

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

ALGEBRAI (ÉS GEOMETRIAI) MÓDSZEREK A KOMBINATORIKÁBAN, BEADANDÓ FELADATOK

10/a) Oldjuk meg a következő lineáris rekurziót:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6; \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad (\text{ha } n \geq 2).$$

Megoldás:

A tanult algoritmus szerint járunk el:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 \quad (\text{ha } n \geq 2).$$

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ -5xA(x) & = & -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - 5a_3x^4 + \dots \\ \hline 6x^2A(x) & = & 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + \dots \end{array}$$

A három egyenletet összeadva

$$(1 - 5x + 6x^2)A(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x = 1 + x$$

adódik, ezért

$$A(x) = \frac{1+x}{1-5x+6x^2}.$$

$$\begin{aligned} 1 - 5x + 6x^2 &= \underbrace{\left(1 - \frac{5}{2}x\right)^2}_{1-5x+\frac{25}{4}x^2} - \frac{25}{4}x^2 + 6x^2 = \left(1 - \frac{5}{2}x\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 = \left(1 - \frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \\ &= (1 - 3x)(1 - 2x). \end{aligned}$$

A fentiek miatt

$$A(x) = \frac{1+x}{1-5x+6x^2} = \frac{\alpha}{1-3x} + \frac{\beta}{1-2x}, \quad \text{valamely } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Innen

$$\alpha(1-2x) + \beta(1-3x) = \alpha - 2\alpha x + \beta - 3\beta x = 1 + x.$$

Az együtthatókat vizsgálva:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ -2\alpha - 3\beta = 1. \end{cases}$$

Innen $\alpha = 4$ és $\beta = -3$, tehát

$$A(x) = \frac{4}{1-3x} - \frac{3}{1-2x}.$$

Ehhez:

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n, \text{ továbbá}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Végül felírva $A(x)$ -et:

$$A(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n) x^n.$$

Az együtthatót leolvasva kapjuk a lineáris rekurzió megoldását:

$$\boxed{a_n = 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n, \quad n \geq 0.}$$

15) Bizonyítsuk be a Newton-formula segítségével, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Megoldás:

Bizonyítás. Alakítsuk át a törtet, majd használjuk a Newton-formulát:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = (1+(-4x))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4)^n x^n.$$

Most tekintsük csak az együtthatót:

$$\binom{-1/2}{n} (-4)^n = \frac{(-\frac{1}{2}) (-\frac{1}{2} - 1) (-\frac{1}{2} - 2) \dots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-4)^n.$$

Mivel

$$-\frac{1}{2} - n + 1 = \frac{-1 - 2n + 2}{2} = \frac{-2n + 1}{2} = -\frac{2n - 1}{2}, \text{ ezért}$$

$$\begin{aligned} \frac{(-\frac{1}{2}) (-\frac{1}{2} - 1) (-\frac{1}{2} - 2) \dots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-4)^n &= \frac{(-\frac{1}{2}) (-\frac{3}{2}) (-\frac{5}{2}) \dots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} (-4)^n = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{(2n-1)}{2}}{n!} (-1)^n 4^n = \frac{(-1)^{2n} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} 4^n = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left(\frac{4}{2}\right)^n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Bővítsük a törtet $2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) = 2^n \cdot n!$ -sal:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} 2^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n)}{2^n \cdot n! \cdot n!} 2^n = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!},$$

ami a binomiális együttható ismert képlete szerint

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n}.$$

Ez már maga után vonja a feladat állítását. □

16) Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

Megoldás:

Bizonyítás. Tekintsük az

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{1-4x}$$

összefüggést. A jobb oldalt vizsgálva tudjuk, hogy

$$\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n.$$

Most pedig vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalát. Az előzőekben közölt bizonyítás értelmében

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Legyen

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \text{ és } B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

A kérdés a két formális hatványsor szorzata, azaz $A(x) \cdot B(x)$. Jelölje ezt a szorzatot $C(x)$. A formális hatványsorok szorzatának definíciója alapján

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

ahol $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$. Vizsgáljuk ezeket az együtthatókat:

$$\begin{aligned} c_0 &= \binom{0}{0} \cdot \binom{0}{0}, \\ c_1 &= \binom{0}{0} \cdot \binom{2}{1} + \binom{2}{1} \cdot \binom{0}{0}, \\ c_2 &= \binom{0}{0} \cdot \binom{4}{2} + \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{0}{0}, \\ &\vdots \\ c_n &= \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}. \end{aligned}$$

Mivel a c_n együttható felírható zárt alakban, ezért

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n.$$

Ezeket visszaírva a kezdeti összefüggésbe azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n.$$

Két formális hatványsort akkor tekintünk egyenlőnek, ha az együtthatósorozatuk megegyezik, azaz fennáll a

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

egyenlőség. Ezzel a bizonyítás kész.

□