

5. Konvolúció

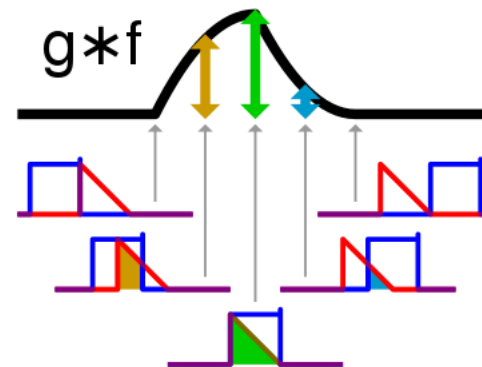
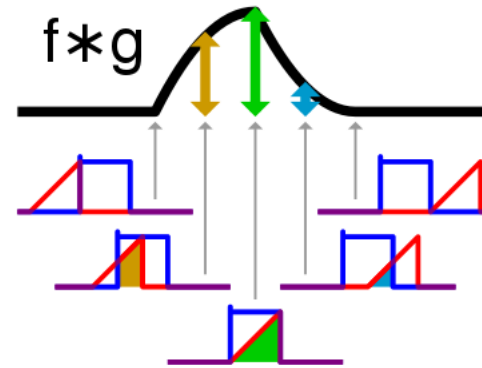
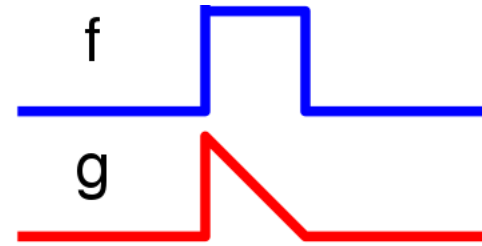
Konvolúció (analóg, 1D-2D)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x - u) \, du$$

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \cdot g(x - u, y - v) \, du \, dv$$

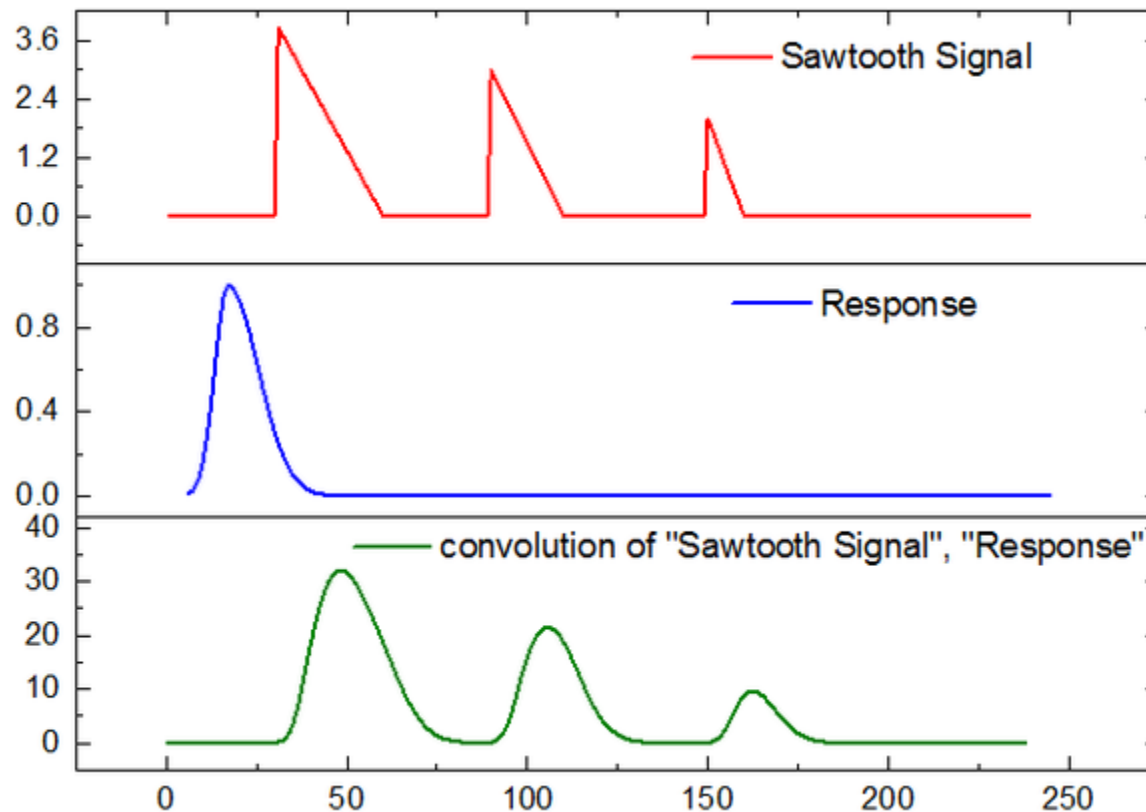
Konvolúció (analóg, 1D)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du$$



Konvolúció (analóg, 1D)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du$$



1D konvolúció

Input (M - és N -elemű):

$$f = [f(0), f(1), \dots, f(M-1)],$$

$$g = [g(0), g(1), \dots, g(N-1)]$$

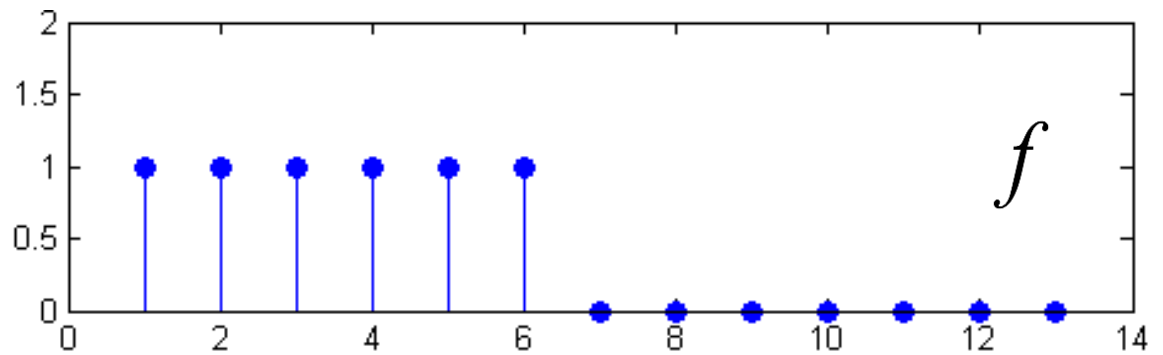
Output ($(M+N-1)$ -elemű):

$$(f * g)(k) = \sum_{j=0}^{M-1} f(j) \cdot g(k-j)$$

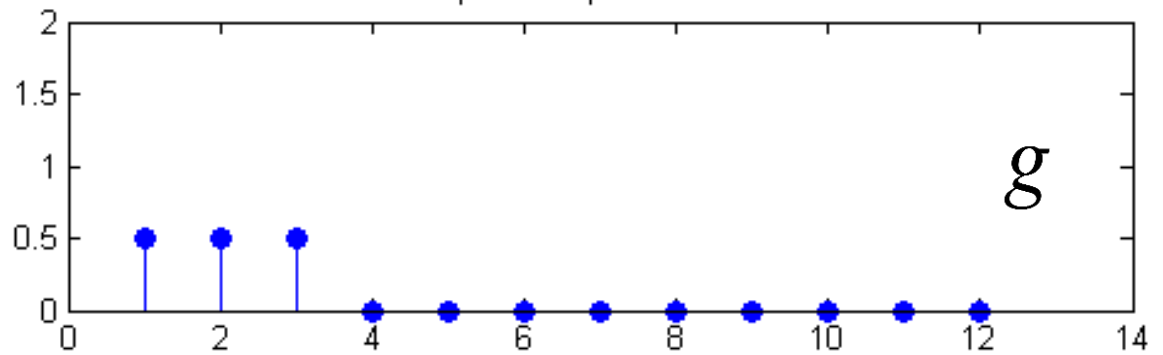
$$(k = 0, 1, 2, \dots, M + N - 2; \quad g(i) = 0, \text{ ha } i < 0).$$

1D konvolúció

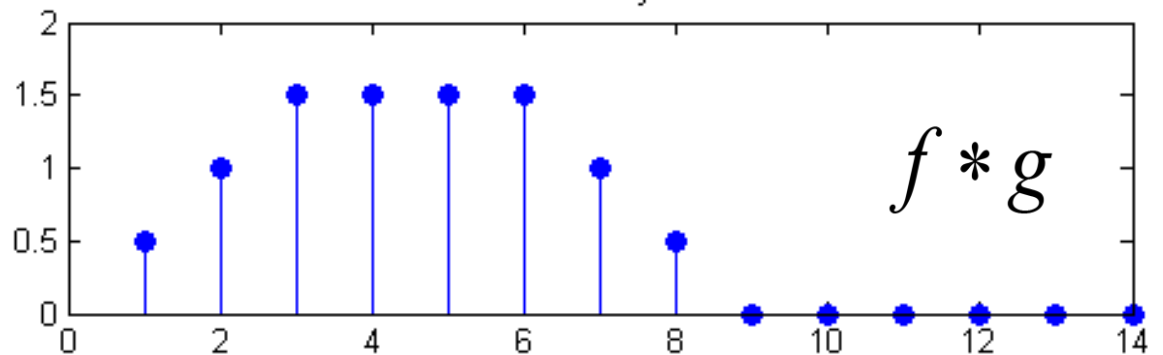
$$(f * g)(k) = \sum_{j=0}^{M-1} f(j) \cdot g(k-j)$$



Réponse impulsionnelle h



Sortie y



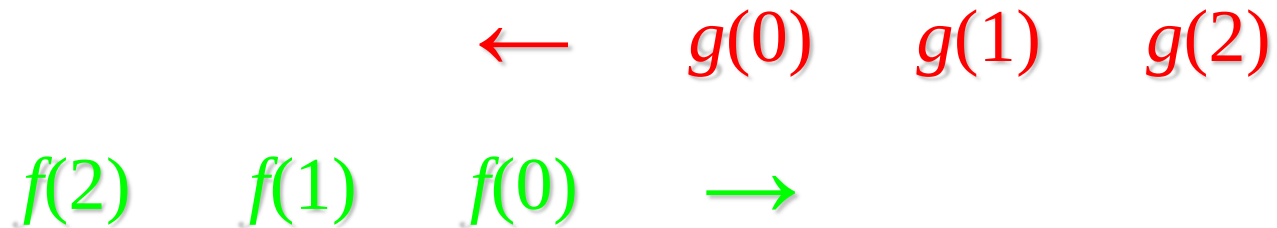
1D konvolúció



Példa konvolúcióra

$$M=N=3$$

$$h = f * g$$



kiindulási helyzet

Példa konvolúcióra

$$M=N=3$$

$$h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow & & & \end{array}$$

$$h(0) = f(0) \cdot g(0)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3$$

$$h = f * g$$

$$\leftarrow \quad g(0) \quad g(1) \quad g(2)$$

$$f(2) \quad f(1) \quad f(0) \quad \rightarrow$$

$$h(1) = f(0) \cdot g(1) + f(1) \cdot g(0)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3$$

$$h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccc} \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ & f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow \end{array}$$

$$h(2) = f(0) \cdot g(2) + f(1) \cdot g(1) + f(2) \cdot g(0)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3$$

$$h = f * g$$

$$\begin{array}{ccccc} \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & \\ & & f(2) & f(1) & f(0) \rightarrow \end{array}$$

$$h(3) = f(1) \cdot g(2) + f(2) \cdot g(1)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3$$

$$h = f * g$$

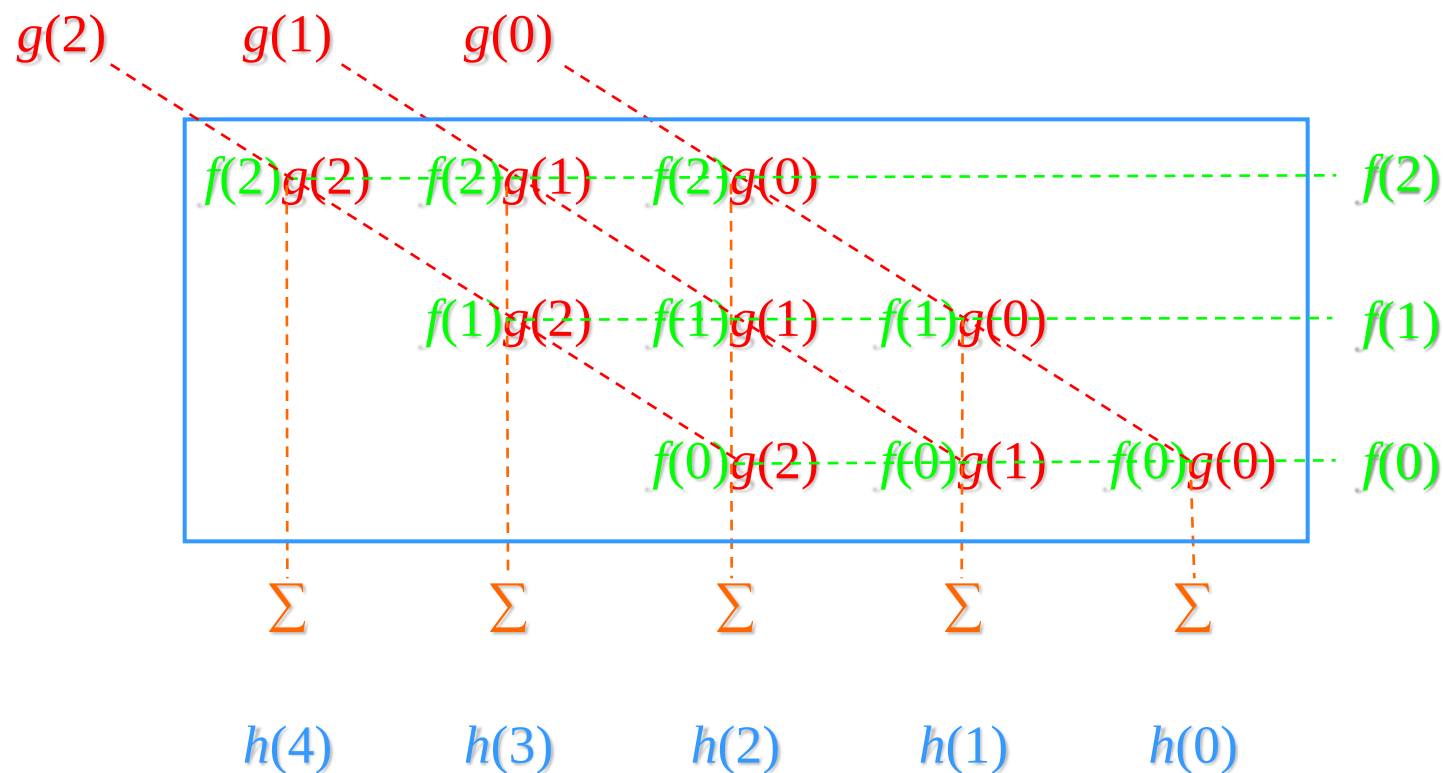
$$\begin{array}{ccccccc} \leftarrow & g(0) & g(1) & g(2) & & & \\ & & & f(2) & f(1) & f(0) & \rightarrow \end{array}$$

$$h(4) = f(2) \cdot g(2)$$

Példa konvolúcióra

$$M=N=3$$

$$h = f * g$$



Polinomok szorzása

Polinomok:

$$p(x) = a(m-1) \cdot x^{m-1} + \dots + a(1) \cdot x^1 + a(0) \cdot x^0$$

$$q(x) = b(n-1) \cdot x^{n-1} + \dots + b(1) \cdot x^1 + b(0) \cdot x^0$$

$$p(x) \cdot q(x) = c(m+n-2) \cdot x^{m+n-2} + \dots + c(1) \cdot x^1 + c(0) \cdot x^0$$

Együttható-vektorok:

$$a = [a(m-1), \dots, a(1), a(0)]$$

$$b = [b(n-1), \dots, b(1), b(0)]$$

$$a * b = [c(m+n-2), \dots, c(1), c(0)]$$

Számok mint polinomok

m-jegyű decimális szám:

$$p(x) = a(m-1) \cdot x^{m-1} + \dots + a(1) \cdot x^1 + a(0) \cdot x^0$$

$$x = 10$$

$$0 \leq a(m-1), \dots, a(1), a(0) \leq 9$$

Műveletek nagy számokkal vagy számítások nagy precizitással

Bejelentés 2019. március 14-én (a Pi-napon):
*Emma Haruka Iwao, a Google programozónője rekordot döntött azzal, hogy **31 ezermilliárd számjegy** pontossáig számolta ki a Pi értékét – átadva a múltnak a korábbi 22 ezermilliárd számjegyű pontosságot.*
A számítás 25 virtuális számítógépen 125 napig tartott (170 terabyte tárigénnyel).

<https://www.bbc.com/news/technology-47524760>

1D konvolúció – mátrix-vektor szorzás

$$h = f * g \quad (M = 4, N = 3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f(3) & f(2) & f(1) & f(0) & 0 & 0 \\ 0 & f(3) & f(2) & f(1) & f(0) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) & f(2) & f(1) & f(0) \\ 0 & 0 & 0 & f(3) & f(2) & f(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(3) & f(2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f(3) \end{bmatrix}}_{(M+N-1) \times (M+N-1)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g(0) \\ g(1) \\ g(2) \end{bmatrix}}_{(M+N-1) \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ h(4) \\ h(5) \end{bmatrix}}_{(M+N-1) \times 1}$$

felső trianguláris Toeplitz mátrix

Az 1D konvolúció műveletigénye

szorzások száma

$h(0)$	$= f(0) \cdot g(0)$	1
$h(1)$	$= f(0) \cdot g(1) + f(1) \cdot g(0)$	2
$\vdots$		$\vdots$
$h(M-2)$	$= f(0) \cdot g(M-2) + \dots + f(M-2) \cdot g(0)$	$M-1$
$h(M-1)$	$= f(0) \cdot g(M-1) + f(1) \cdot g(M-2) + \dots + f(M-1) \cdot g(0)$	M
$h(M)$	$= f(1) \cdot g(M-1) + \dots + f(M-1) \cdot g(1)$	$M-1$
$\vdots$		$\vdots$
$h(2M-3)$	$= f(M-2) \cdot g(M-1) + f(M-1) \cdot g(M-2)$	2
$h(2M-2)$	$= f(M-1) \cdot g(M-1)$	1

$$M + 2 \sum_{i=1}^{M-1} i = M + 2 \frac{(M-1)(M-2)}{2} = M^2 - 2M + 3 = O(M^2)$$

