

Gajdics Péter : Szakdolgozat 2016

1

Példa:

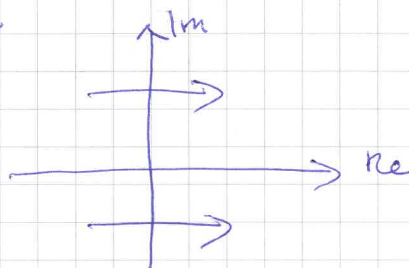
$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Jacobi mátrix :  $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$

Sajátértékek:

$$\mu \pm i$$

$$\mu = 0 : \pm i$$



\_\_\_\_\_ x \_\_\_\_\_

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z) \\ y' = g(x, y, z) \\ z' = h(x, y, z) \end{cases}$$

$(x^*, y^*, z^*)^T$  egy. h.

Jacobi mátrix  $(x^*, y^*, z^*)^T$ -ben

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{pmatrix}$$

$(x^*, y^*, z^*)$

Olyan situációt keresünk, hogy  
van 1 valós sajátérték

és 1 komplex konjugált pár, áthalad a bifurkációs  
tengelyen ahogy a bifurkációs paraméter változik

1. Cél  
 $d \neq 0$

2

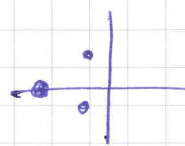
$(d, 0, -d)$  alakú d.e. egyensúlyi helyreklnek

$$\alpha \in (0, 5) \quad , \quad \beta \in (0, 15)$$

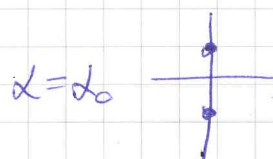
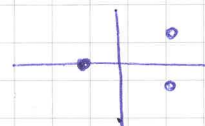
Valamelyik paraméter legyen rögzített,  
 másik mozg.

Pé  $\beta_0$  rögzített

$$\exists \alpha_0 \quad \alpha < \alpha_0$$



$$\alpha > \alpha_0$$



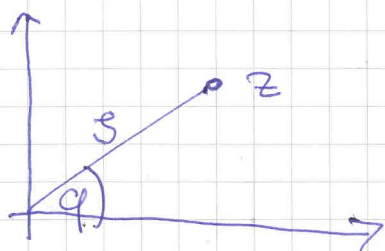
— X —

Példa:

komplex változó:  $z = x + iy$

$$\underline{z(t)} = x(t) + iy(t)$$

$$\underline{\dot{z}} = \dot{x} + i\dot{y} = \dots = \underline{(\mu + i)z - z|z|^2}$$



$$z = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z = s e^{i\varphi}$$

$$z(t) = s(t) e^{i\varphi(t)}$$

$$\dot{z}(t) = \dot{s}(t) e^{i\varphi(t)} + s(t) e^{i\varphi(t)} i \dot{\varphi}(t)$$

Másrészt, az egyenlet szerint

$$\dot{z}(t) = (\mu + i) s(t) e^{i\varphi(t)} - s(t) e^{i\varphi(t)} s^2(t)$$

3

$$\dot{s} e^{i\varphi} + s e^{i\varphi} \dot{\varphi} = (\mu + i) s e^{i\varphi} - s^3 e^{i\varphi}$$

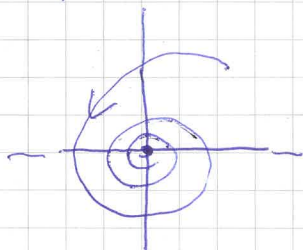
$$\text{I. } \dot{s} = s(\mu - s^2)$$

$$s \dot{\varphi} = s$$

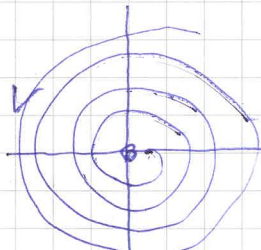
$$\text{II. } \dot{\varphi} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{s} = s(\mu - s^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

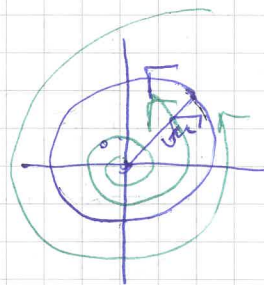
(0,0) egy.h.



$$\begin{aligned} \mu &< 0 \\ \dot{s} &< 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \dot{s} &< 0 \end{aligned}$$



$$\mu > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } s &\approx 0 \\ \dot{s} &\approx \mu s \end{aligned}$$

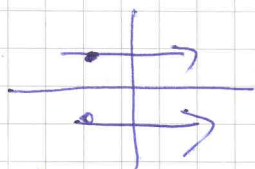
$\dot{s} = -s^3$   
lassabban  
tart 0-hoz

