

2015. 11. 29.

7. feladatNem-életkép.

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

↑ számszámelosítások.

Kávészeg - elosítások

$0 \leq X$ és folytonos. Ilyen lesz ez.

Exponenciális:

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(t-\lambda)} dx = \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda} \right) - \lambda \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda} \right) =$$

$$= \begin{cases} \text{ha } t-\lambda > 0, \text{ akkor divergens.} \\ \text{ha } t-\lambda = 0, \text{ akkor ez nem jó.} \\ \text{ha } t-\lambda < 0, \text{ akkor véges.} \end{cases} \quad \underline{\underline{- \frac{\lambda}{t-\lambda} \text{ lesz.}}}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda-t} \quad \text{ha } t < \lambda \text{ lesz.}$$

$M_X(t)$ nem minden t -re létezik, egyé.



$$M_X(t) = \lambda (\lambda - t)^{-1}$$

$$M_X^{(1)}(t) = \lambda (-1) (\lambda - t)^{-2} \cdot (-1) = \lambda (\lambda - t)^{-2}$$

$$M_X^{(2)}(t) = \lambda (-2) (\lambda - t)^{-3} (-1) = 2\lambda (\lambda - t)^{-3}$$

⋮

$$M_X^{(n)}(t) = \lambda n! (\lambda - t)^{-n-1} \Rightarrow E(X^n) = M_X^{(n)}(0) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Gamma-eloszlás:

Exp. általánosítása.

Euler, 1730: $n=1, 2, 3, \dots$

$$n! = \int_0^1 (-\ln x)^n dx. \quad \text{Vern egész } n\text{-re is kifejezhető.}$$

$t = -\ln x$ helyettesítéssel átva...

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \alpha > 0 \quad \text{gamma-függvény.}$$

$$(a) \quad \Gamma(1) = 1 \quad \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$(b) \quad \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) = \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \forall \frac{\alpha}{2} > 0.$$

$$(c) \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{ha } n=1, 2, \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

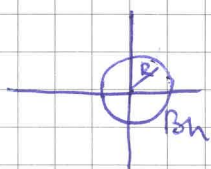
legyen $t = \lambda x$, λ paraméter $dt = \lambda dx$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \lambda dx = \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \dots$$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad \text{leír. SÚRÚSÉGFÜGGVÉNY.}$$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ változó.

$\alpha = 1$ esetén $\lambda e^{-\lambda x}$ leír. ezért $\Gamma(1, \lambda) \equiv \text{Exp}(\lambda)$.



n -sugárú gömb $\mathbb{R}^n$ -ben

$$V(B_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

így számolható a térfogat

$$B_u = \{x \mid d(g, x) \leq 1\}$$

$n=1$ esetén ez szakasz. 2 hosszú.

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}} R}{\Gamma(\frac{3}{2})}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma(\frac{1}{2})}_{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{\pi}} R}{\frac{1}{2} \cancel{\sqrt{\pi}}} = \frac{R}{1/2} = \underline{\underline{2R}}$$

$n=2$ esetén:

$$\frac{\pi R^2}{\Gamma(2)} = \underline{\underline{\pi R^2}} \quad \text{Látjuk.}$$

$n=3$ esetén:

$$\frac{\pi^{3/2} R^3}{\Gamma(\frac{5}{2})} = ?$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

$$\frac{\cancel{\pi^{3/2}} R^3}{\frac{3}{4} \cancel{\sqrt{\pi}}} = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi R^3}} \quad \text{az is az}$$

ennyi.

Nézzük az H_X -et.

$$X \sim G(\alpha, \lambda)$$

$$H_X(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(\lambda+t)} dx =$$

$$= \frac{1}{(\lambda+t)^\alpha} \underbrace{\left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(\lambda+t)} dx \right)}_{\text{1}}$$

$G(\alpha, \lambda+t)$ sűrűség függvény
 $(\lambda+t)^\alpha$ helyére. MEG

$$= \underline{\underline{\left(\frac{\lambda}{\lambda+t} \right)^\alpha}}$$

③

Ez egy endekes és hatékony megoldás

$\lambda - t > 0$ kell legyen, $t < \lambda$ kell.

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - t)^\alpha} = \lambda^\alpha (\lambda - t)^{-\alpha}$$

$$M_X'(t) = \lambda^\alpha (-\alpha) (\lambda - t)^{-\alpha-1} = -\alpha \lambda^\alpha (\lambda - t)^{-(\alpha+1)}$$

$$M_X''(t) = -\alpha \lambda^\alpha (-\alpha-1) (\lambda - t)^{-\alpha-2}$$

$\vdots$

$$M_X^{(n)}(t) = \lambda^\alpha \cancel{\alpha} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) (\lambda - t)^{-(\alpha+n)}$$

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0) = \lambda^\alpha \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \lambda^{-(\alpha+n)} =$$

$$= \lambda^{-n} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{\lambda^n}$$

— 0 —

Tfh $X_i \sim G(\alpha_i, \lambda)$ $i=1, 2$ függetlenek.

$$X = X_1 + X_2$$

$$M_X(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^{\alpha_2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\Rightarrow X \sim G(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda).$$

nat az M_X egyértelmű.

$$G(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda)$$

$$X_1 + X_2 \sim G(2, \lambda) \text{ egyet. szem.}$$

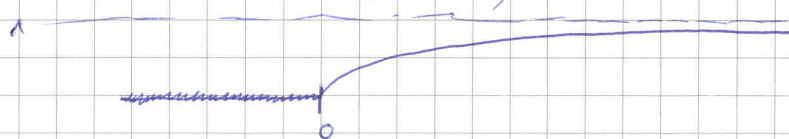
az csak kétetű.

$$X^2 \sim G\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Pareto-elosítások:

$$\alpha, \gamma > 0.$$

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x + \gamma} \right)^\alpha, \quad x \geq 0.$$



növekvő, folytonosan differenciálható a határértéké ∞ -be 1.

Kiváló elosítási függvény.

Ennek az elosításcsaládnak nem létezik az $M_X(t)$ -je...

(Csak negatív x -ekre, de az nem jó.)

Weibull-elosítások:

$$X \sim \text{Exp}(1) \quad F_X(x) = 1 - e^{-x}$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-x^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{legyen.}$$

$W(\alpha)$ elosítású az ilyen.

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-x^\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \quad x \geq 0 \quad \text{amennyi nulla.}$$

$$X \sim W(\alpha)$$

$$Y = \lambda X \quad \text{legyen, } \lambda \text{ param. } \lambda > 0.$$

$Y \sim W(\alpha, \lambda)$ kétparaméteres elosítás lesz.

$$X \sim W(\alpha)$$

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} dx = \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right).$$

$$u = x^\alpha$$

$$du = \alpha x^{\alpha-1} dx$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 f_X(x) dx = \int_0^\infty u^{\frac{2}{\alpha}-1} e^{-u} du = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right). \quad \text{lesz}$$

egy meg

Mára ennyi.