2D konvolúció

Input:

$$f = [f(x, y)] \quad M \times N \text{ - es}$$

$$g = [g(u, v)] \quad K \times L \text{ - es}$$

Output:

$$(f * g)(s, t) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) \cdot g(s-i, t-j)$$

$$(M + K - 1) \times (N + L - 1) \text{ - es;}$$

$$g(p, q) = 0, \text{ ha } p, q < 0$$

Képek konvolúciója a gyakorlatban

Input:

$$f = [f(x, y)] \quad M \times N \text{ - es}$$

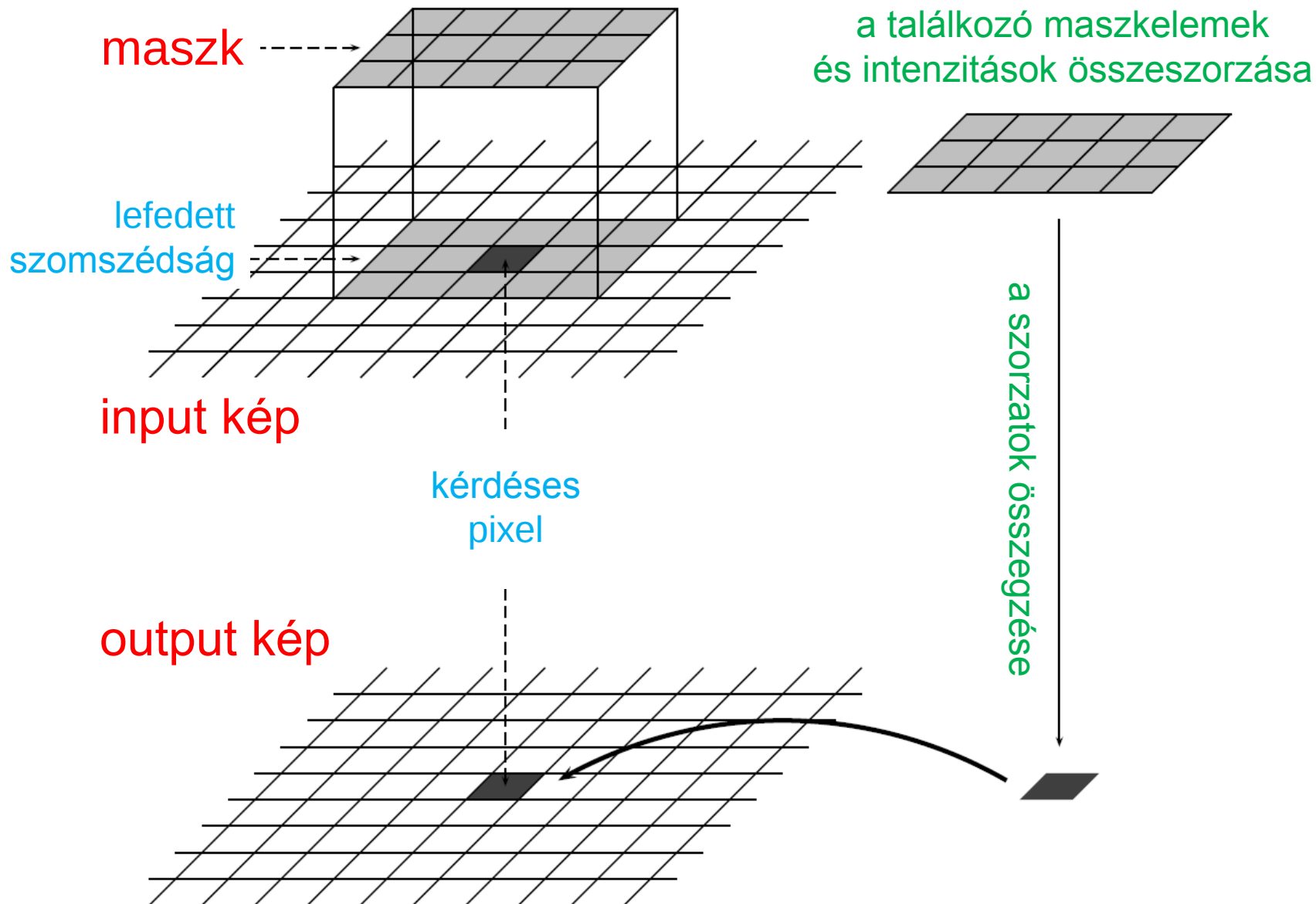
$$g = [g(u, v)] \quad (2K + 1) \times (2K + 1) \text{ - es}$$

Output:

$$(f * g)(s, t) = \sum_{i=-K}^K \sum_{j=-K}^K f(s+i, t+j) \cdot g(i, j)$$

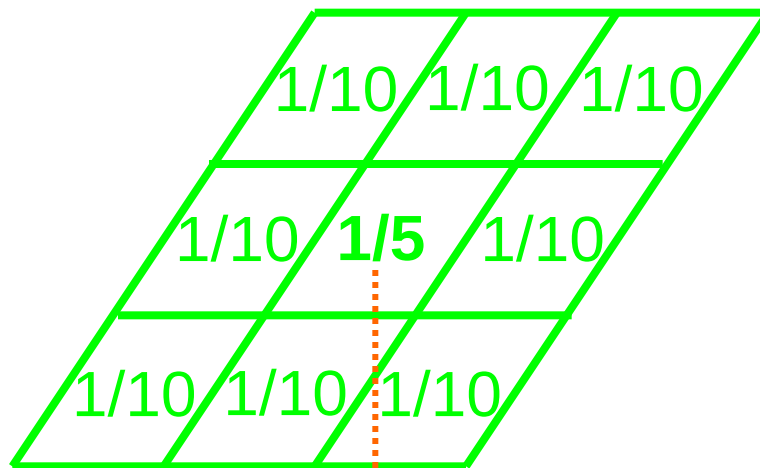
$$(M \times N \text{ - es, vagy } (M - K) \times (N - K) \text{ - as}).$$

Képek konvolúciója a gyakorlatban



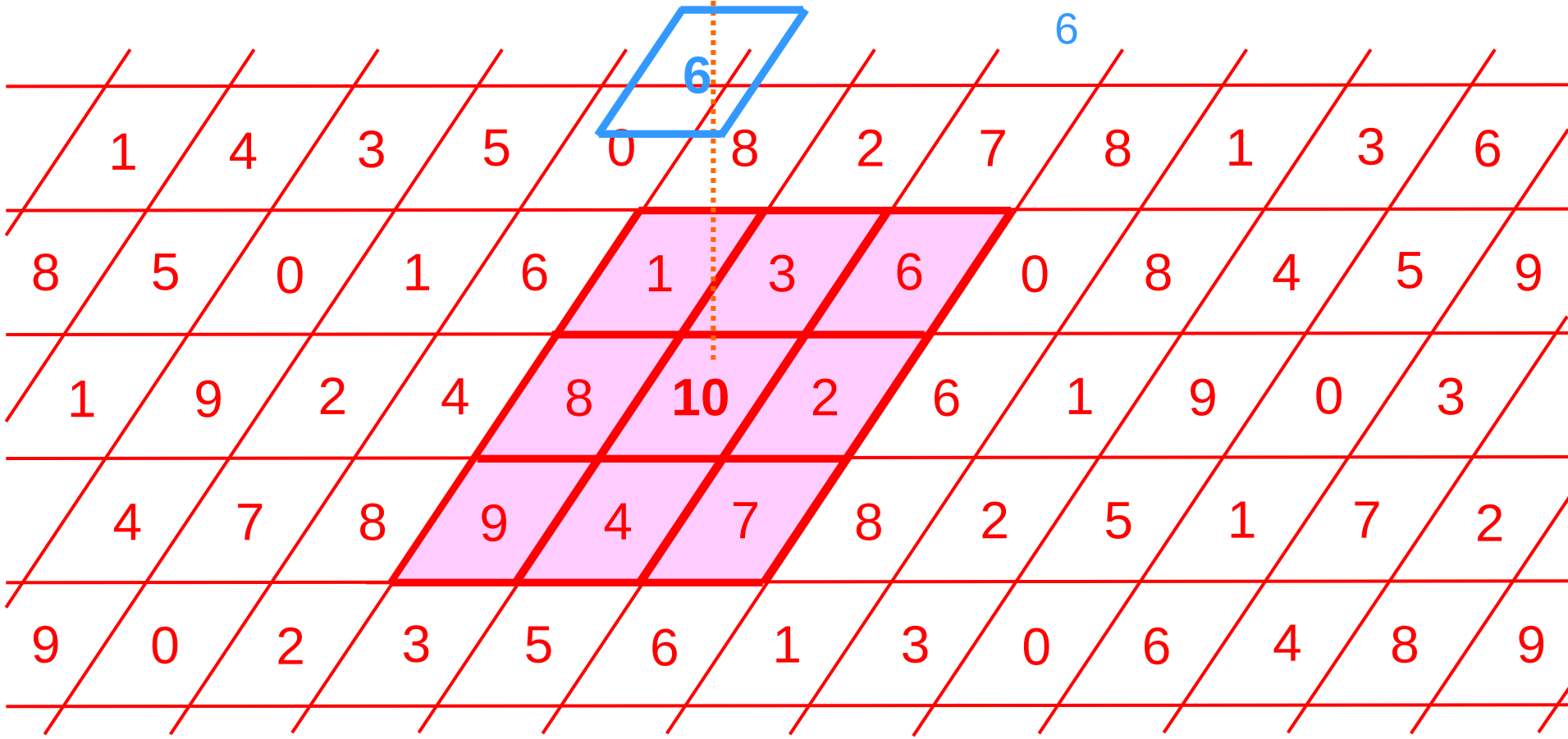
Példa

A g maszk
mérete:
3x3 ($K=1$)



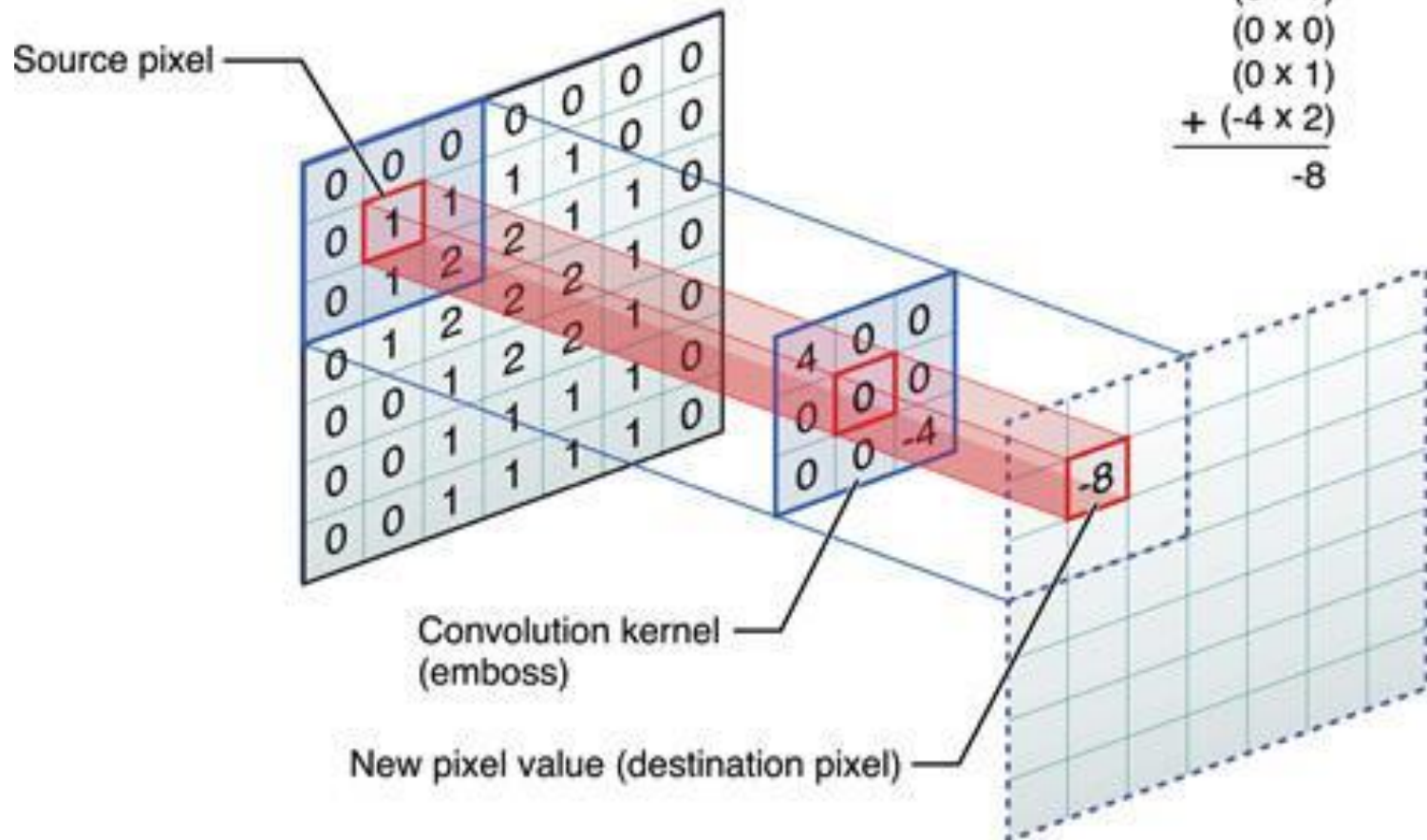
A $h=f*g$ konvolvált
kép adott pontjának
számítása:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1/10 + 3 \cdot 1/10 + 6 \cdot 1/10 + \\ &8 \cdot 1/10 + 10 \cdot 1/5 + 2 \cdot 1/10 + \\ &9 \cdot 1/10 + 4 \cdot 1/10 + 7 \cdot 1/10 = \\ &6 \end{aligned}$$

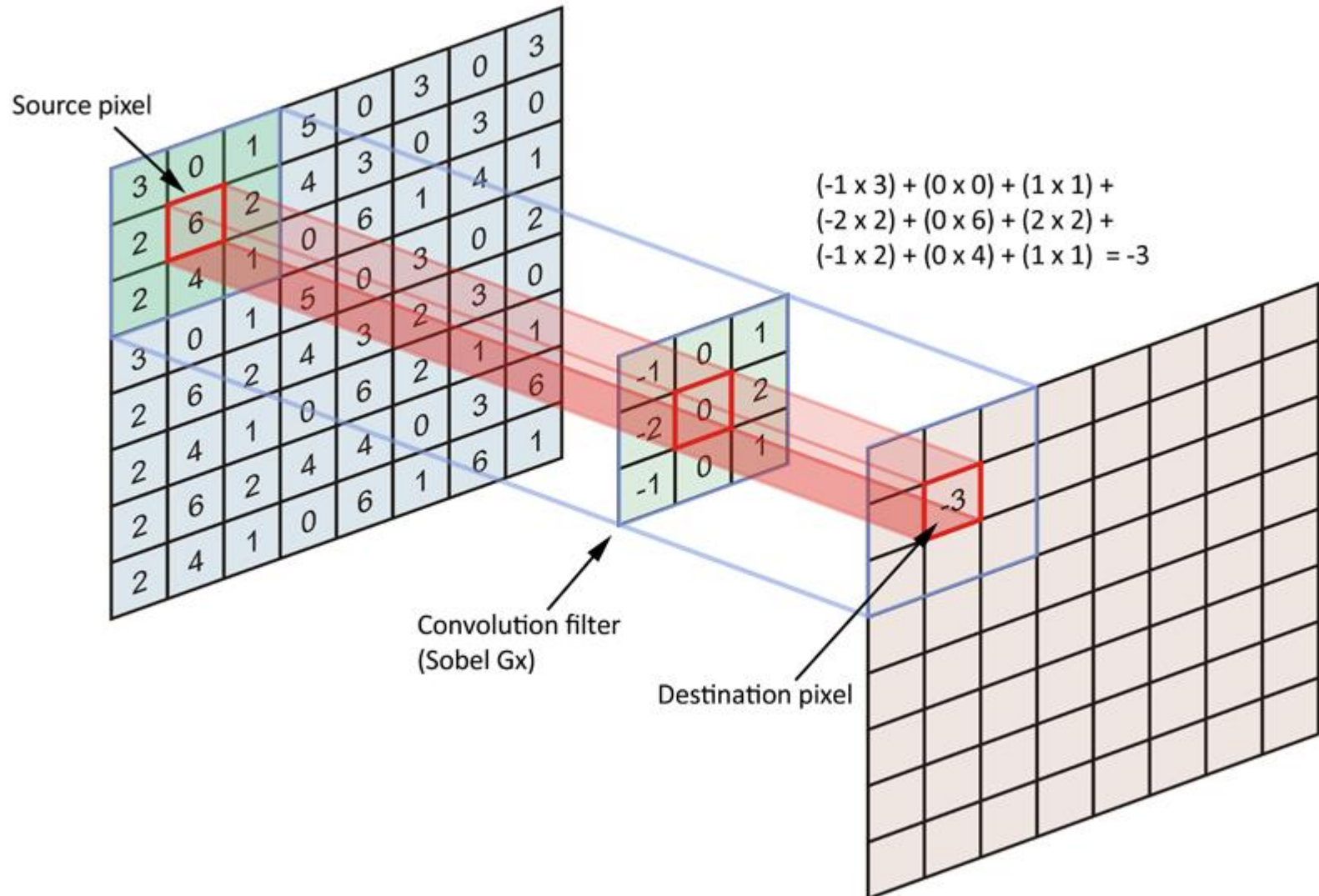


Példa

Center element of the kernel is placed over the source pixel. The source pixel is then replaced with a weighted sum of itself and nearby pixels.

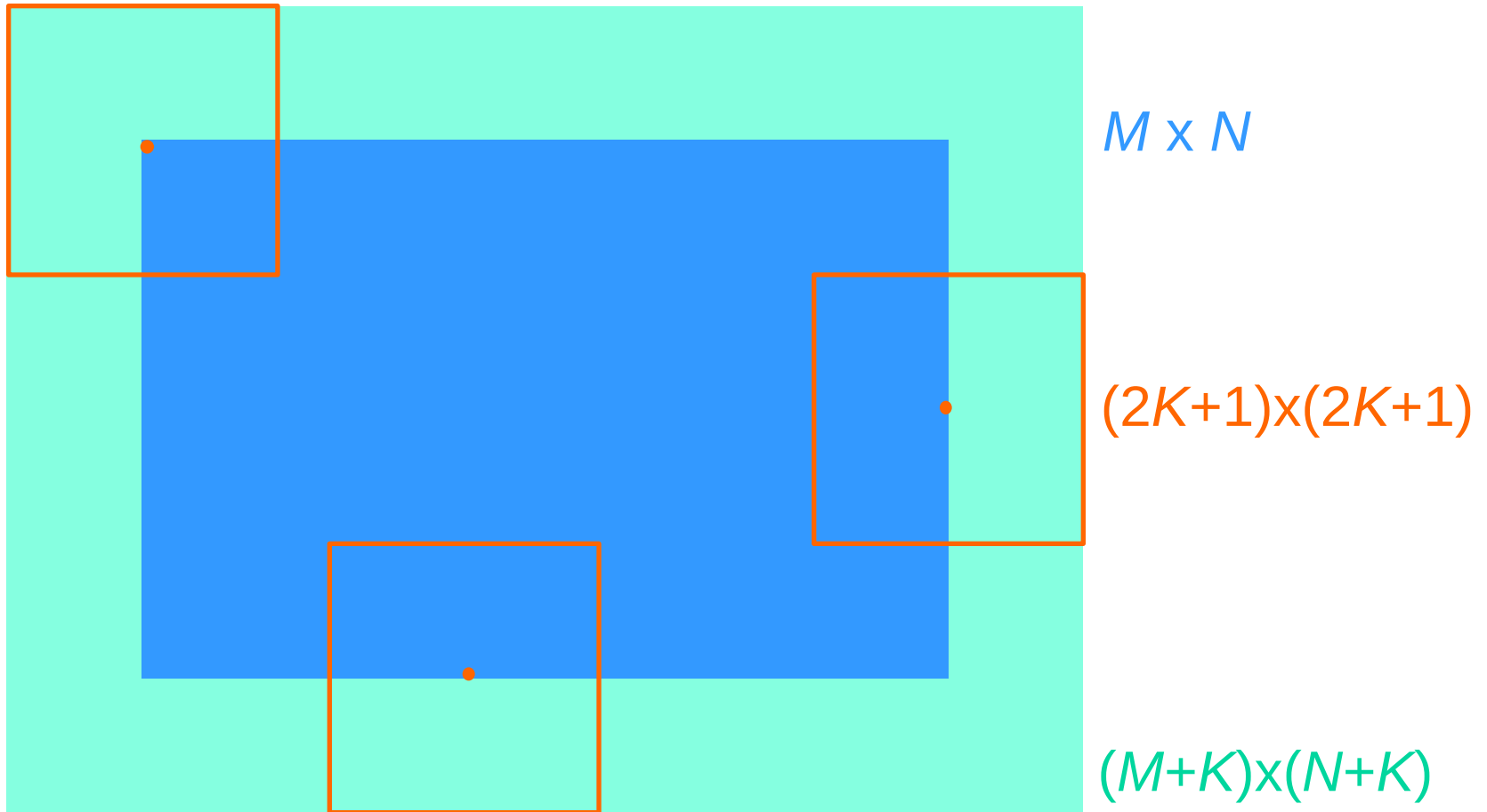


Példa



A „kilógó” terület problémája

(mérettartó konvolúció esetén)