0 instabil  
± periódikus  
pálya  $\sqrt{\mu}$  sugárral  
stabil

origo asz. stabil

HOPF

SZU PERKRITIKUS - BIFURKÁCIÓ

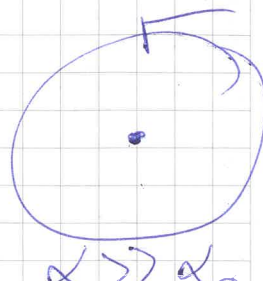


2. Cél  
A eset

$$\alpha < \alpha_0$$



$$\alpha > \alpha_0$$

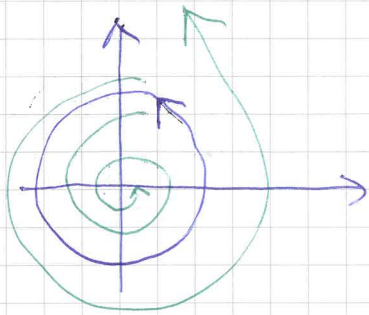


$$\alpha \gg \alpha_0$$

## SZUBKRITIKUS HOPF - BIFURKÁCIÓ

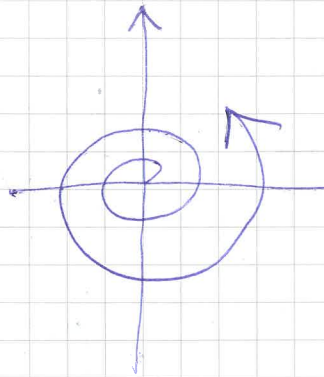
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y + y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{s} &= s(\mu + s^2) \\ \dot{\varphi} &= 1\end{aligned}$$



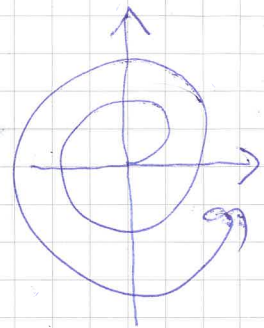
$\mu < 0$   
 $\exists$  per. pálya  
 $\sqrt{-\mu}$  sugárral  
 instabil

egy. h. stabil



$\mu = 0$   
 $\dot{s} = s^3$

instabil



$\mu > 0$   
 $\dot{s} > 0$

instabil

## 2. Cél

Beset

stabil per. pálya  
 $\alpha < \alpha_0$

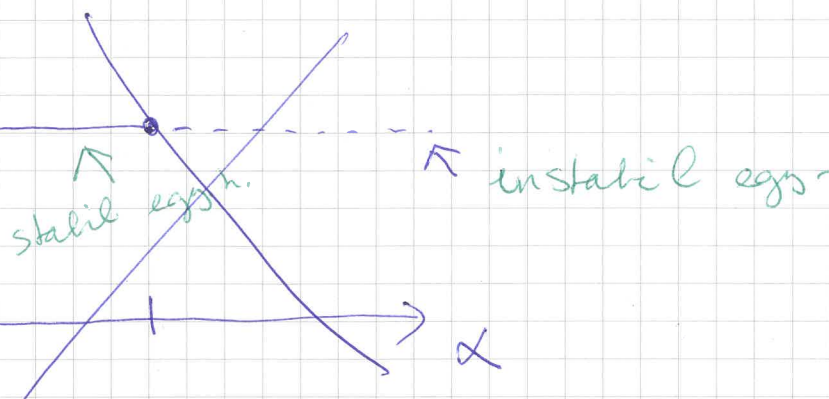
$\alpha > \alpha_0$

## 3. Cél

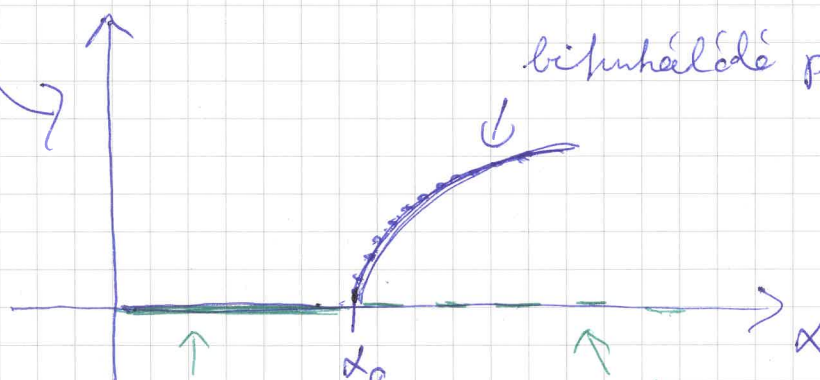
Bifurkációs diagramm

 $\beta_0$  rögzített

per. mo  
amplifikációja  
vagy  
min.  
periódusa



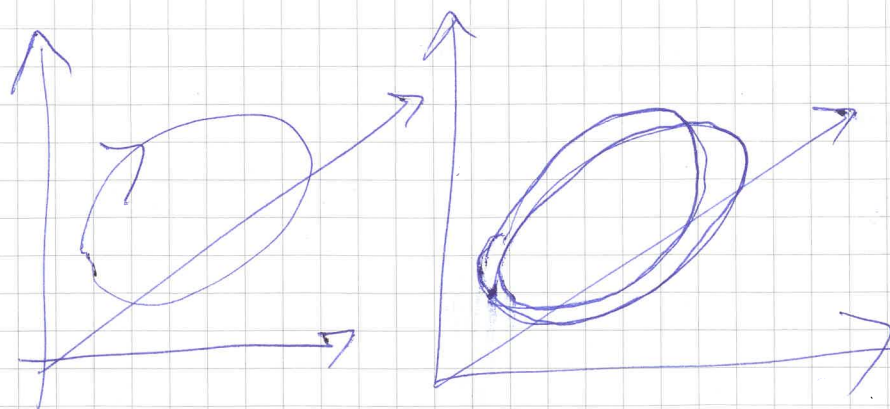
bifurkációs per. megoldás



stabilis

instabilis egyenl.

egyenl. (a Jacobi-mátrix összes sajátértéke  
negatív valós része)



PERIÓDUSKELTŐZŐ

BIFURKÁCIÓ