

szept. 29.

①

(*) Biz $f: (t, x) \mapsto A(t)x + b(t)$ folyt. valamin

$$\text{Lipschitz } \|A(t)(x' - x'')\| \leq \|A(t)\| \|x' - x''\| \quad \checkmark$$

P. Lind. $\checkmark$ előző tétel $\Rightarrow$

$$\hat{b} = r_2$$

$$\hat{b} < r_2$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \hat{b}-0} \|\hat{c}(t)\| = \infty$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + b(t) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad x(t) = \xi + \int_{\tau}^t (A(s)x(s) + b(s)) ds$$

$$c(t) = \xi + \int_{\tau}^t (A(s)c(s) + b(s)) ds$$

$$\|c(t)\| \leq \|\xi\| + \int_{\tau}^t (\|A(s)\| \|c(s)\| + \|b(s)\|) ds \leq \|\xi\| + B +$$

$$+ \int_{\tau}^t \|A(s)\| \|c(s)\| ds$$

$$\int_{\tau}^t \|b(s)\| ds \leq B$$

$$\|c(t)\| \leq (\|\xi\| + B) e^{\int_{\tau}^t \|A(s)\| ds}$$

 $(\tau \leq t < \hat{b})$ -n c korl. $\Rightarrow$

$C^1((r_1, r_2); \mathbb{R}^n)$ (r_1, r_2) -n értelmezett egyz. folyt. diff. ható függvények tere (végtelen dim. lin. tér)

Tétel: $\dot{x} = A(t)x$ homogén lin. egyenlet (H)

It (H) megoldásai $C^1((r_1, r_2); \mathbb{R}^n)$ -ben egy n dim. alteret alkotnak, azaz: $x = ?$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$
 a folytonosan diff. ható függvények térében

1. Ha c_1, c_2 megoldása (H)-nak, akkor $c_1 c_1 + c_2 c_2$ is az. ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)
2. $\exists c_1, \dots, c_n$ megoldása (H)-nak, amelyek lin. függetlenek, azaz $\exists n$ elemű alrendszer (bázis)

3. $(\forall \hat{c}$ m.o. - a (H) - nak) $(\exists \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n \in \mathbb{R}) : \hat{c}(t) \equiv \hat{c}_1 c_1(t) + \dots + \hat{c}_n c_n(t)$

Ekkor $\hat{c}_1 c_1(t) + \dots + \hat{c}_n c_n(t)$ neve ált. m.o. ($\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n \in \mathbb{R}$)

Biz(1): behelyettesítéssel ellenőrizhető

$$\begin{aligned} (c_1 c_1 + c_2 c_2)' &= c_1' c_1 + c_2' c_2 = c_1 A(t) c_1 + c_2 A(t) c_2 = \\ &= A(t) (c_1 c_1 + c_2 c_2) \end{aligned}$$

itt x helyett X

(2)

2. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ bázis $\mathbb{R}^n$ -ben (standard bázis)

(kép.) $i: \begin{cases} \dot{x} = A x \\ \vec{x}(0) = \vec{e}_i \end{cases} \quad \vec{t} \in (r_1, r_2) \text{ tetsz. rögzített}$

$X(0) = e_i \text{ vagy } \vec{e}_i$

$\exists I$ intervallum, amely tartalmazza 0-t és $\exists \varphi_i: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ megoldása (k.i.p.)_i-nek

(All $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ alapszisztem - megoldás ✓
- lin. független)

Igazoldjuk, hogy ezek lin. függetlenek.

Ind. Hjh: $\exists \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \in \mathbb{R}, c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 > 0$

$\bar{c}_1 \varphi_1(t) + \dots + \bar{c}_n \varphi_n(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (r_1, r_2) \quad t=0 \in I$

$\bar{c}_1 \varphi_1(0) + \dots + \bar{c}_n \varphi_n(0) \equiv 0$

$\bar{c}_1 \vec{e}_1 + \dots + \bar{c}_n \vec{e}_n = 0 \quad \Downarrow$

3. $\hat{\varphi}(0) \in \mathbb{R}^n$

$\exists \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n:$

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$ -ben $\Rightarrow \hat{\varphi}(0) = \hat{c}_1 \vec{e}_1 + \dots + \hat{c}_n \vec{e}_n$

$\varphi(t) := \hat{c}_1 \varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n \varphi_n(t)$ megoldása (H)-nak (1) alapján.