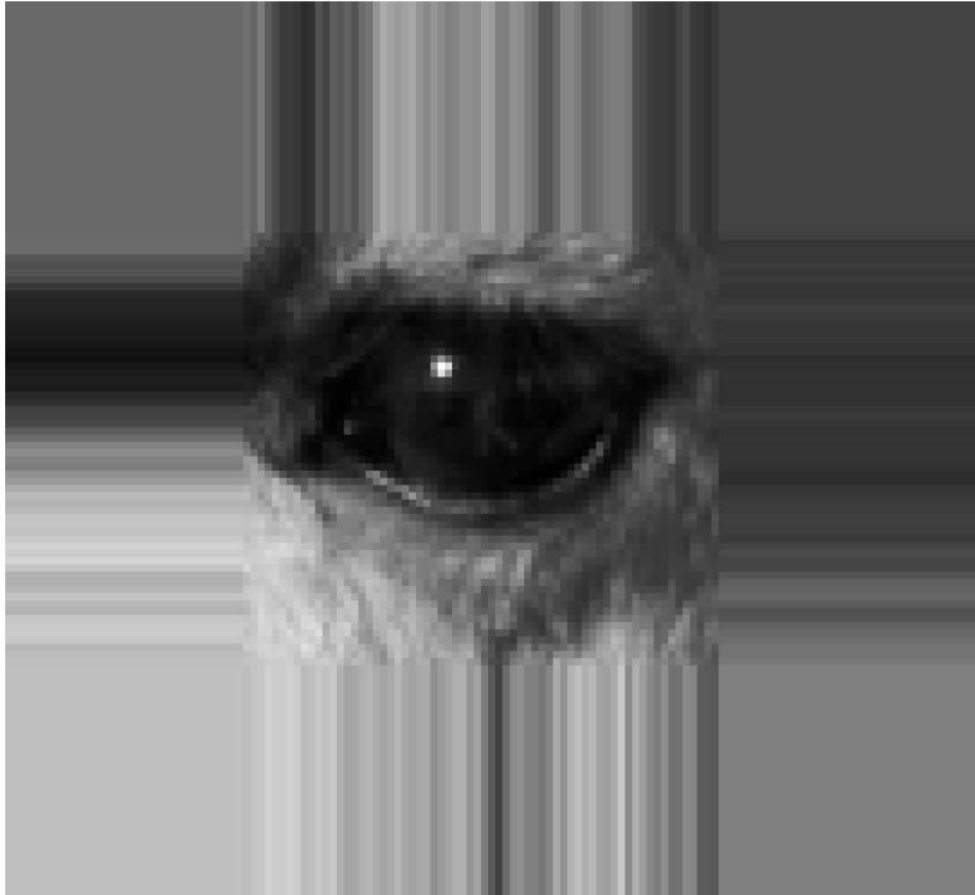


A „kilógó” terület problémája (mérettartó konvolúció esetén)



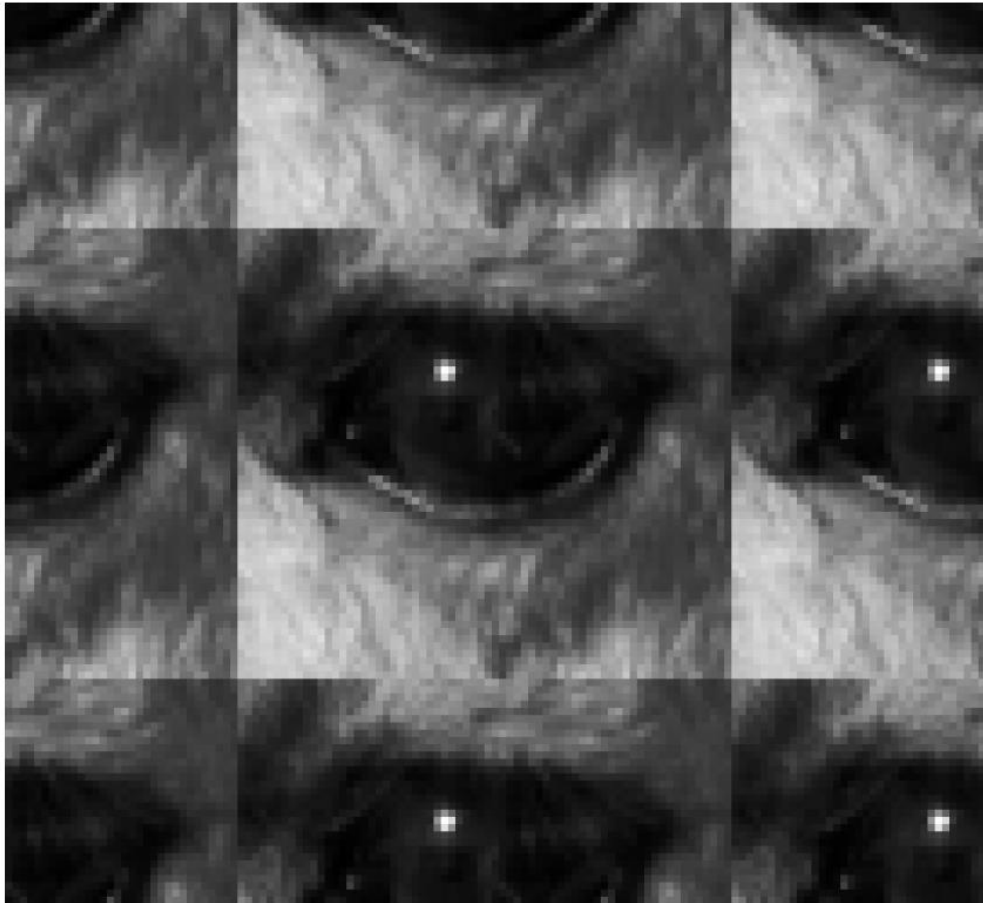
PAD
(kipárnázás
0 értékű pixelekkkel)

A „kilógó” terület problémája (mérettartó konvolúció esetén)



EXTEND
(a határ kiterjesztése)

A „kilógó” terület problémája (mérettartó konvolúció esetén)



WRAP
(becsomagolás)

A konvolúció tulajdonságai

$$f * g = g * f$$

$$a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

Korreláció

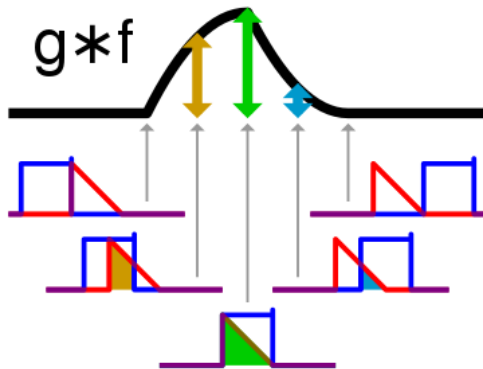
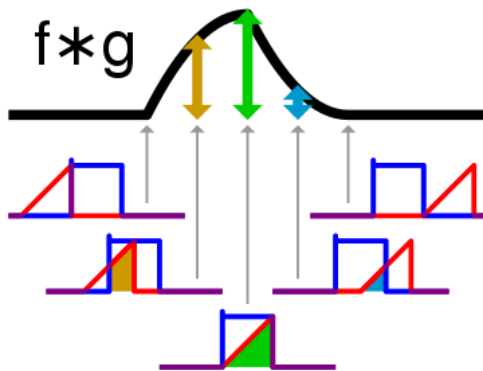
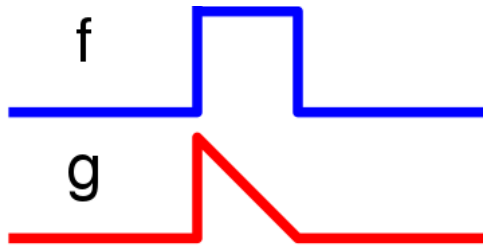
$$f(x) \otimes g(x) = \overline{f}(-x) * g(x)$$

↑
komplex konjugált

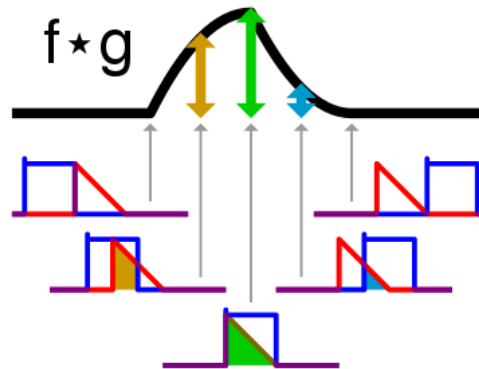
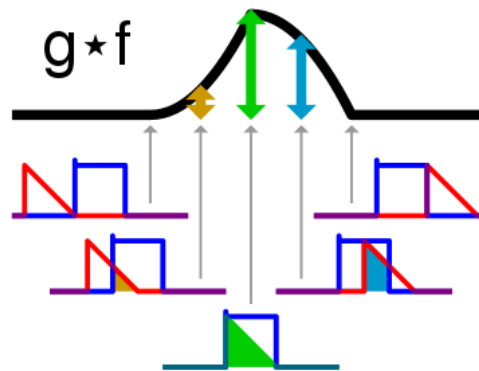
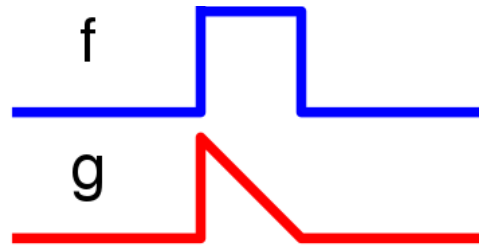
($f=g$: auto-korreláció; $f \neq g$: kereszt-korreláció)

Konvolúció és korreláció

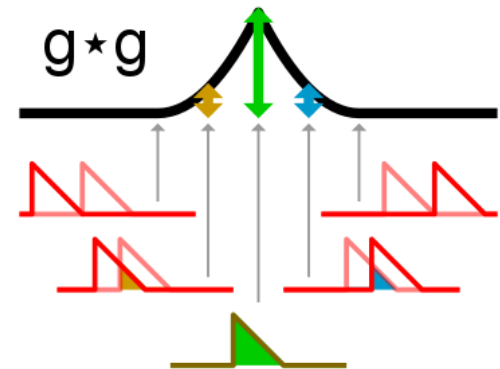
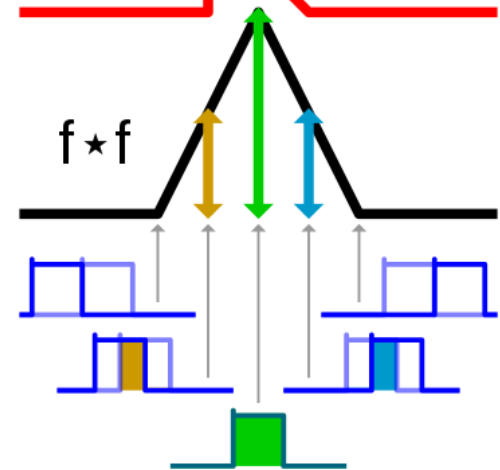
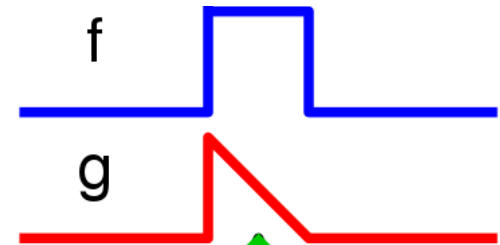
Convolution



Cross-correlation



Autocorrelation



Konvolúciós, korrelációs tétel

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(f \otimes g) = \overline{F(f)} \cdot F(g)$$

pontonkénti (!) szorzás

Konvolúciós tétel

Alternatív formulák:

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(f \cdot g) = F(f) * F(g)$$

$$f * g = F^{-1}(F(f) \cdot F(g))$$

$$f \cdot g = F^{-1}(F(f) * F(g))$$

(A második a mintavételezési tétel kulcsa.)

Konvolúció, korreláció időigénye

$$f * g = F^{-1}(F(f) \cdot F(g))$$
$$f \otimes g = F^{-1}(\overline{F(f)} \cdot F(g))$$

Complexity breakdown for the FFT-based methods:

- $O(M \cdot \log_2 M)$ (Pink box) for $F(f)$
- $O(M \cdot \log_2 M)$ (Blue box) for $F(g)$
- $O(M)$ (Green box) for $\overline{F(f)}$
- $O(M \cdot \log_2 M)$ (Orange box) for the final F^{-1} operation

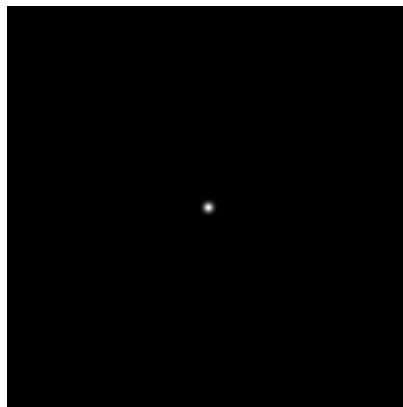
Az M -elemű 1D f és g jelek konvolúciója és korrelációja egyaránt $O(M^2)$ műveletet igényel. Az FFT alkalmazásával elérhető az $O(M \cdot \log_2 M)$ komplexitás.

Példa a konvolúciós tételre

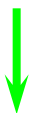
konvolúció



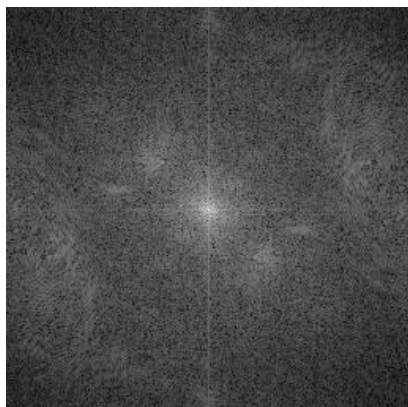
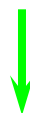
*



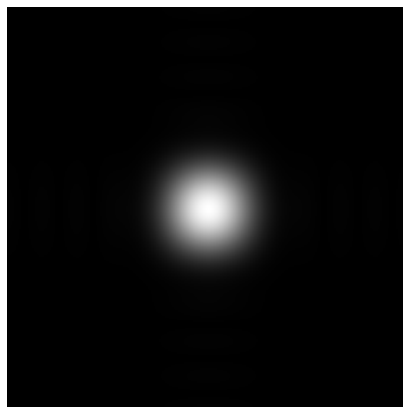
=



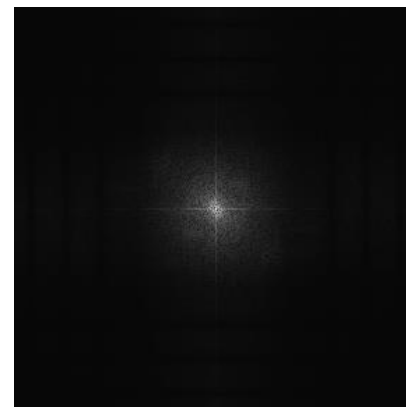
Fourier tr.



·



=

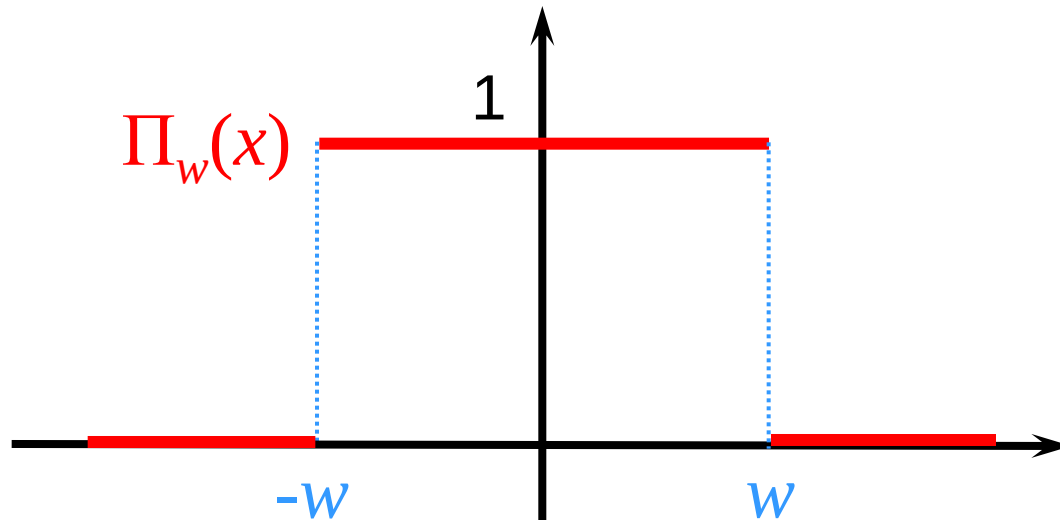


inverz Fourier tr.



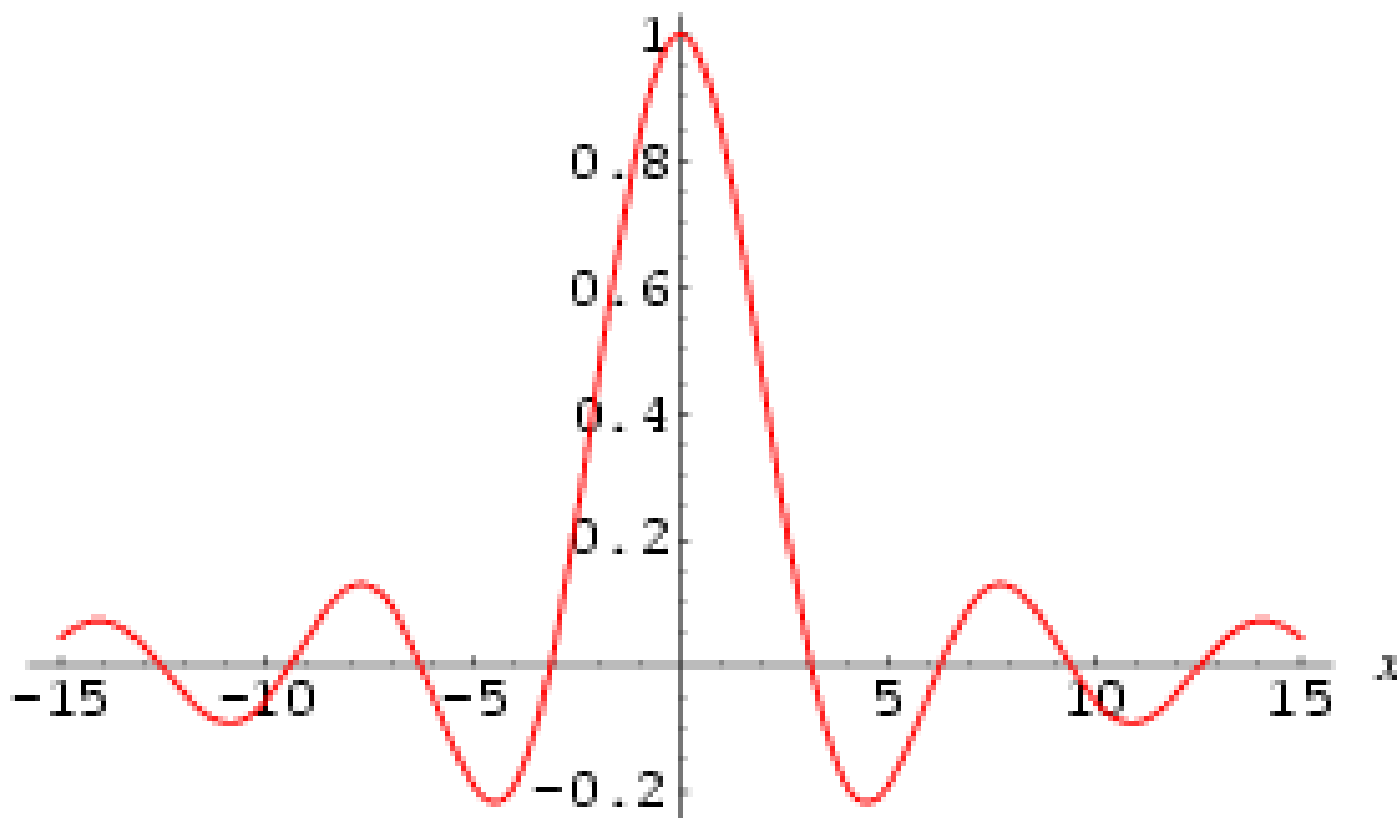
pontonkénti szorzás

Doboz függvény



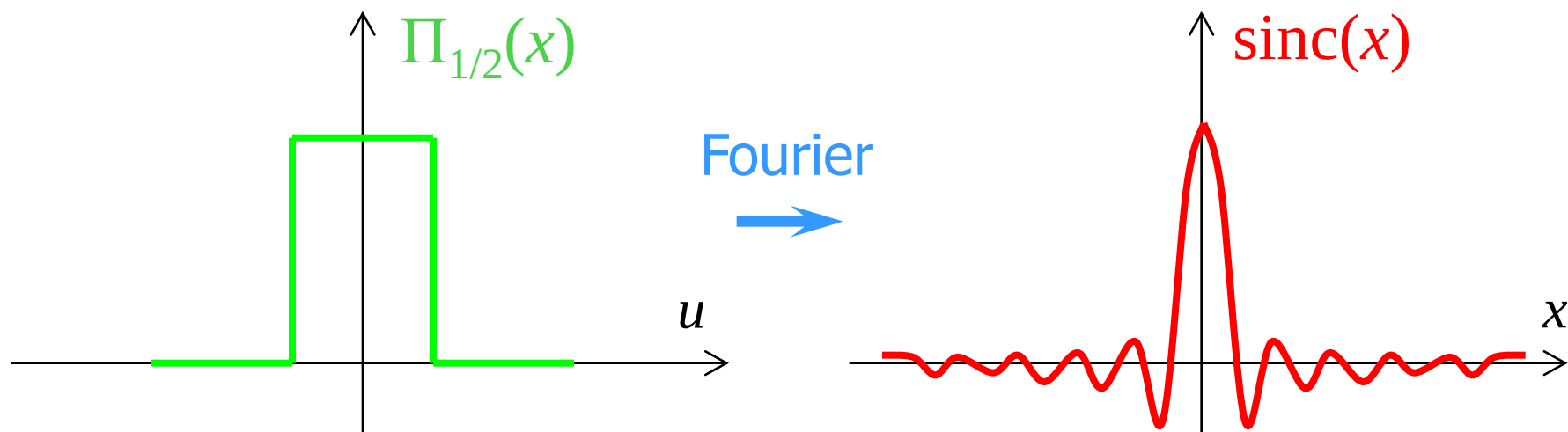
$$\Pi_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| \leq w \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

sinc függvény



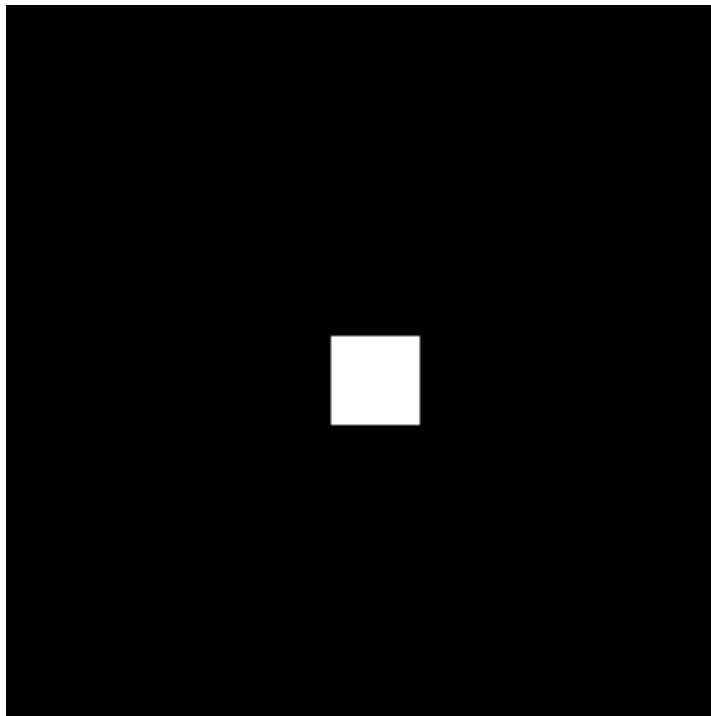
$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \end{cases} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

