

2019. 11. 15.

5. konzultáció

Nem-életbiztosítások

Keverék - eloszlások

$$X_1, X_2, \dots, X_n : 0, 1, 2, \dots$$

$$p_1, \dots, p_n \text{ súlyok úgy, hogy } p_i > 0 \text{ és } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

$$f_X(n) = P(X=n) \text{ jelölés}$$

$$z = 0, 1, 2, \dots \quad f_X(z) = \sum_{i=1}^n f_{X_i}(z) \cdot p_i$$

$$0 \leq f_X(z) \quad \text{és} \quad \sum_{z=0}^{\infty} f_X(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n f_{X_i}(z) p_i = \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{\sum_{z=0}^{\infty} f_{X_i}(z)}_{=1} = 1.$$

Példa: rossz autóvesetők 20% $\Rightarrow \text{Poi}(4)$
jó vesetők 80% $\Rightarrow \text{Poi}(1)$
↑ 4 évi baleset

$$P(\text{balesetek száma} = z) = \underbrace{P(\text{balesetek száma} = z \mid \text{jó})}_{\frac{4^z}{z!} e^{-1}} \cdot \underbrace{P(\text{vesető jó})}_{0,8} + \underbrace{P(\text{b. sz} = z \mid \text{rossz})}_{\frac{1^z}{z!} e^{-1}} \cdot \underbrace{P(\text{vesető rossz})}_{0,2}$$

$$E(X_i) = \mu_i, \quad V(X_i) = \sigma_i^2$$

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

$$E(X) = \sum_{z=0}^{\infty} z f_X(z) = \sum_{z=0}^{\infty} z \sum_{i=1}^n f_{X_i}(z) p_i = \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{\sum_{z=0}^{\infty} z f_{X_i}(z)}_{E(X_i) = \mu_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i \mu_i$$

①

$$E(X^n) = \dots z^n \dots = \sum_{i=1}^n p_i E(X_i^n).$$

$m=2$ legyen. A szóráshézaghoz.

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{E^2(X)}_{\mu^2} = \left[\sum_{i=1}^n p_i (\beta_i^2 + \mu_i^2) \right] - \mu^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i (\beta_i^2 + \underbrace{\mu_i^2}_{-2\mu_i\mu + \mu^2} - 2\mu_i\mu + \mu^2)$$

$(\mu_i - \mu)^2$ teljes négyzet

$$E(X_i^2) = V(X_i) + E^2(X_i)$$

$$\mu^2 = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i \cdot \mu$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i (\beta_i^2 + (\mu_i - \mu)^2). \quad \square$$

Visszetérve a példára:

$$E(X) = p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 = 0,2 \cdot 4 + 0,8 \cdot 1 = \underline{\underline{1,6}}$$

$$V(X) = 0,2 \left((4-1,6)^2 + 4 \right) + 0,8 \left((1-1,6)^2 + 1 \right) \approx \underline{\underline{3,04}}$$

Momenterőpontos függvény:

$$P_X(t) = E(t^X) = \sum_{z=0}^{\infty} t^z p_X(z) = \sum_{z=0}^{\infty} t^z \sum_{i=1}^n p_i p_{X_i}(z) =$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{\sum_{z=0}^{\infty} t^z p_{X_i}(z)}_{P_{X_i}(t)} = \sum_{i=1}^n p_i P_{X_i}(t) \quad \text{lesz}$$

$$M_X(t) = P_X(e^t) = \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{P_{X_i}(e^t)}_{M_{X_i}(t)} = \sum_{i=1}^n p_i M_{X_i}(t).$$

Példa

$$X_1, \dots, X_n \rightarrow X \text{ revenék}$$
$$p_1, \dots, p_n$$

És legyen egy másik:

$$Y = p_1 X_1 + \dots + p_n X_n$$

Fontos: X és Y nem ugyanaz.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i$$

$$\Rightarrow E(X) = E(Y)$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n p_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i$$

Tfh $X_1, \dots, X_n$ függetlenek. És azonos eloszlásúak is.