$\varphi(0) = \hat{c}_1 \vec{e}_1 + \dots + \hat{c}_n \vec{e}_n = \hat{\varphi}(0) \quad \hat{\varphi}, \tau \text{ m.}\sigma. \quad \left. \begin{array}{l} \hat{\varphi}(0) = \varphi(0) \\ \text{Picard-Lindelöf tétele} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\varphi} \equiv \varphi$

$X' = AX + b \quad (IH)$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n, x = ? \quad x = x(t) \in \mathbb{R}^n$

Tétel: Az inhomogén (IH) egyenlet általános megoldása:

$x(t) = \underbrace{c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t)}_{\text{a (H) általános m.}\sigma.} + \underbrace{\tilde{\varphi}(t)}_{\text{(IH) egy partikuláris m.}\sigma.}$

a (H) általános m.σ. (IH) egy partikuláris m.σ.

Biz: Ha φ_1, φ_2 m.σ.-i (IH)-nek, akkor $\varphi(t) := \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ megoldása (H)-nek. (*)

Valóban $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) = A \varphi_1(t) + b - (A \varphi_2(t) + b) = A(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = A \varphi(t)$

Legyen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ alapszisztemre (H)-nak és $\tilde{\varphi}$ part. m.σ. - a (IH)-nek

All: (a) $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n + \tilde{\varphi}$ m.σ. (IH)-nek

(b) $(\forall \hat{\varphi} \text{ m.}\sigma. - a \text{ az (IH)-nek}) (\exists \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n \in \mathbb{R})$

3

$$\varphi(t) \equiv \hat{c}_1 \varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n \varphi_n(t) + \tilde{q}(t) \text{ alah\u00ed}$$

Val\u00f3ban(a):

$$\begin{aligned} (c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \tilde{q}(t))' &= c_1 \dot{\varphi}_1(t) + \dots + c_n \dot{\varphi}_n(t) + \dot{\tilde{q}}(t) = \\ &= c_1 A(t) \varphi_1(t) + \dots + c_n A(t) \varphi_n(t) + (A(t) \tilde{q}(t) + b(t)) = \\ &= A(t) (c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \tilde{q}(t)) + b(t) \quad \forall t \text{ tehát m.o.} \end{aligned}$$

(b): $\hat{\varphi}(t) - \tilde{q}(t)$ megold\u00e1sa (H)-nek $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \exists \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n \in \mathbb{R}$

$$\hat{\varphi}(t) - \tilde{q}(t) = \hat{c}_1 \varphi_1(t) + \dots + \hat{c}_n \varphi_n(t)$$

n-edrend\u00fc k\u00f3nstans egy\u00f1\u00e9thet\u0151s lin. egyenletek

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x &= 0 \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ adott} \\ x = x(t) &= ? \text{ keresett} \end{aligned} \quad (1)$$

$(r_1, r_n) = (-\infty, \infty)$, a megold\u00e1s $C^n((-\infty, \infty); \mathbb{R})$ eleme

Ha a megold\u00e1st $C^n((-\infty, \infty); \mathbb{C})$ -ben keress\u00fcnk,

$$\begin{aligned} (2) \quad z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z &= 0 \quad z \in C^n((-\infty, \infty); \mathbb{C}) \\ a_1, \dots, a_n &\in \mathbb{C} \text{ adott, } z = z(t) = ? \end{aligned}$$

$$z(t) = x(t) + i y(t), \quad \dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i \dot{y}(t)$$

$$a_j = b_j + i c_j \quad b_j = \operatorname{Re} a_j, \quad c_j = \operatorname{Im} a_j$$

$$\begin{aligned} x^{(n)} + b_1 x^{(n-1)} + c_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n x - c_n y + \\ i \{ y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + c_1 x^{(n-1)} + \dots + b_n y + c_n x \} = 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad x^{(n)} + b_1 x^{(n-1)} + c_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n x - c_n y = 0 \quad x = x(t) = ?$$