A sinc és a doboz függvény kapcsolata



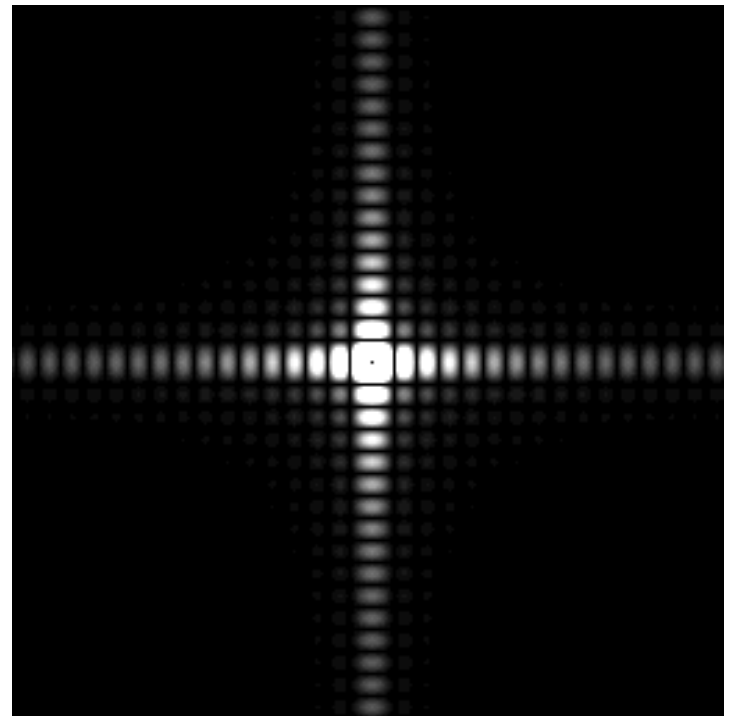
$$F[\Pi_{1/2}(x)](k) = \text{sinc}(k \cdot \pi)$$

A sinc és a doboz függvény kapcsolata



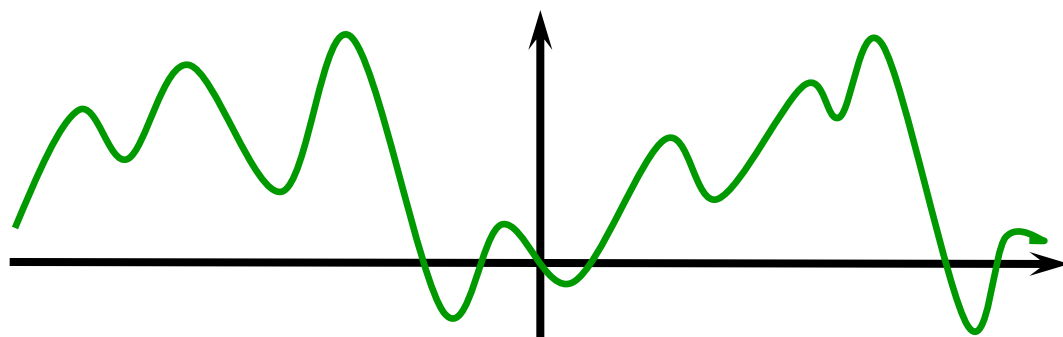
2D doboz függvény

Fourier
→

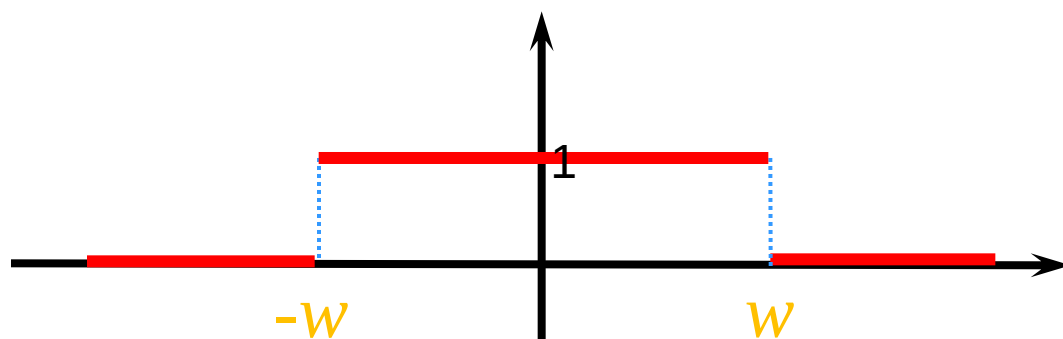


2D sinc függvény

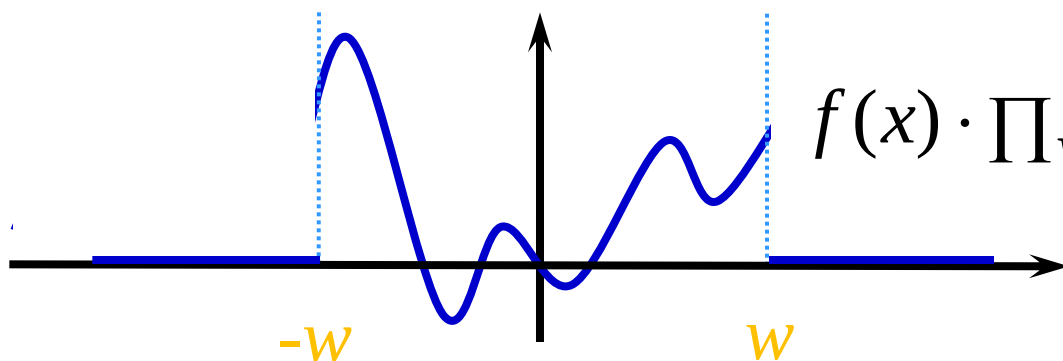
Pontonkénti szorzás doboz függvényvel



$f(x)$

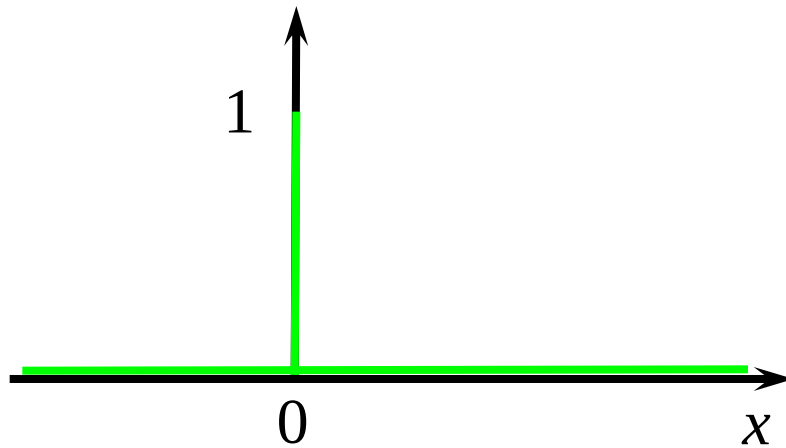


$\Pi_w(x)$

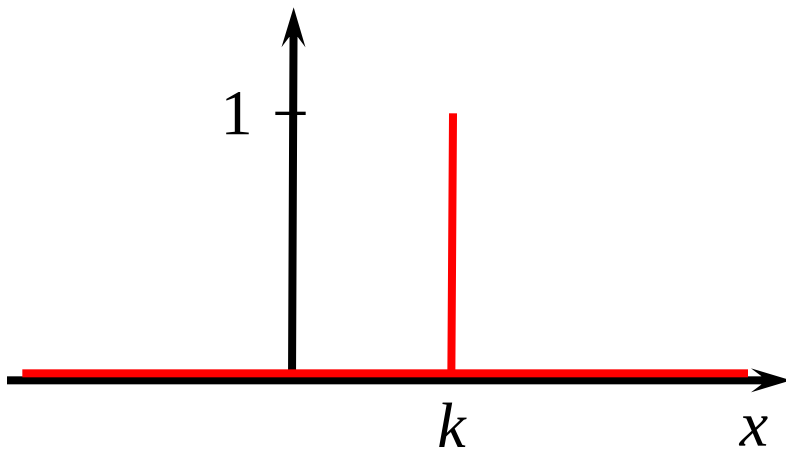


$$f(x) \cdot \Pi_w(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } |x| \leq w \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A δ -függvény és eltoltja



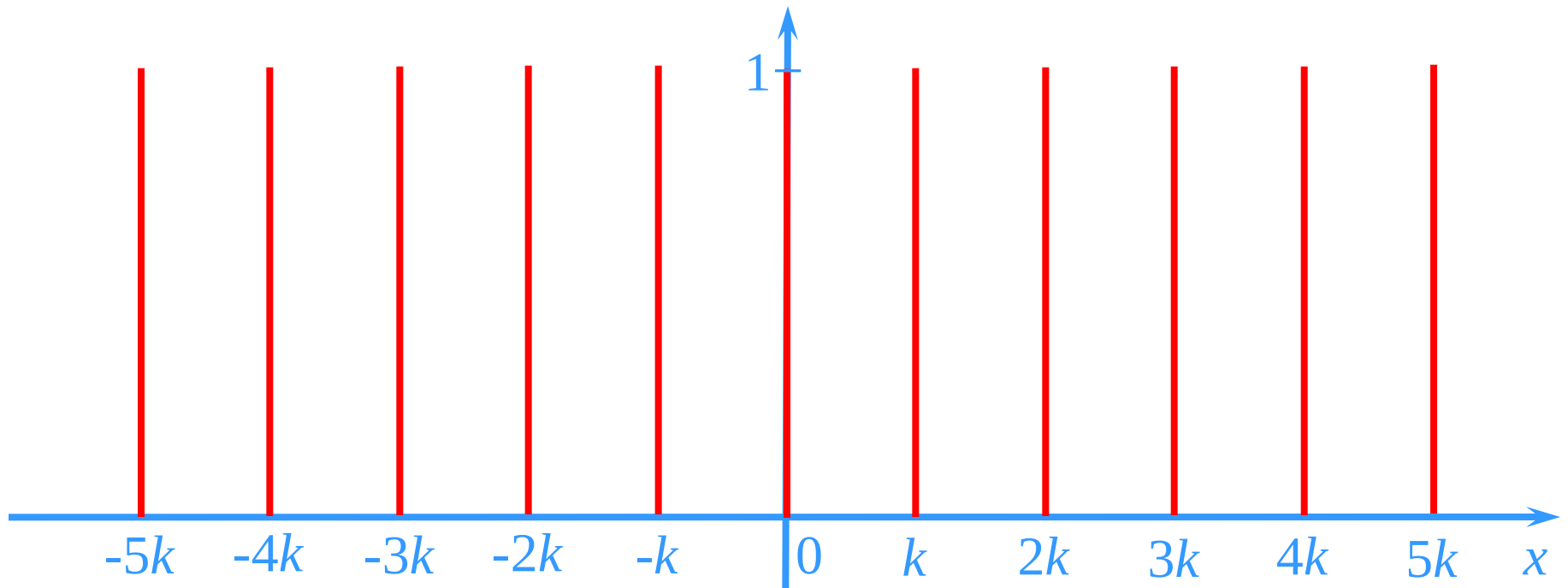
$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



$$\delta(x-k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

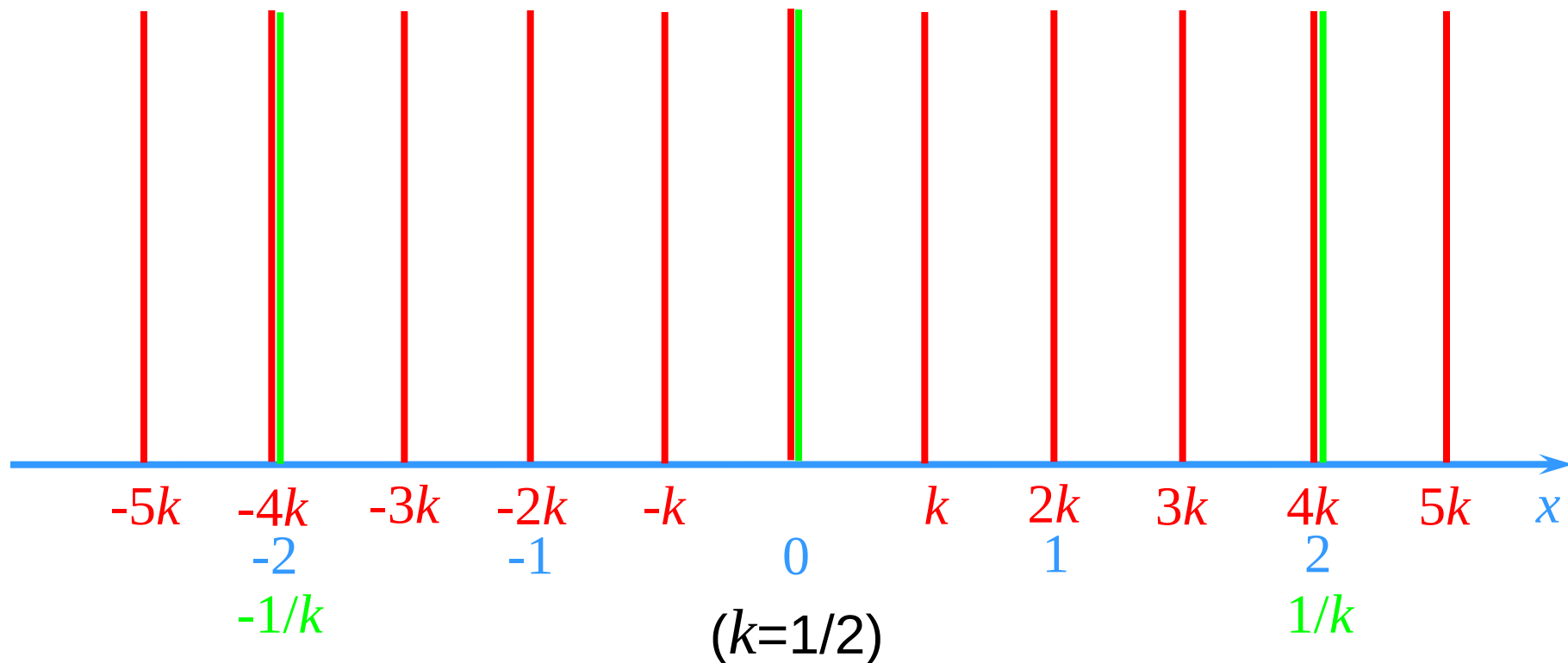
Dirac fésű (*Shah function*)

$$\text{comb}_k(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n \cdot k)$$