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i \left(\underbrace{(\mu_i - \mu)^2}_0 + \underbrace{\sigma_i^2}_{\sigma^2} \right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n p_i = \sigma^2$$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n V(p_i X_i) = \sum_{i=1}^n p_i^2 \underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2} = \sigma^2 \sum_{i=1}^n p_i^2$$

Latjuk: $V(Y) \neq V(X)$, $V(Y) < V(X)$.

Számolási példa

X Poi(λ) - 2 revenéke.

$$P(\lambda=1) = 0,25$$

$$P(\lambda=2) = 0,35$$

$$P(\lambda=4) = 0,4$$

mindent ki kell számolni.

$$P_X(t) = 0,25 \cdot e^{t-1} + 0,35 \cdot e^{2(t-1)} + 0,4 \cdot e^{4(t-1)}$$

$$E(X) = 0,25 \cdot 1 + 0,35 \cdot 2 + 0,4 \cdot 4 = \underline{\underline{2,55}}$$

(3)

$$V(X) = 0,25(1,55^2 + 1) + 0,35(0,55^2 + 2) + 0,4(1,45^2 + 4) =$$

$$= \underline{\underline{4,975}} \quad \text{ennyi.}$$

— 0 —

Tfh: $X \sim \text{Poi}(\lambda) - 2$ kérésre. $\lambda - 1 \sim \text{Bin}(2, 0.2)$

$$\lambda - 1 = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$\lambda \in \{1, 4, 3\}$$

$$P(\lambda=1) = \binom{2}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^2 = \underline{\underline{0,64}}$$

$$P(\lambda=2) = \binom{2}{1} 0,2^1 \cdot 0,8^1 = 0,32$$

$$P(\lambda=3) = \binom{2}{2} 0,2^2 \cdot 0,8^0 = \underline{\underline{0,04}}$$

ennyi a beugratos rész.

$$E(X) = 0,64 \cdot 1 + 0,32 \cdot 2 + 0,04 \cdot 3 = \underline{\underline{1,4}} = \mu$$

$$V(X) = 0,64(0,4^2 + 1) + 0,32(0,6^2) + 0,04(1,6^2 + 3) = \underline{\underline{1,72}}$$

$$P_X(t) = 0,64 e^{t-1} + 0,32 \cdot e^{2(t-1)} + 0,04 \cdot e^{3(t-1)}. \quad \square$$

Behelyettesítés az egész.

Kollektív kockázati modell:

$$S = X_1 + \dots + X_N \quad \text{vált.}$$

$$X \sim \text{Poi} \quad N \sim \text{Bin}$$

S: Poi - Bin összetett eloszlású.

↑ elsőfokos eloszlás ↑ másodfokos eloszlás

S: összetett Poisson-eloszlású.

És most jön a félév egyetlen tétele.

④

Tétel: Ha $S_1, \dots, S_N$ független, összetett Poisson-eloszlású valószínűségi változók, akkor

$S = S_1 + \dots + S_N$ is összetett Poisson-eloszlású.

Biz:
$$M_S(t) = \prod_{i=1}^N M_{S_i}(t) = \prod_{i=1}^N M_{N_i}(\lambda_i M_{X_i}(t)) = \prod_{i=1}^N e^{\lambda_i (M_{X_i}(t) - 1)}$$

$$S_i \sim \underbrace{\text{Poi}(\lambda_i)}_{\text{elsoleges}} - X_i \quad e^{\lambda_i(t-1)} \text{ van}$$

$$S \sim N-X$$

$$M_S(t) = \exp(\lambda (M_X(t) - 1))$$

Azt segítjük, hogy $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N$.

$$= \left(\prod_{i=1}^N \exp(\lambda_i M_{X_i}(t)) \right) \exp(-\lambda) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i M_{X_i}(t)\right)$$

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda} M_{X_i}(t)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = \underline{\underline{1}} \text{ ez OK.}$$

X: $X_1, \dots, X_N$ helyettesítve a $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda_N}{\lambda}$ súlyokkal