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + c_1 x^{(n-1)} + \dots + b_n y + c_n x = 0 \quad y = y(t) = ?$$

ad\u00edviteli elv $\Rightarrow (2n) \times (2n)$ lin. els\u0151rend\u00fc rendszerrel \u00e9kvivalens

$A(t) \equiv A_0 \in \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}$ - a h. \u00e9. p. megold\u00e1sok l\u00e9t. $(-\infty, \infty)$

intervallumon \u00e9s egy\u00e9ntelm\u00fcek!

jel\u00f3l\u00e1s: p jel\u00f3lja a diff. m\u00f3veletet

$$p: C^n((-\infty, \infty); \mathbb{C}) \rightarrow C^{n-1}((-\infty, \infty); \mathbb{C}) \text{ oper\u00e1tor}$$

Szabasz lineáris,

1.

Inhomogén ~~re~~-eszkendű,

Konstans együtthatós inhomogén egyenletek

$$(IH_2) \quad Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \dots + a_n Y = b.$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$(H_2) \quad \dots = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_1 x_n - \dots - a_n x_1 + b \end{cases}$$

$$(IH_1) \quad X' = AX + B, \text{ ahol}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Miután $(1H)_2$ és $(1H)$ ekvivalens

(2)

2. Tételből azonnal adódik az alábbi állítás.

3. Tétel : $(1H_2)$ általános megoldása

$$\Psi(t) = c_1 \Psi_1(t) + c_2 \Psi_2(t)$$

$$c_1 \gamma_1(t) + c_2 \gamma_2(t) + c_n \gamma_n(t) + \tilde{\Psi}(t)$$

ahol $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ lin. független megoldásai $(1H_2)$ -nek, $\tilde{\Psi}$ partikuláris megoldása $(1H)_2$ -nek. □

⊥ Ψ_i : nem más, mint a 2. Tételben szereplő c_i első komponense.

Az $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ függvényeket alapszisztemnek hívjuk.

Feladat: az alapszisztem meghatározása, azaz n db lin. független megoldás meghatározása.

Mi csak $n=3$ -ra csináljuk

$$\gamma^{(3)} + a_1 \gamma^{(2)} + a_2 \gamma^{(1)} + a_3 \gamma = 0$$

Észrevétel:

3

~~mitra~~

Behelyettesítjük: $y'(t) = e^{\lambda t} - t$.

$$\left[\begin{array}{l} \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_n e^{\lambda t} = \underline{0} \\ \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \end{array} \right]$$

karakterisztikus egyenlet: $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (*)$

Látjuk: λ gyöke $(*)$ -nek $\Leftrightarrow e^{\lambda t}$

megoldása (H_2) -nek.

• Van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ különböző sajátérték

$\Rightarrow e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}$ megoldások

lin. függetlenek $\Rightarrow$ alapszisztem

• Ha ~~$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$~~ -o-

$\lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$
 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

λ_1 és $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
 $\Rightarrow e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}$
alapszisztem. Bázis: komplex

$\Rightarrow e^{\lambda_1 t}$ megoldás $e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$

ehhez $e^{\lambda_1 t}$ valós / képzetes része

is megoldás (H_2) -nek

átváltunk valós alapszisztemre Hf

alaprendszer : $e^{\lambda_1 t} \cos \beta t$
 $e^{\lambda_2 t} \sin \beta t$
 $e^{\lambda_3 t}$

(4)

• Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ de $\lambda_3 = \lambda_2$

$e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ megoldások

behelyettesítéssel ell: $te^{\lambda_2 t}$ is megoldás

alaprendszer : $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$, $te^{\lambda_2 t}$

• Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

$e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$

Chua - rendszer

- part. megoldás : rendszer - d

2. érvéls $\begin{cases} \text{behelyettesítéssel ellenőrizhető} \\ (d, 0, -d)^T \text{ egy. h.} \\ \text{a rendszerre} \end{cases}$

- esetszerű átalakítás