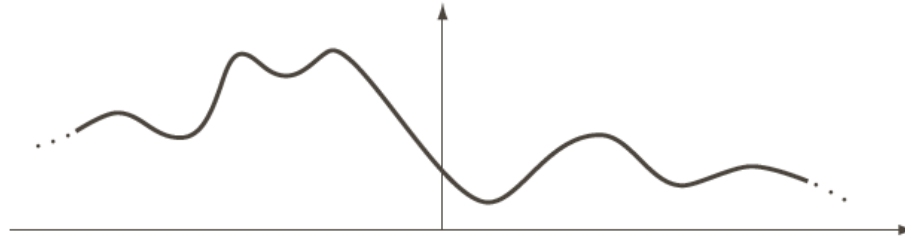
A Dirac fésű Fourier transzformáltja

$$F[\text{comb}_k(x)] = \text{comb}_{1/k}(x)$$

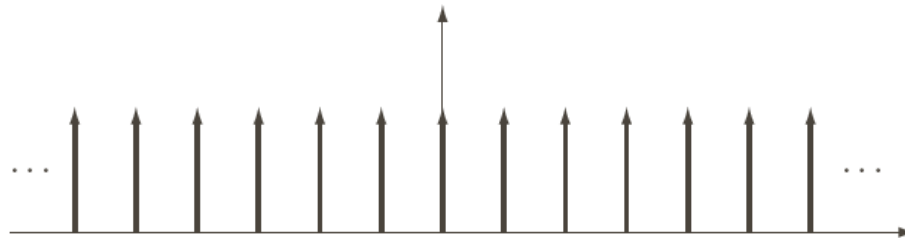


Pontonkénti szorzás a Dirac fésűvel – mintavételezés

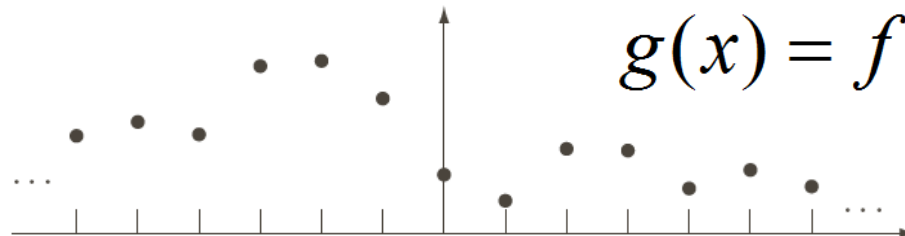
$f(x)$



$comb_k(x)$



$g(x)$

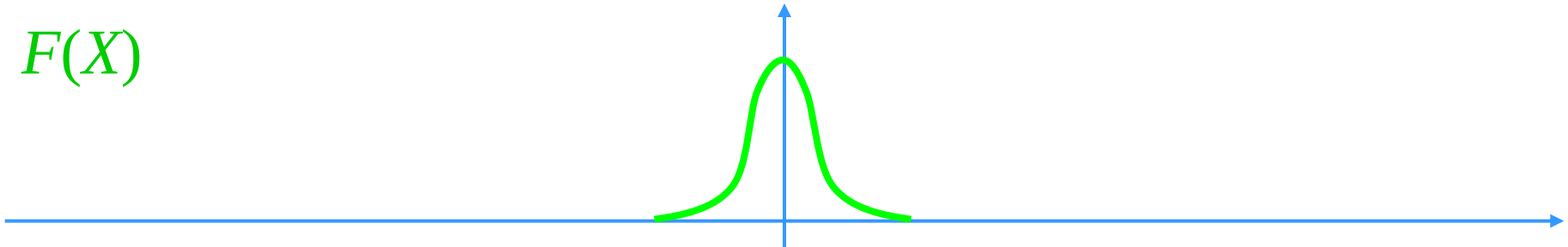


$$g(x) = f(x) \cdot comb_k(x)$$

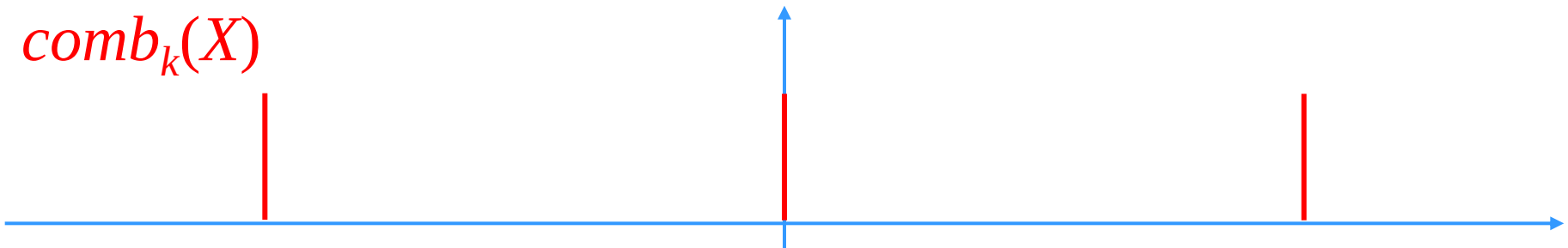
Konvolúció a Dirac fésűvel

– periodikus másolás

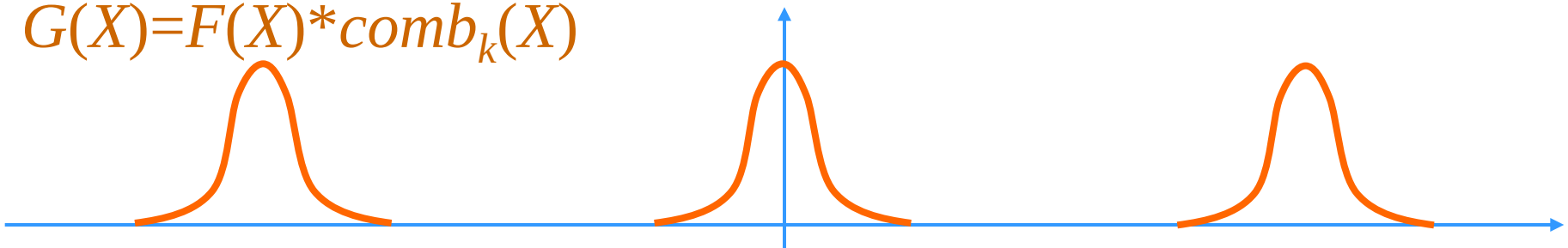
$F(X)$



$comb_k(X)$



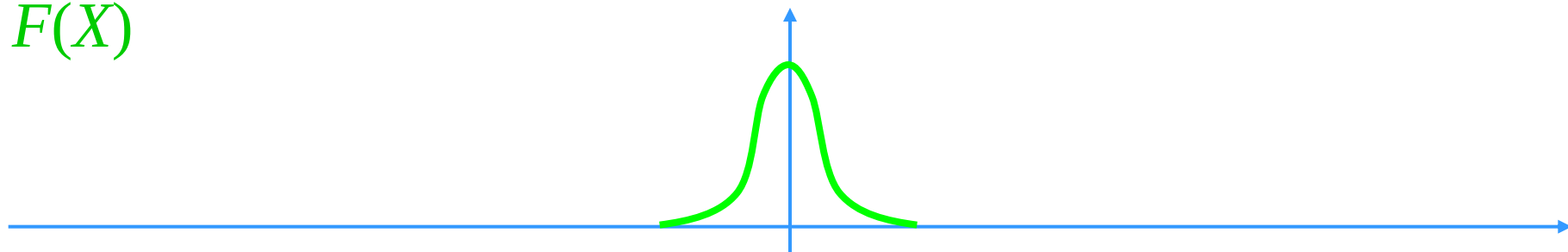
$G(X) = F(X) * comb_k(X)$



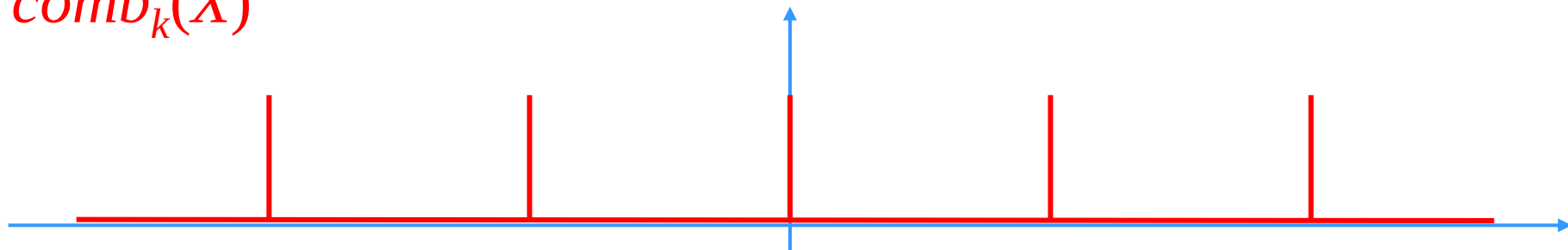
Konvolúció a Dirac fésűvel

– periodikus másolás

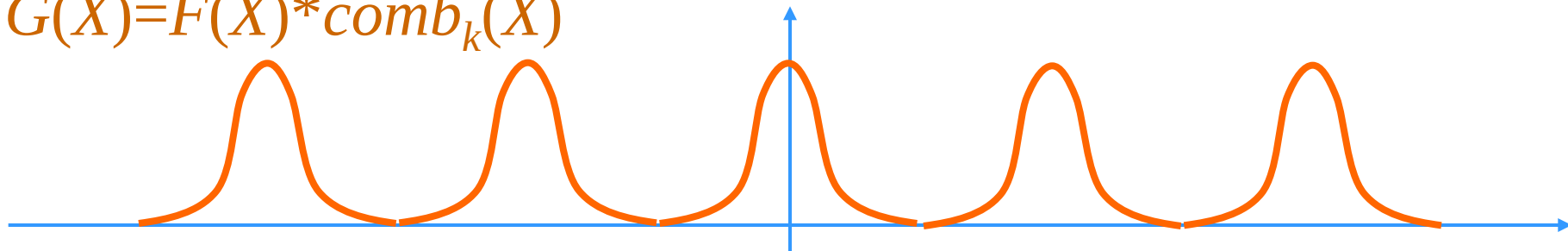
$F(X)$



$comb_k(X)$



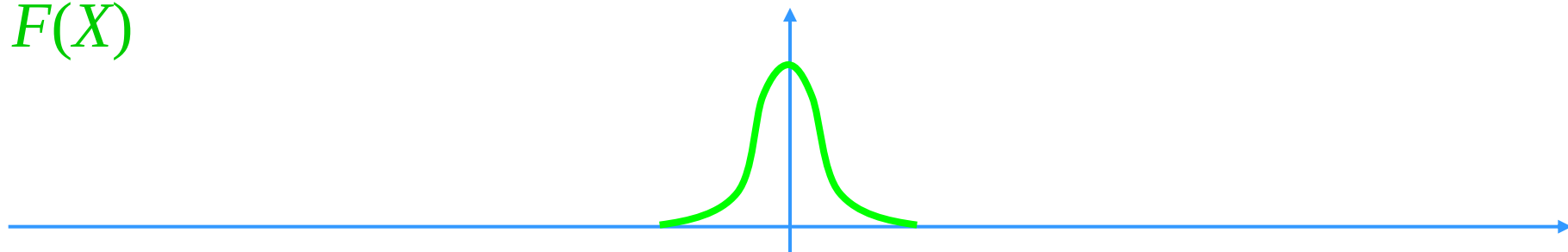
$G(X) = F(X) * comb_k(X)$



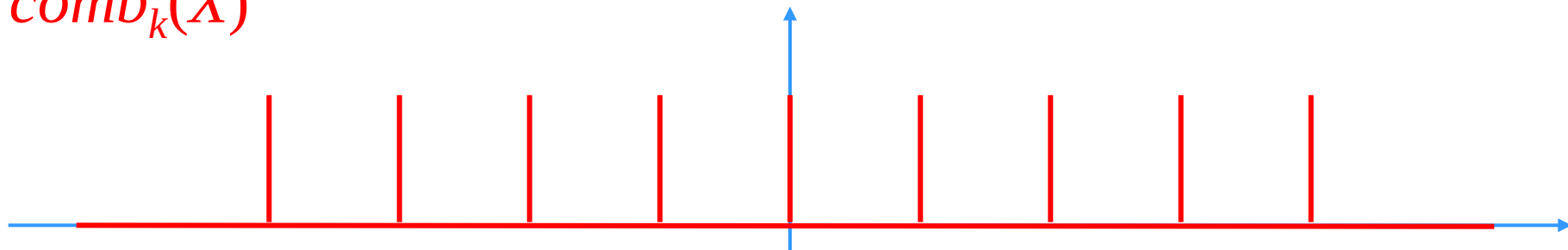
Konvolúció a Dirac fésűvel

– periodikus másolás

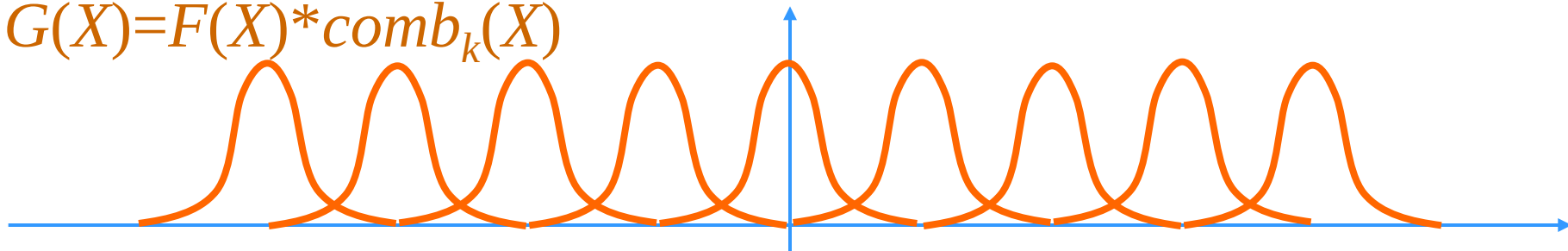
$F(X)$



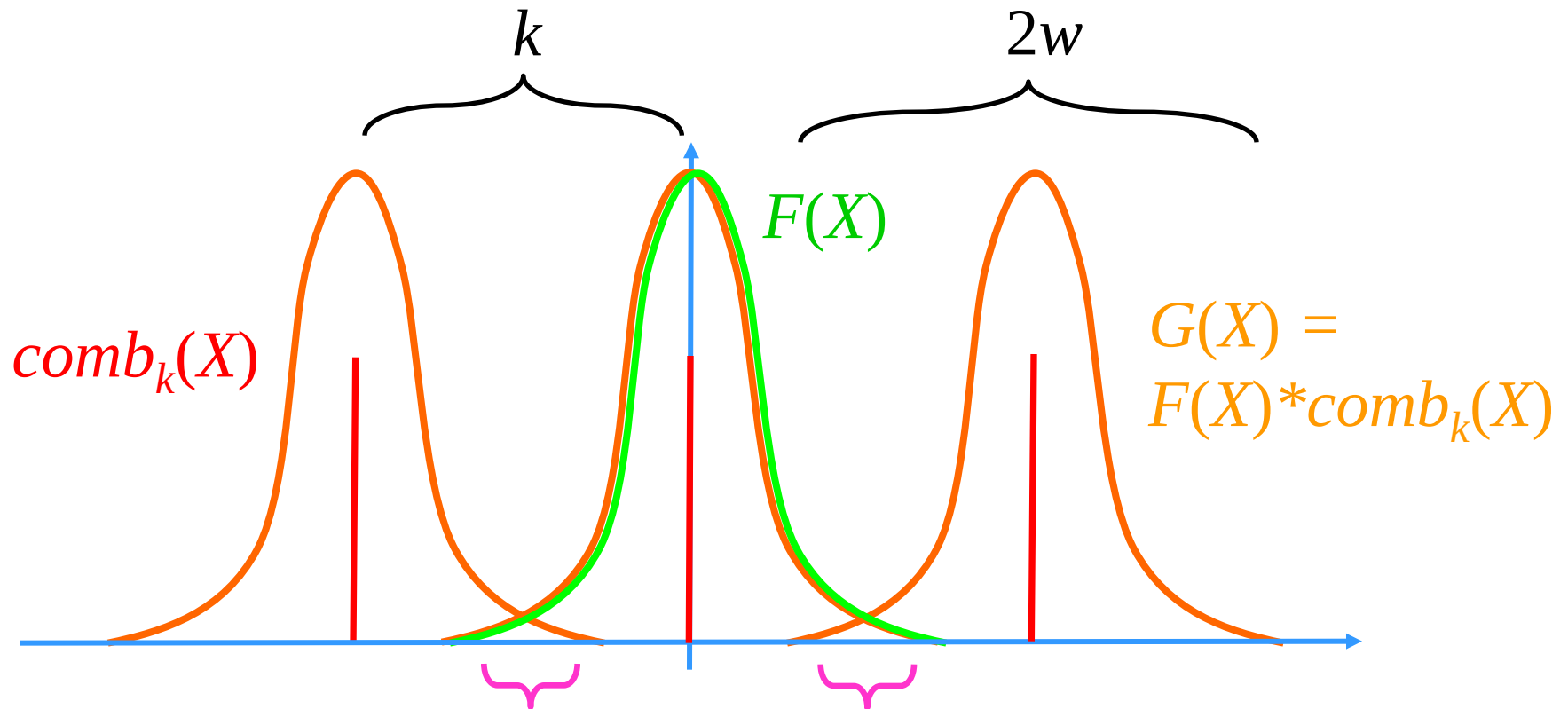
$comb_k(X)$



$G(X) = F(X) * comb_k(X)$



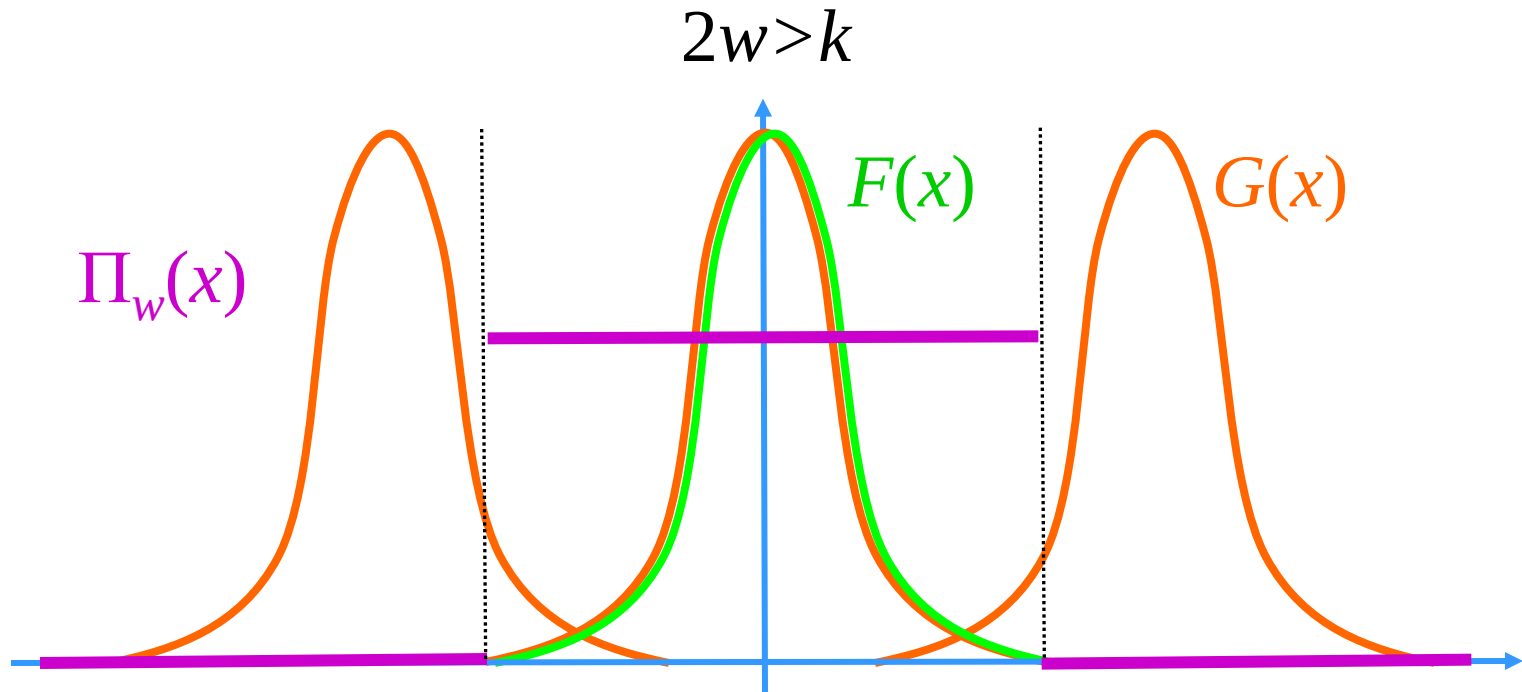
Átfedés, álcázás (*aliasing*)



átfedések

lépnek fel, mivel $2w > k$.

