése javallott.

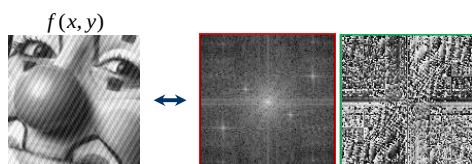
A frekvenciakép megjelenítése

 $f(x)$ $|F(X,Y)|$ $\log(1+|F(X,Y)|)$

A frekvenciakép megjelenítése

 $f(x)$ $|F(X,Y)|$ $\log(1+|F(X,Y)|)$

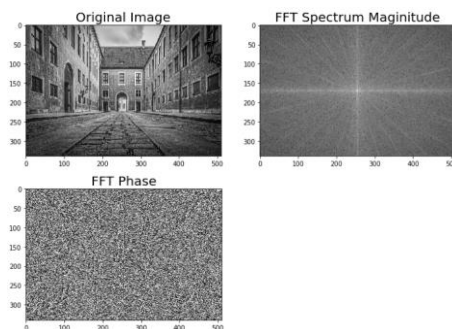
A frekvenciakép megjelenítése



magnitúdó: $|F(X,Y)| = \sqrt{\text{Re}(F(X,Y))^2 + \text{Im}(F(X,Y))^2}$

fázis: $\phi(F(X,Y)) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(F(X,Y))}{\text{Re}(F(X,Y))}\right)$

A frekvenciakép megjelenítése



Tulajdonságok

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Ha $f(x,y)$ valós, akkor

$$F(X,Y) = \overline{F(-X,-Y)}$$

és

$$|F(X,Y)| = |F(-X,-Y)|$$

Tulajdonságok

linearitás:

$$f_1(x,y) \leftrightarrow F_1(X,Y)$$

$$f_2(x,y) \leftrightarrow F_2(X,Y)$$

$$a_1 \cdot f_1(x,y) + a_2 \cdot f_2(x,y) \leftrightarrow a_1 \cdot F_1(X,Y) + a_2 \cdot F_2(X,Y)$$

eltolás:

$$f(x,y) \leftrightarrow F(X,Y)$$

$$f(x-x_0, y-y_0) \leftrightarrow F(X,Y) \cdot e^{-2\pi i(x_0 X / M + y_0 Y / N)}$$

Tulajdonságok

skálázás:

$$f(x, y) \leftrightarrow F(X, Y)$$

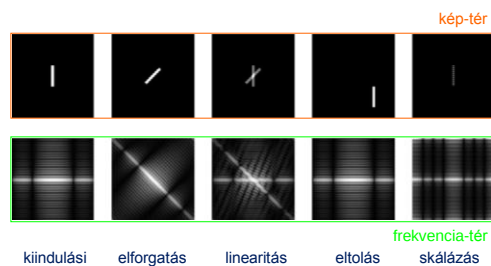
$$f(a \cdot x, b \cdot y) \leftrightarrow \frac{1}{|a \cdot b|} F\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{b}\right)$$

elforgatás:

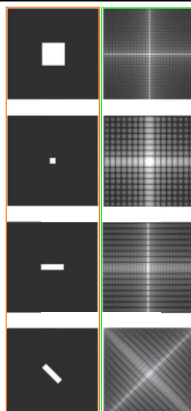
$$f(r, \phi) \leftrightarrow F(R, \phi)$$

$$f(r, \phi + \alpha) \leftrightarrow F(R, \phi + \alpha)$$

Tulajdonságok



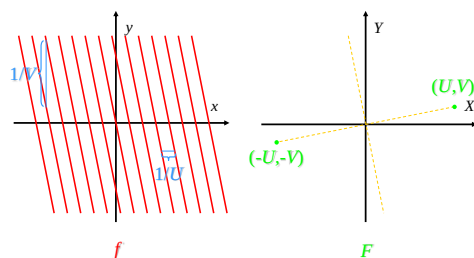
kép-tér



Tulajdonságok

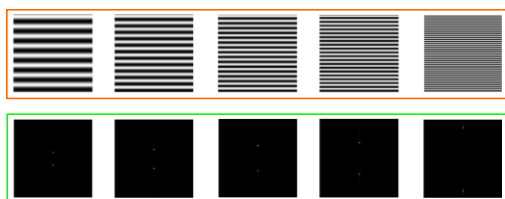
frekvencia-tér

Tulajdonságok



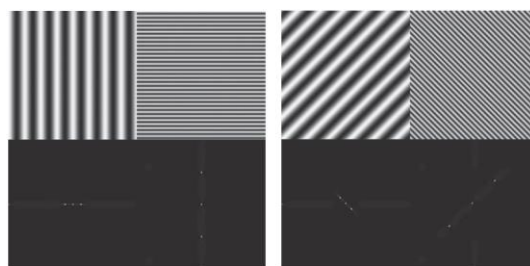
Tulajdonságok

kép-tér

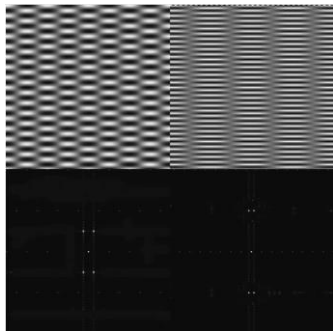


frekvencia-tér

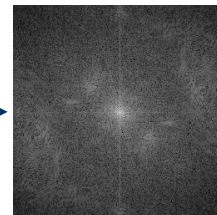
Tulajdonságok



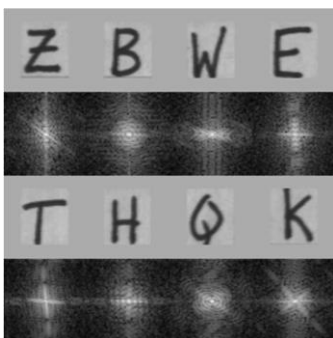
Tulajdonságok



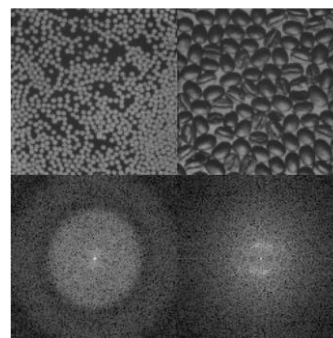
Példa 2D Fourier transzformációra


 $f(x)$

 $|F(X,Y)|$

Példa 2D Fourier transzformációra



Példa 2D Fourier transzformációra



Analóg Fourier transzformáció - 1D

$$f \in L^1(-\infty, \infty) \quad (\text{folytonos})$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x X} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(X) \cdot e^{2\pi i x X} dX \quad (\text{inverz trafó})$$

bázis-függvények

Analóg Fourier transzformáció - 2D

$$F(X,Y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} f(x,y) \cdot e^{-2\pi i (xX+yY)} dx dy$$

$$f(x,y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} F(X,Y) \cdot e^{2\pi i (xX+yY)} dX dY$$

bázis-függvények