Átfedés, álcázás (*aliasing*)

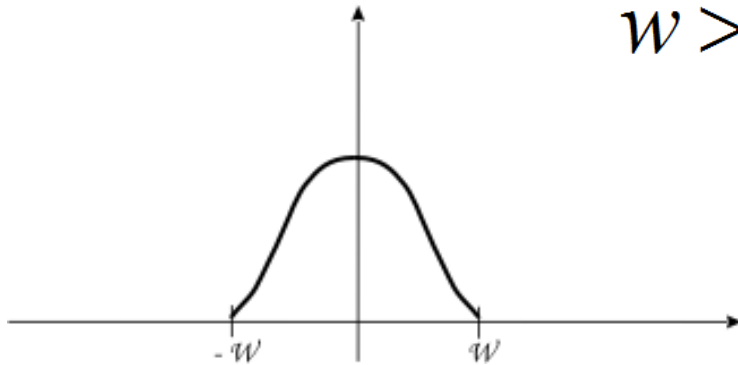


$$F(X)=0, \text{ ha } |X| > w \quad G(X)=F(X)*comb_k(X)$$

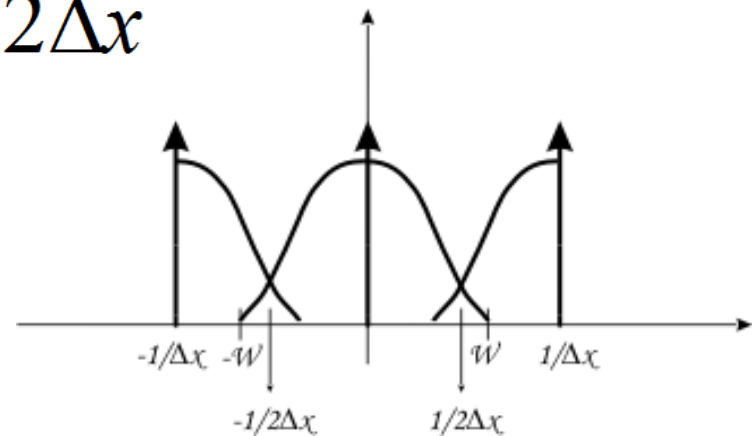
$$G(X) \cdot \Pi_w(X) \neq F(X)$$

Átfedés, álcázás (*aliasing*)

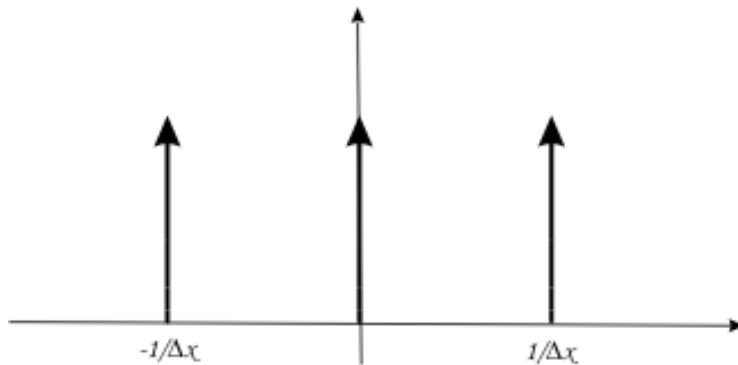
$$w > 1/2\Delta x$$



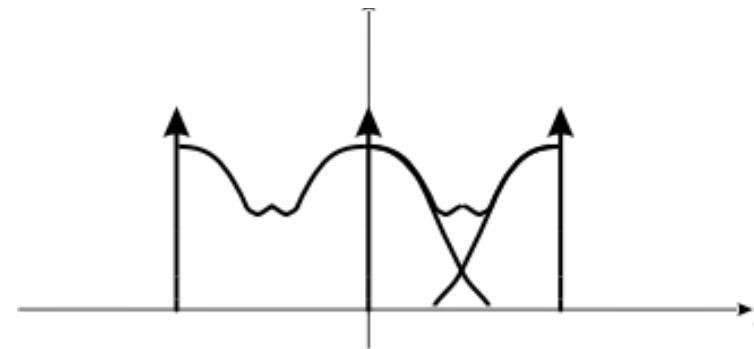
$$F(X)$$



$$G(X) = F(X) * \text{comb}_{1/\Delta x}(X)$$



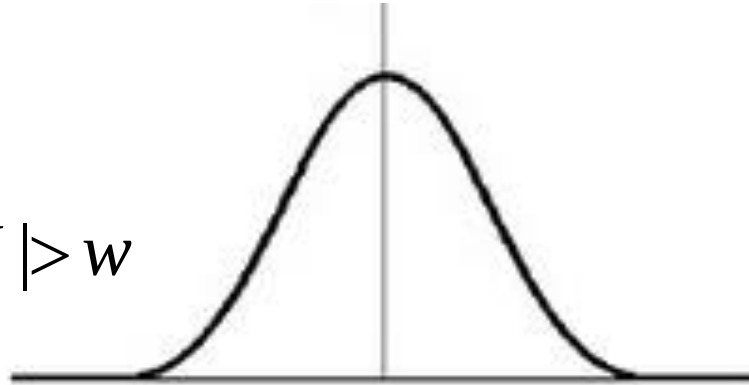
$$\text{comb}_{1/\Delta x}(X)$$



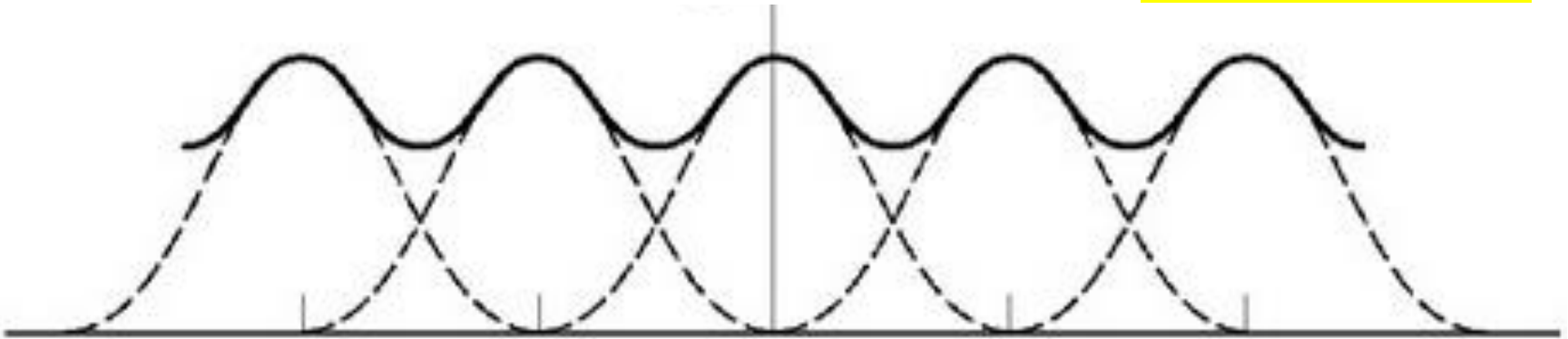
Átfedés, álcázás (*aliasing*)

$$F(X)$$

$$F(X)=0, \text{ ha } |X| > w$$



$$G(X) = F(X) * \text{comb}_{1/\Delta x}(X)$$



$$w = \frac{1}{\Delta x}$$
$$\Delta x = \frac{1}{w} > \frac{1}{2w}$$

Ha nincs átfedés

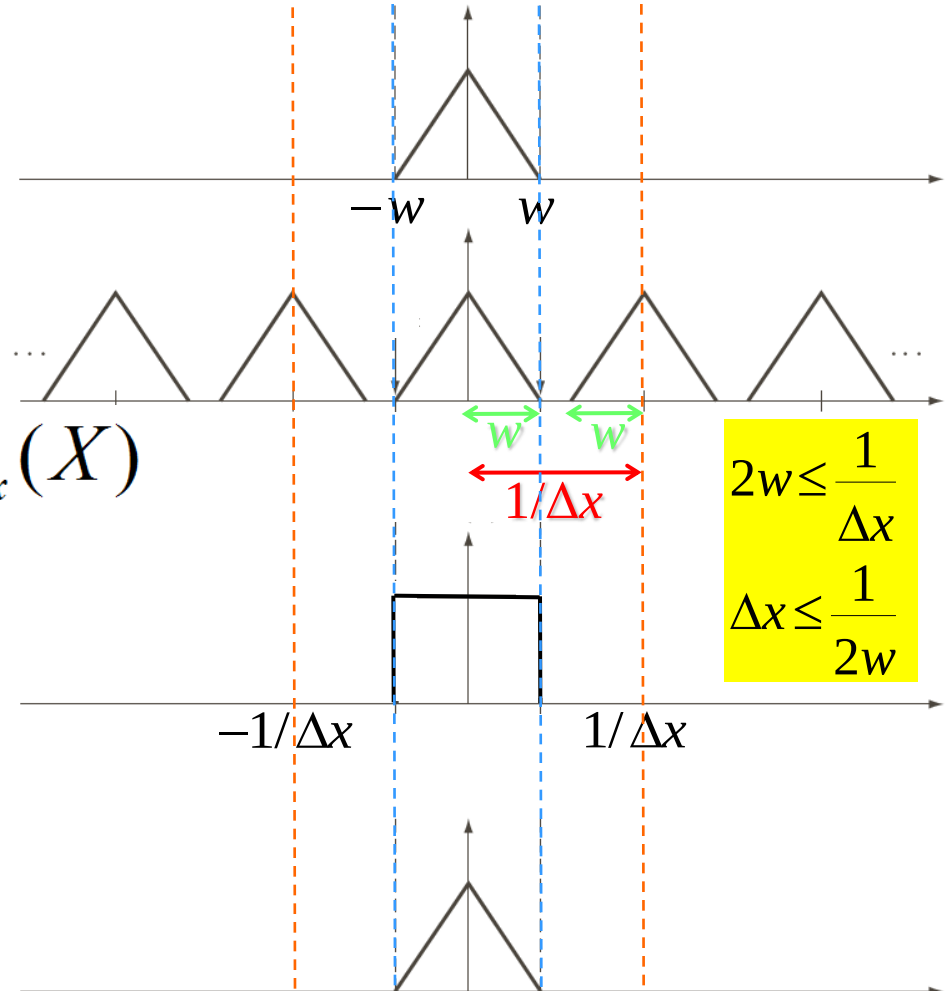
$$F(X)$$

$$F(X)=0, \text{ ha } |X| > w$$

$$G(X) = F(X) * \text{comb}_{1/\Delta x}(X)$$

$$\Pi_w(X)$$

$$F(X) = G(X) \cdot \Pi_w(X)$$



Ha van átfedés

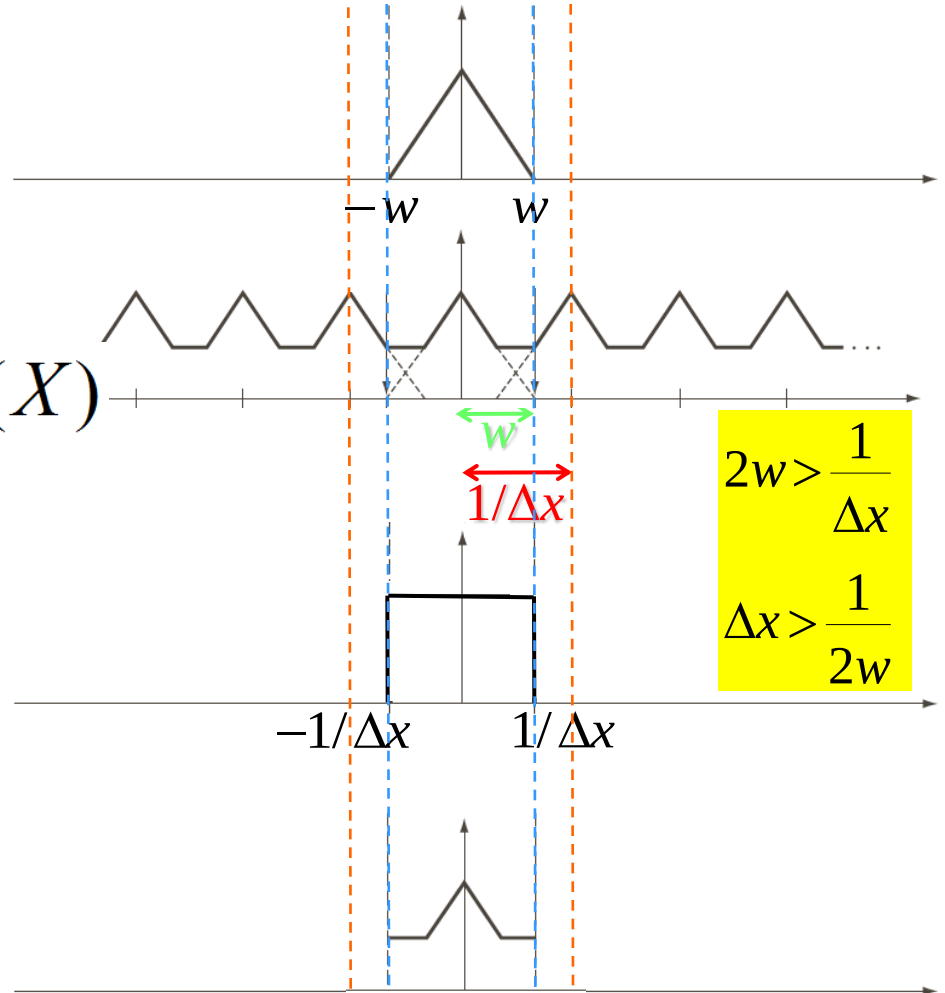
$$F(X)$$

$$F(X)=0, \text{ ha } |X| > w$$

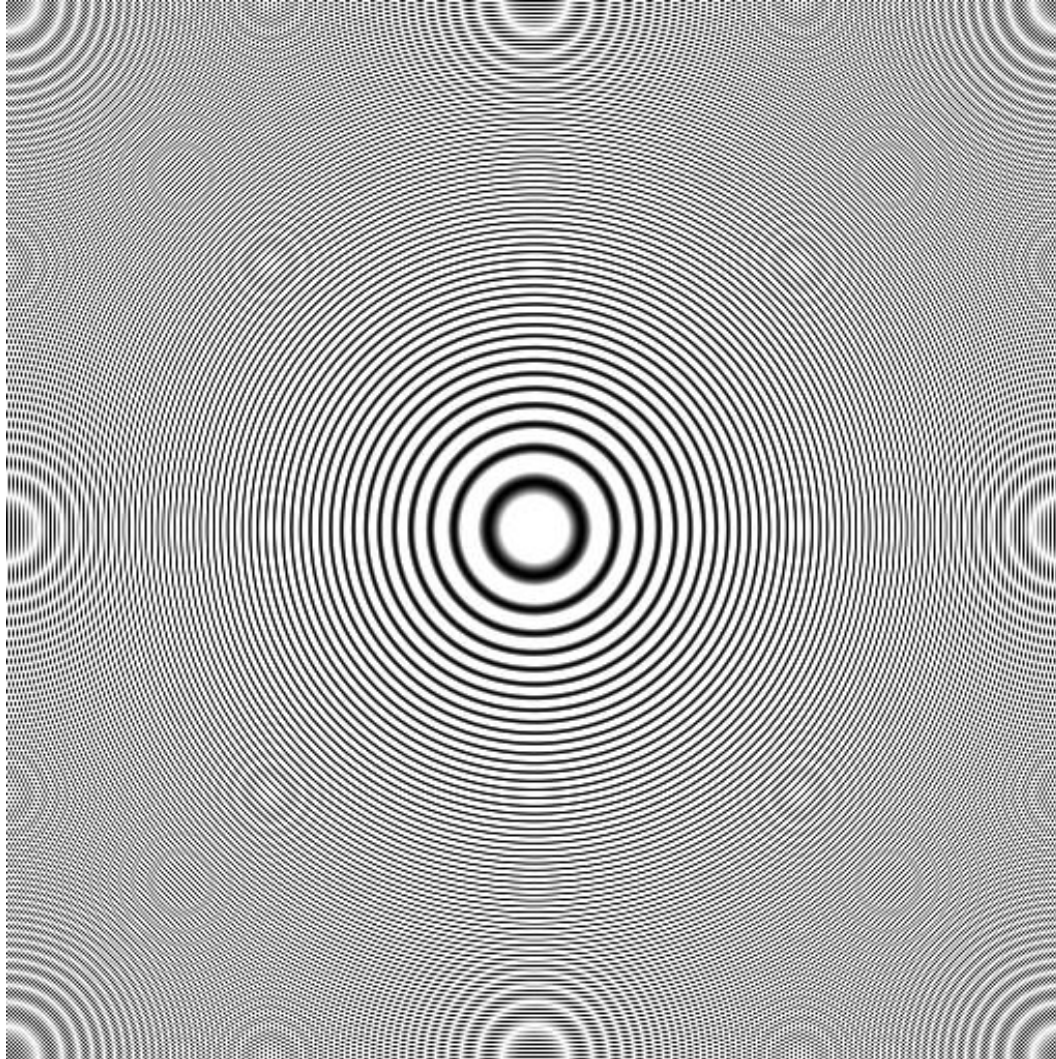
$$G(X) = F(X) * \text{comb}_{1/\Delta x}(X)$$

$$\Pi_w(X)$$

$$F(X) \neq G(X) \cdot \Pi_w(X)$$

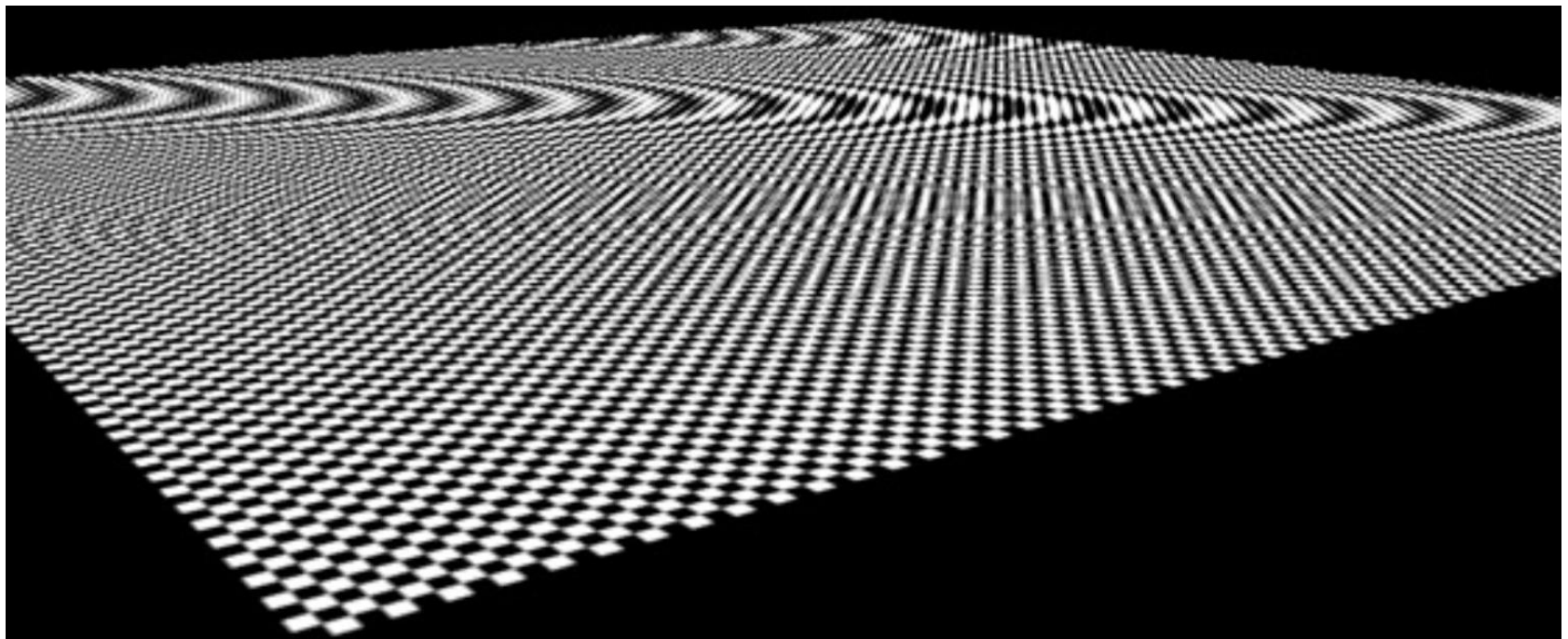


Átfedés, álcázás (*aliasing*)

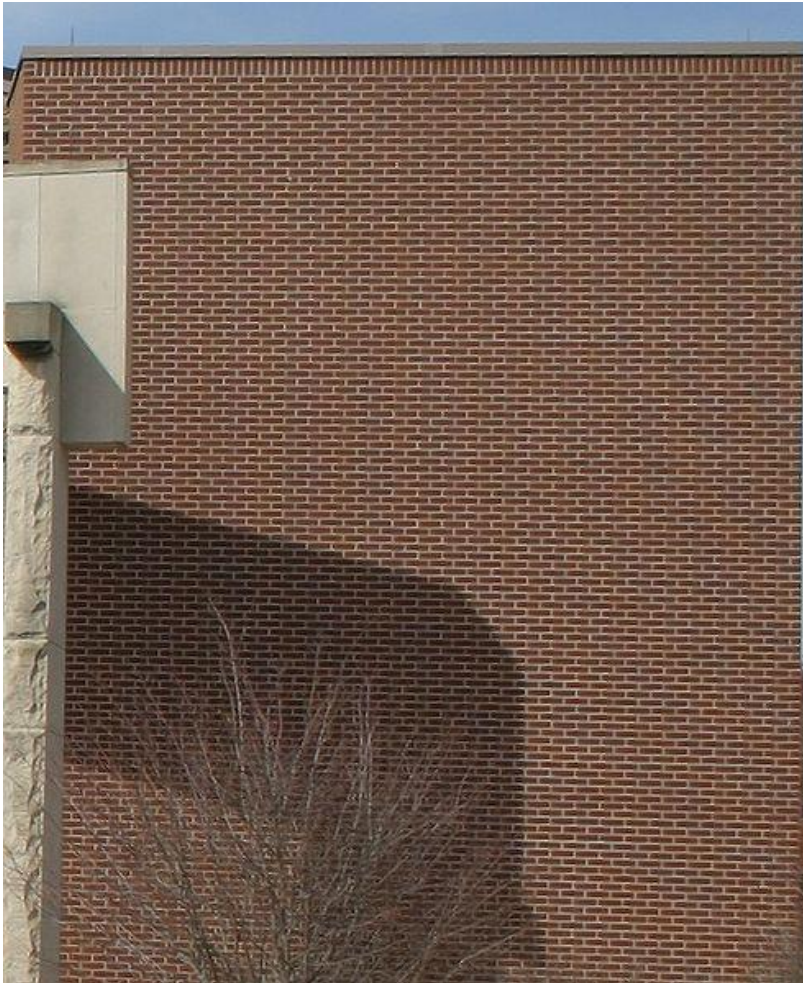


a képen
hamis/fantom
minták jelennek
meg

Átfedés, álcázás (*aliasing*)



Átfedés, álcázás (*aliasing*)



korrekt mintavételezés



alul-mintavételezett

Átfedés, álcázás (*aliasing*)



Átfedés, álcázás (*aliasing*)

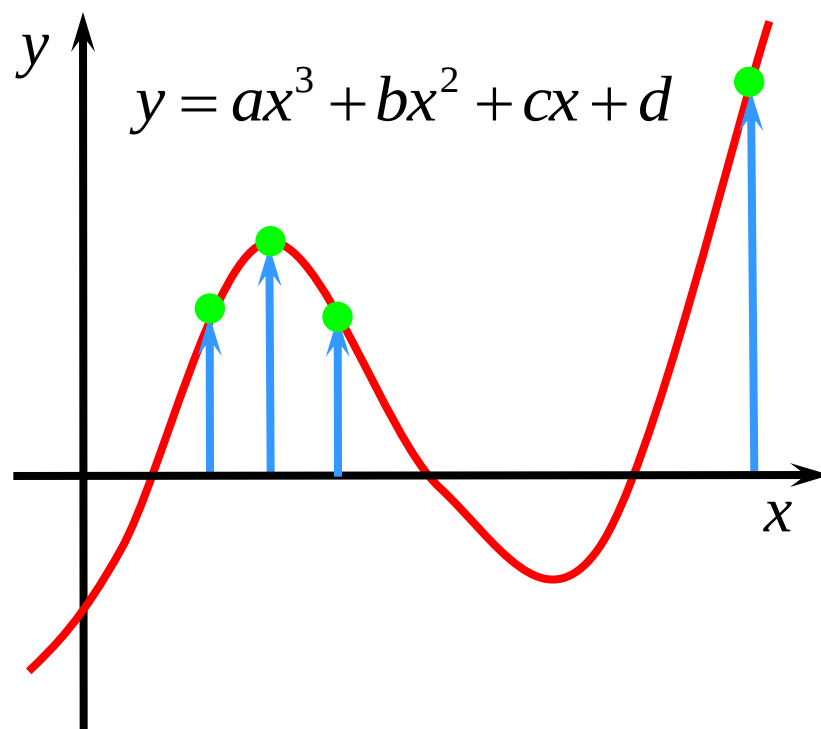
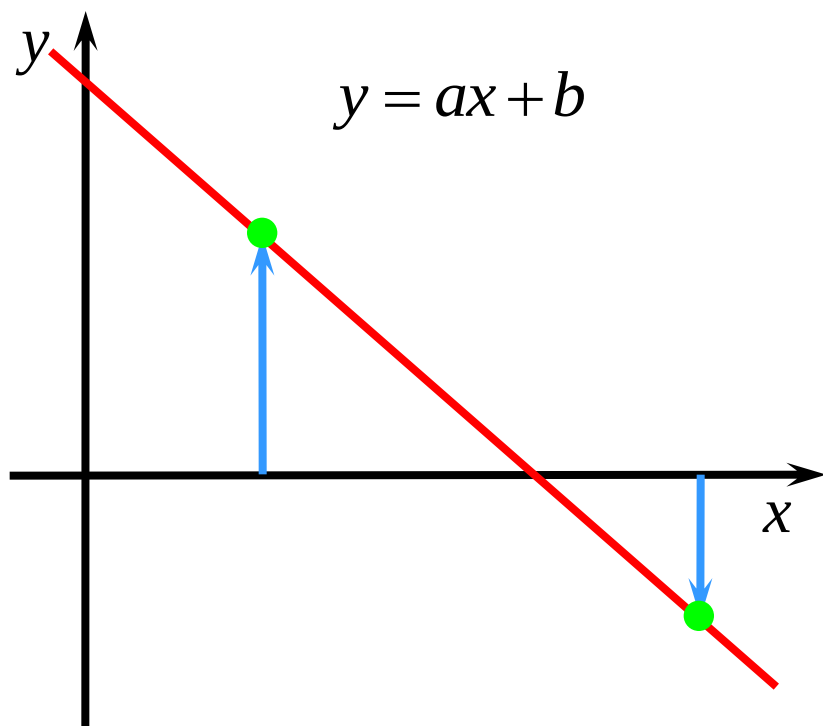


Anti-aliasing

A mintavételezés hibáinak korrigálása (pl. lépcsős élek lekerekítésével), az álcázás hatásainak csökkentése.



Folytonos függvény megadása néhány pontjával



Bármely n -edfokú polinomot egyértelműen meghatároz $n+1$ tetszőlegesen kiválasztott pontja.

Következésképpen: egy (mintavételezett) diszkrét jelből helyreállítható lehet a kiindulási (végtelen sok pontból álló) analóg jel.

A digitalizálás (mintavételezés) alapkérdése

Milyen (uniform) mintavételezés mentén hordoz ugyanannyi információt a mintavételezett kép, mint a folytonos?

(Hangsúlyozandó, hogy ezúttal csak az értelmezési tartomány digitalizálásával (vagyis a mintavételezéssel) foglalkozunk, az értékkészletével (a kvantálással) nem.)

Sávhatárolt (*bandlimited*) függvények

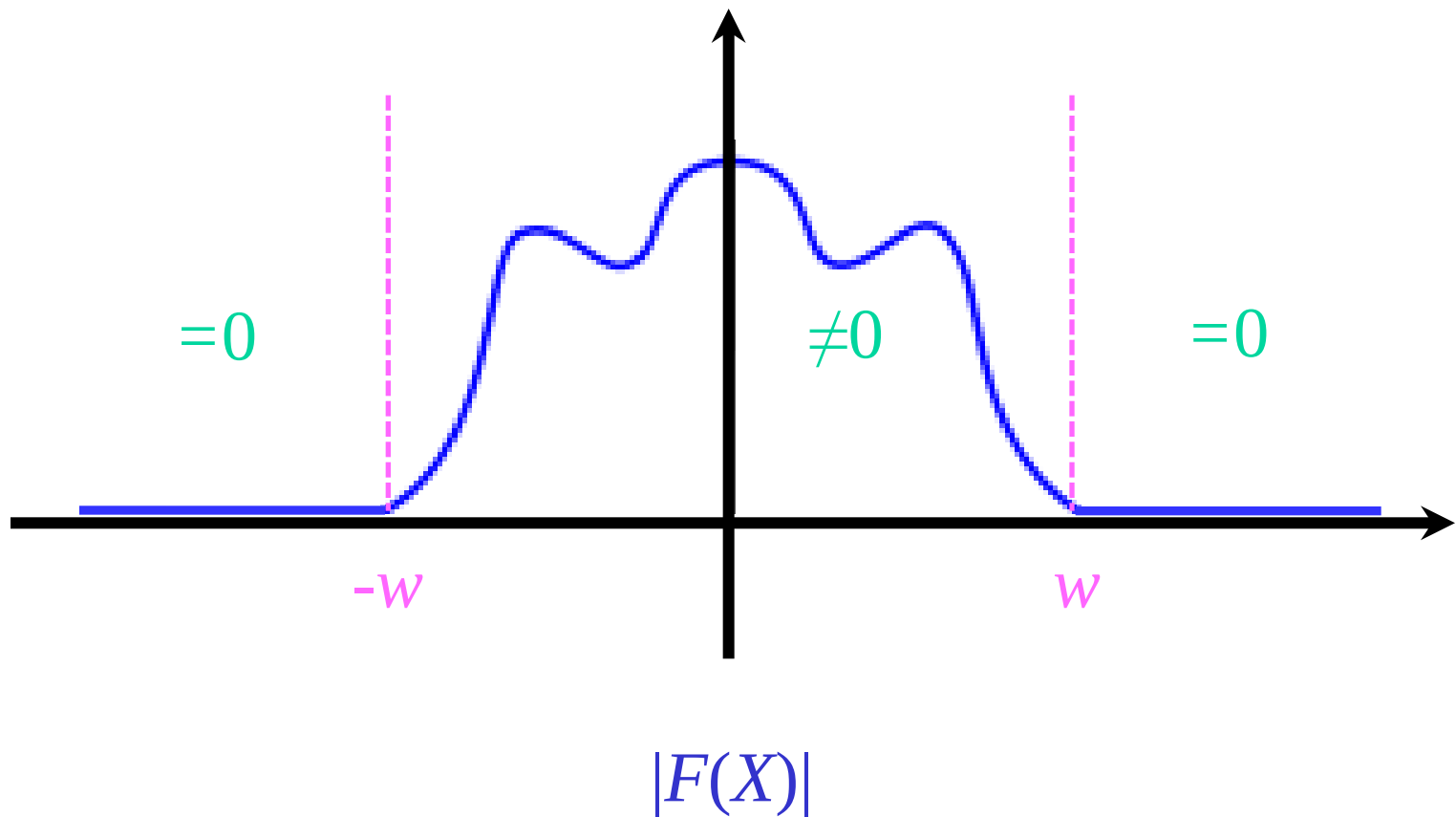
Az $f(x)$ függvény **sávhatárolt**, ha létezik olyan w , hogy $F(X)$ (vagyis az $f(x)$ Fourier transzformáltja) nem tartalmaz w -nél nagyobb frekvenciákat, azaz:

$$F(X)=0, \text{ ha } |X|>w .$$

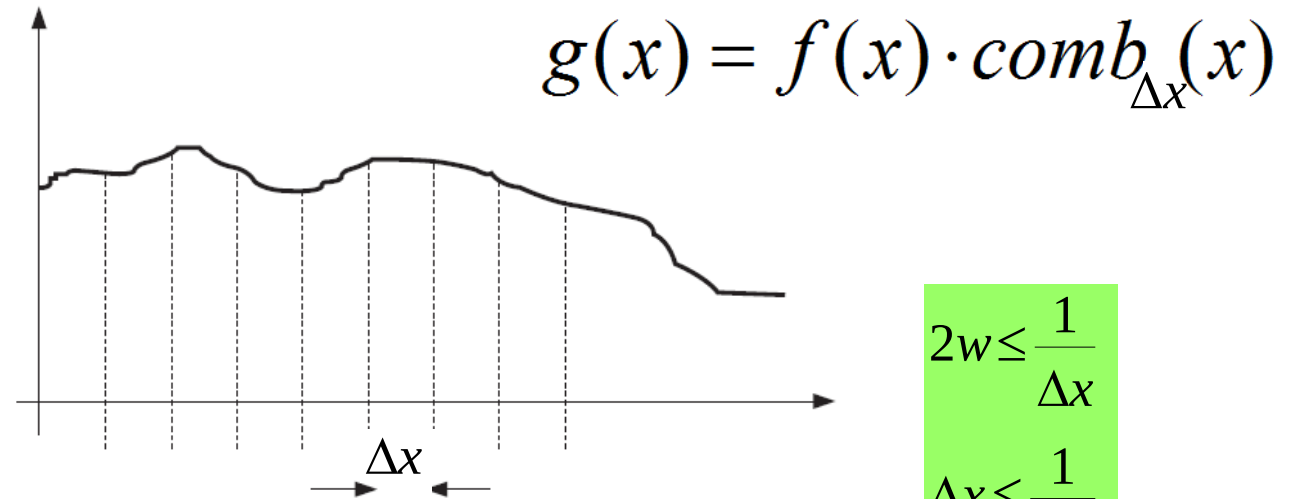
w -t **Nyquist**-frekvenciának nevezzük, ha

$$F(X)=0, \text{ ha } |X|>w, \text{ ugyanakkor } F(-w) \neq 0 \text{ vagy } F(w) \neq 0 .$$

Sávhatárolt 1D függvény

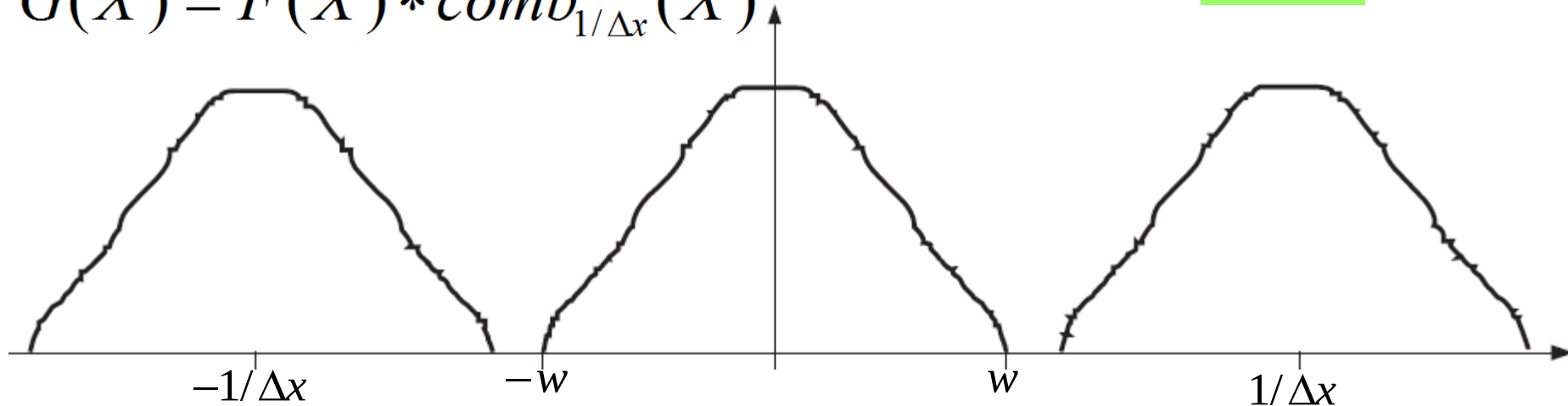


Mintavételezés az Nyquist-frekvencia fölött

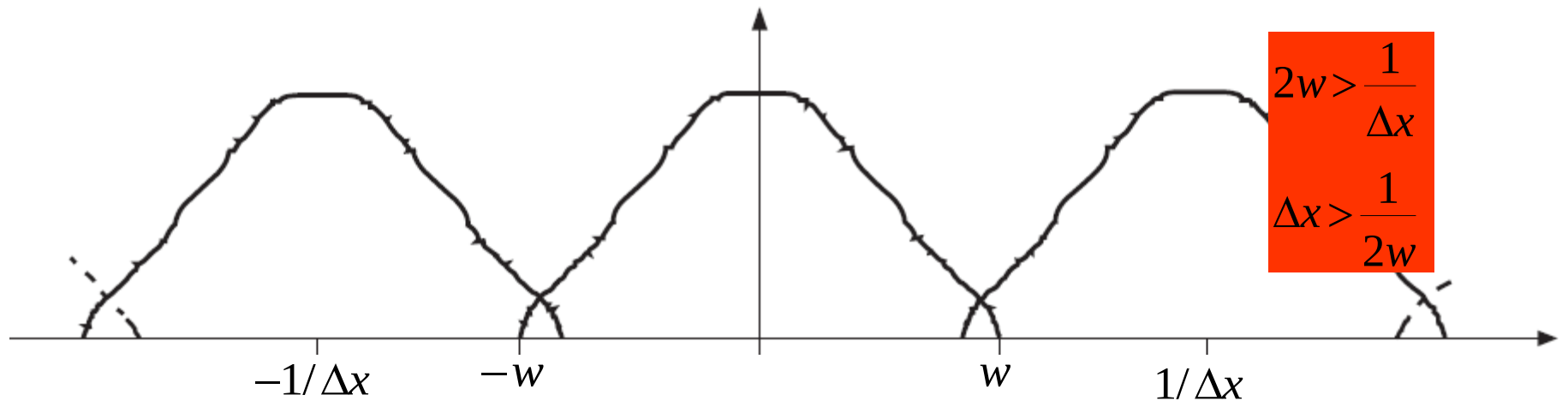
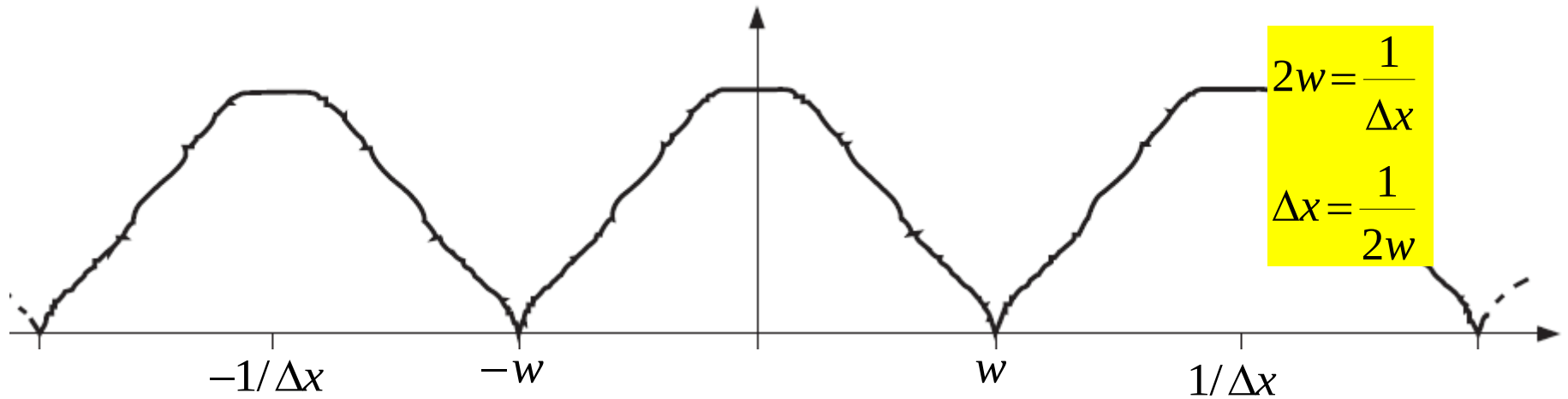


$$2w \leq \frac{1}{\Delta x}$$
$$\Delta x \leq \frac{1}{2w}$$

$$G(X) = F(X) * \text{comb}_{1/\Delta x}(X)$$



Mintavételezés az Nyquist-frekvenciánál és az alatt



Konvolúciós tétel (felidézés)

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(f \cdot g) = F(f) * F(g)$$

$$f * g = F^{-1}(F(f) \cdot F(g))$$

$$f \cdot g = F^{-1}(F(f) * F(g))$$

Folytonos képfüggvény visszaállítása mintákból

képtér

frekvencia-tér

$$f(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F(X)$$

$$\text{comb}_{1/2w}(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{comb}_{2w}(X)$$

$$g(x) = f(x) \cdot \text{comb}_{1/2w}(x) \quad \overset{\ddagger}{\Leftrightarrow} \quad G(X) = F(X) * \text{comb}_{2w}(X)$$

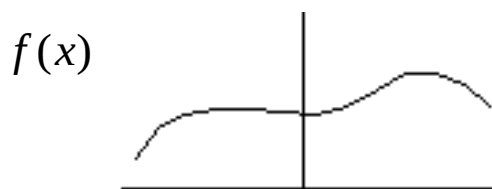
$$f(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

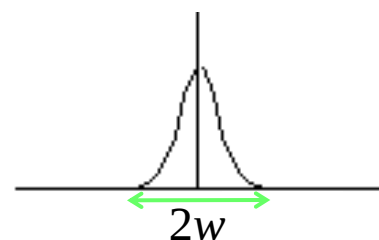
$$F(X) = G(X) \cdot \Pi_w(X)$$

$\ddagger$ A konvolúciós tétel 2. formulájából adódóan.

folytonos
függvény

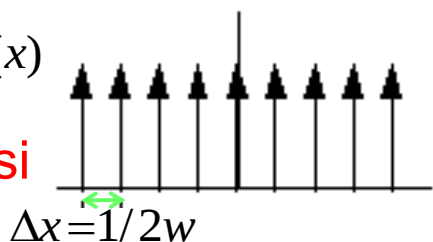


$F(X)$

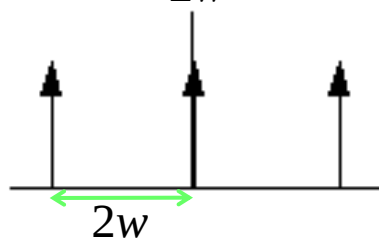


mintavételezési
lépték

$\text{comb}_{1/2w}(x)$

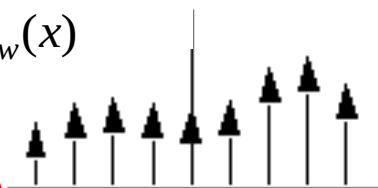


$\text{comb}_{2w}(X)$



$g(x) = f(x) \cdot \text{comb}_{1/2w}(x)$

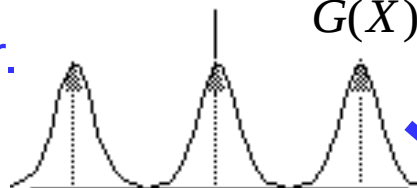
diszkrét
(mintavételezett)
függvény



Fourier tr.

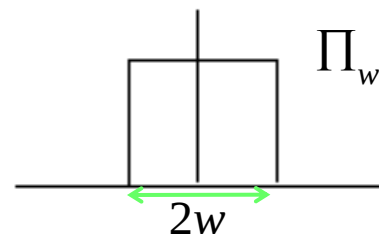


$G(X) = F(X) * \text{comb}_{2w}(X)$



pontonkénti
szorzás

$\Pi_w(X)$

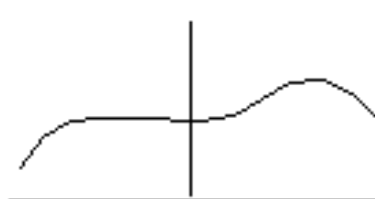


inverz
Fourier tr.

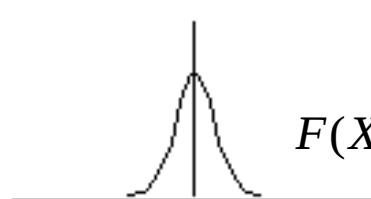


helyreállított
folytonos
függvény

$f(x)$



$F(X) = G(X) \cdot \Pi_w(X)$

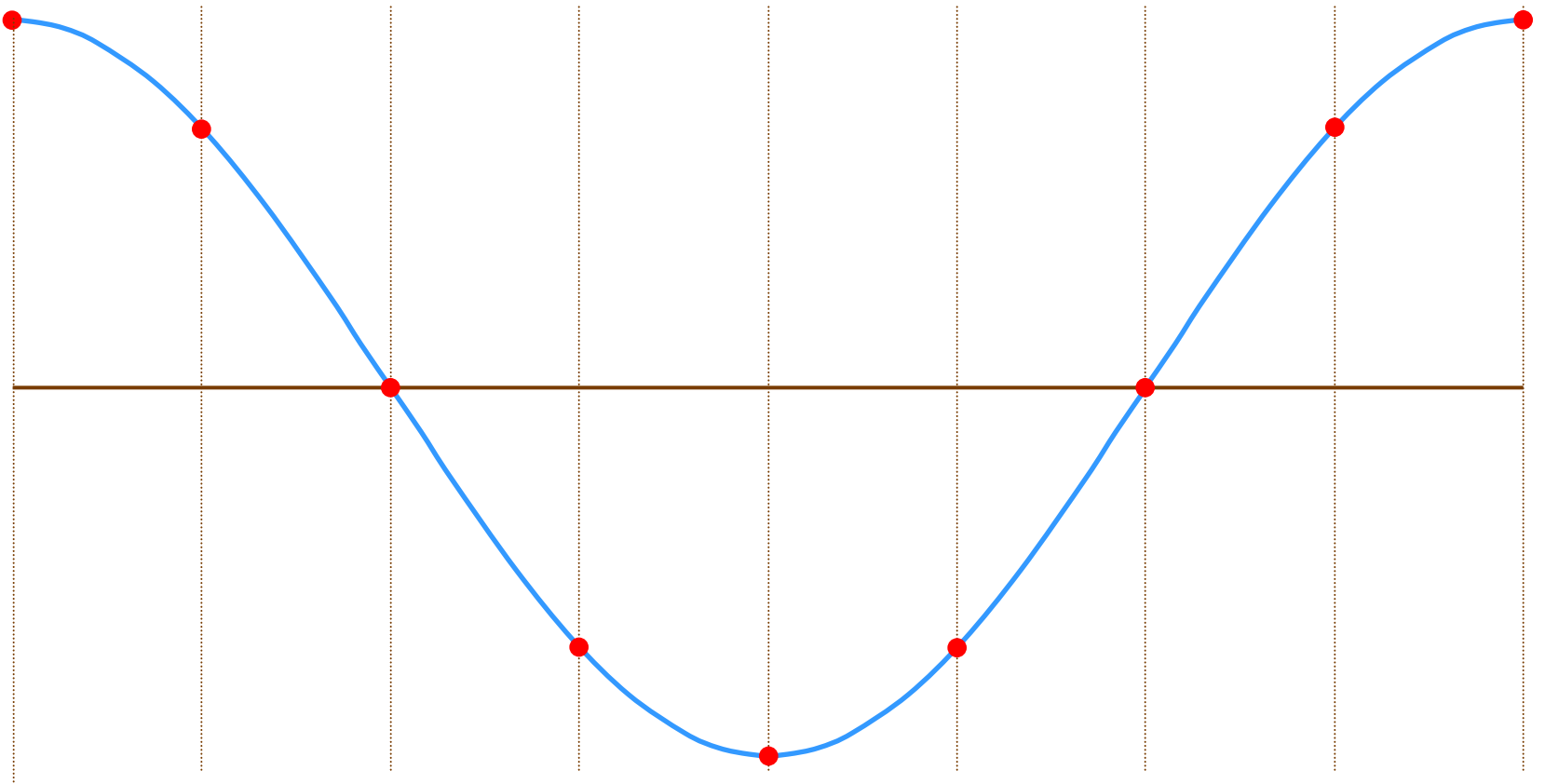


Whittaker-Shannon mintavételezési tétele

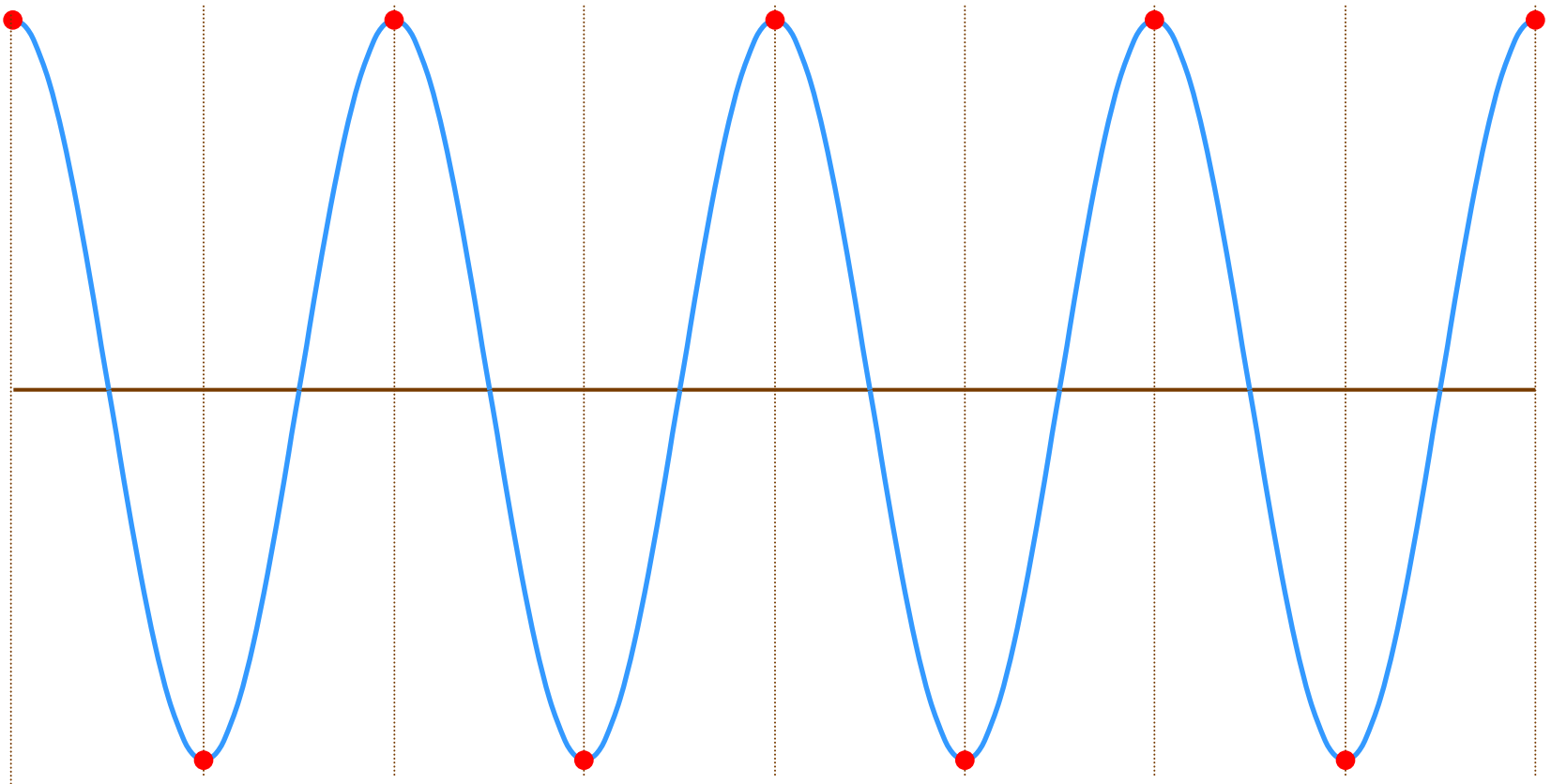
Az 1D folytonos, w -nél nagyobb frekvenciákat nem tartalmazó (sávhatárolt) jel akkor és csakis akkor állítható vissza a mintavételezettjéből, ha a Δx mintavételezési léptékre teljesül az alábbi feltétel:

$$\Delta x \leq \frac{1}{2w} .$$

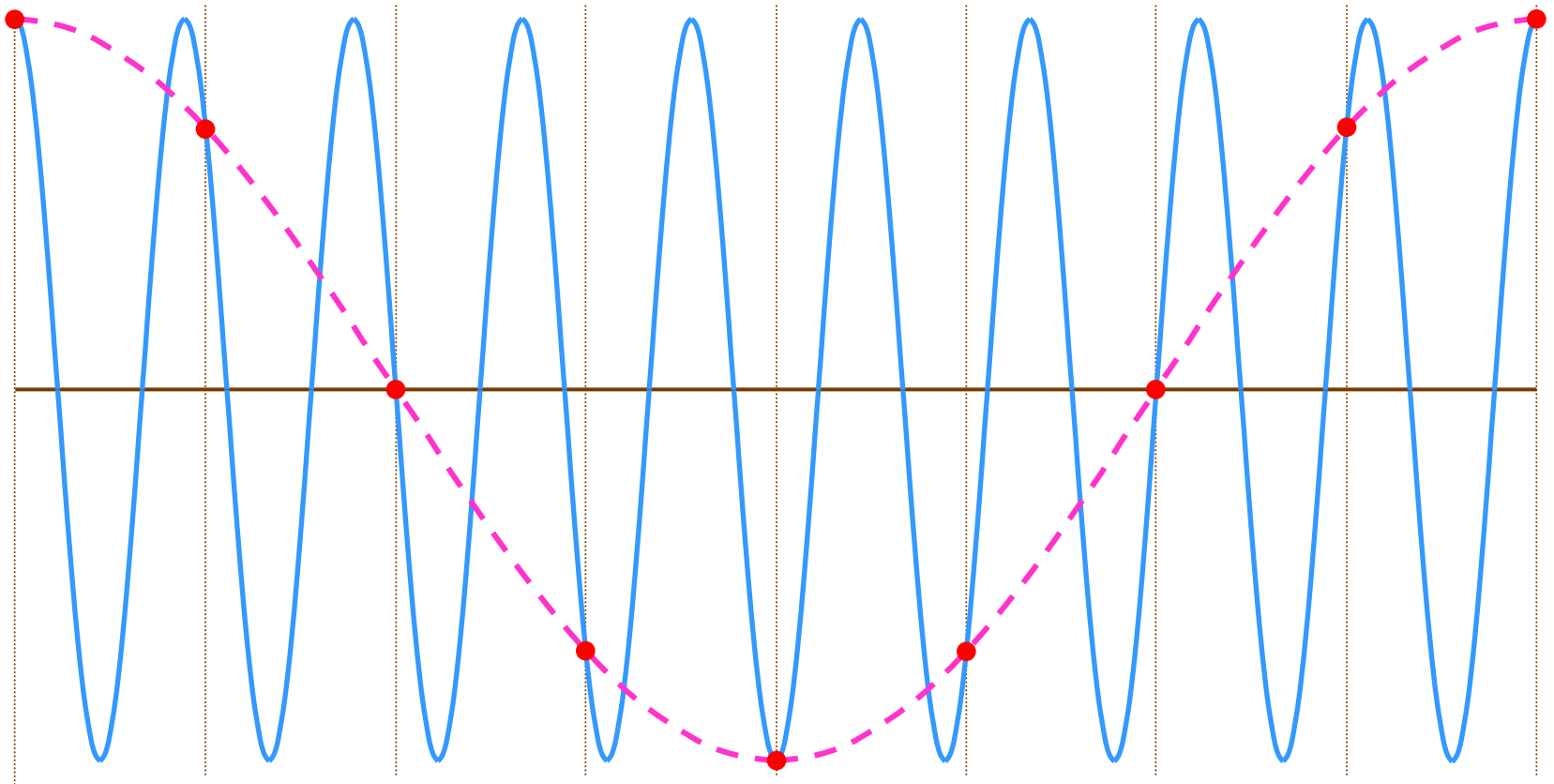
Mintavételezés az Nyquist-frekvencia fölött



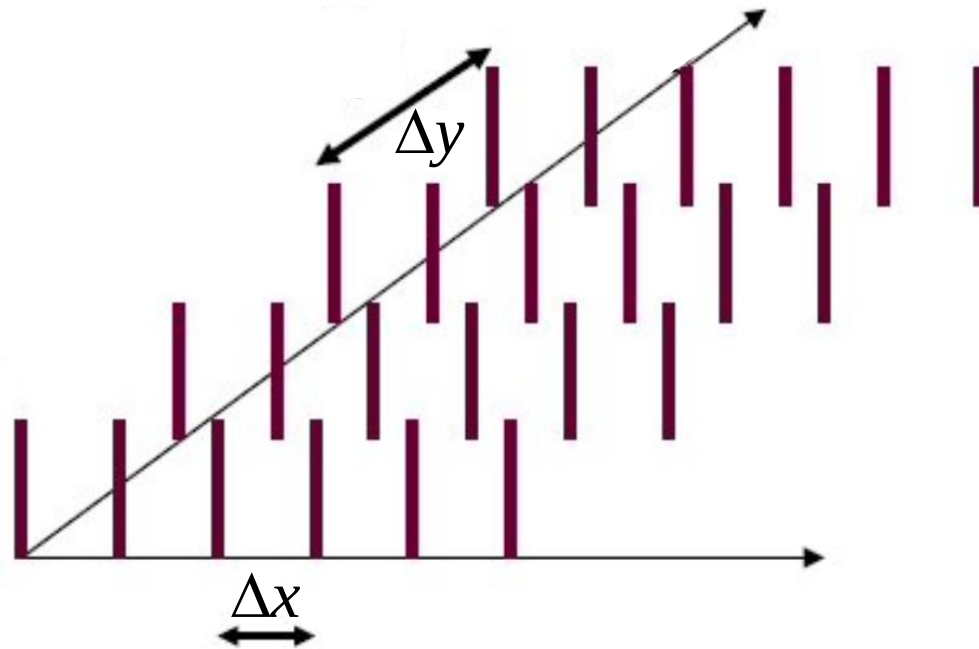
Mintavételezés az Nyquist-frekvenciával



Mintavételezés az Nyquist-frekvencia alatt



A 2D Dirac kefe



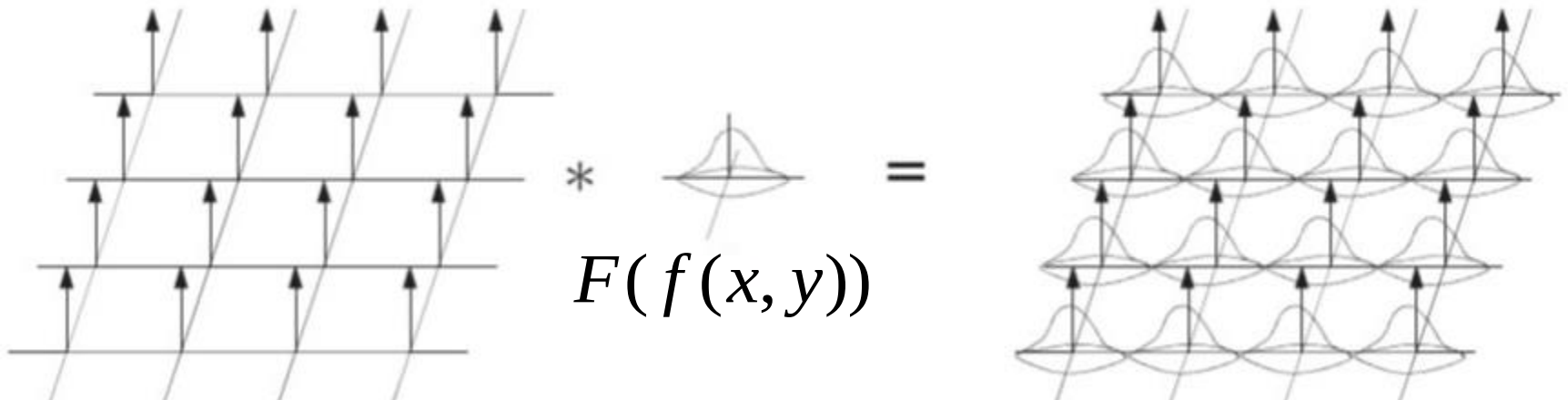
$$brush_{\Delta x, \Delta y}(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x = k \cdot \Delta x \text{ és } y = k \cdot \Delta y \\ 0 & , \text{ különben} \end{cases}$$

A Dirac kefe tulajdonságai

$$F(\text{brush}_{\Delta x, \Delta y}(x, y)) = \text{brush}_{1/\Delta x, 1/\Delta y}(x, y)$$

Pontonkénti szorzás (képtérben): mintavételezés

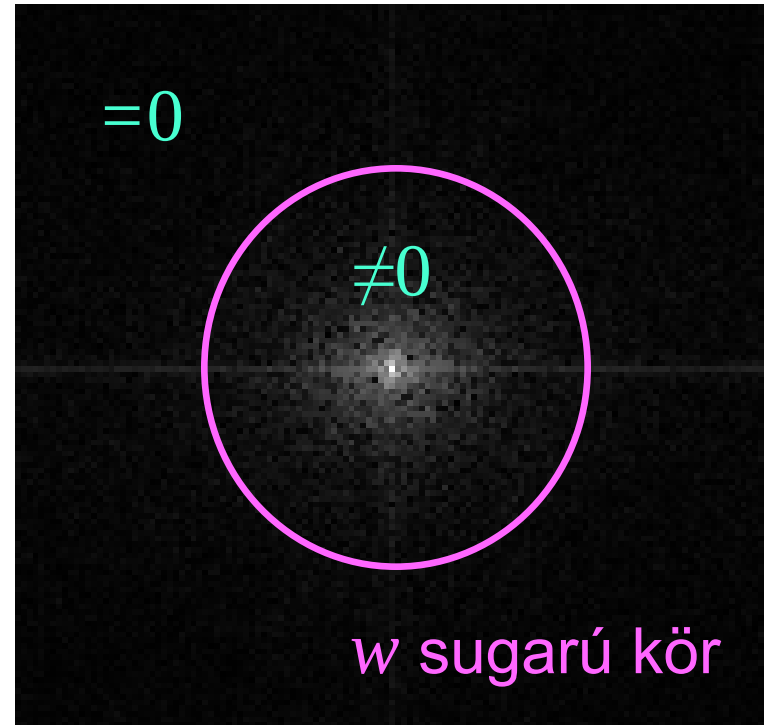
Konvolúció (frekvenciatérben): periodikus másolás



Sávhatárolt 2D függvény



$f(x,y)$



$|F(X,Y)|$

Whittaker-Shannon mintavételezési tétele 2D-ben

Az 1D folytonos, w -nél nagyobb frekvenciákat nem tartalmazó (sávhatárolt) jel akkor és csakis akkor állítható vissza a mintavételezettjéből, ha a Δx és a Δy mintavételezési léptékekre teljesülnek az alábbiak:

$$\Delta x, \Delta y \leq \frac{1}{2w} .$$