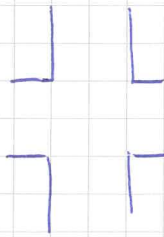


2019. 10. 19.

4. konzultáció

Nem-alkotó, bősor

utkeresési órák:



N : áthaladó autók száma (adott időtartam alatt)

X_n : az n -edik autóban ülő utasok száma.

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad \text{véletlen tagszámú összeg.}$$

ennyi.

5 szabályos érmét feldobunk. N : fejké száma

Ezután feldobunk N db (szabályos) kockát.

S : a dobott „pontok” összege.

$$E(S) = ?$$

$$V(S) = ?$$

Tudjuk:

$$N \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

$$S \in \{0, 1, \dots, 6, 2, 30\}$$

↑
szórásnégyzet,
variancia.

„elegáns” megoldás következik.

X_n : az n -edik kockát feldobva mi jött ki.

$$S = X_1 + \dots + X_N \quad \text{véletlen tagszámú összeg.}$$

$$E[S] = E[N] \cdot E[X] = \frac{35}{4}$$

//
 $np = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5$ //
 $3,5$

$$N \sim \text{Bin}(5, \frac{1}{2})$$

X	1	2	3	4	5	6
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\frac{1085}{48} \approx 22,604$$

$$\sum p_i x_i = \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$\sum p_i x_i^2 = \frac{1}{6} (1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

$$V[S] = \underbrace{E[N]}_{2,5} \underbrace{V[X]}_{\frac{35}{12}} + \underbrace{E^2[X]}_{3,5^2} \underbrace{V[N]}_{\frac{5}{4}}$$

$$V[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{35}{12}$$

$$V[N] = npq = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$V[X] = ?$$

$$V[N] = ?$$

(1)

ZERUS-MODOSÍTOTTI ELŐSZÁMLÁSOK

legyen $X \sim (a, b, c)$, $f_X(n) = P(X=n)$ jelölés.
 $\parallel$
 P_n $n=0, \dots$

$$P(N=n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) P(N=n-1) \quad n=1, 2, \dots$$

$\bar{X} \sim (a, b, 1)$, $f_X(0)$ legyen tetszőleges.

$$f_{\bar{X}}(1) = c \cdot f_X(1) \quad \text{és tffh } f_X(n) \neq 0 \Rightarrow$$

$X \neq \text{Bin}(0, p)$

Ettől $f_{\bar{X}}(2) = \left(a + \frac{b}{2}\right) f_{\bar{X}}(1) = c \underbrace{\left(a + \frac{b}{2}\right) f_X(1)}_{f_X(2)} = c \cdot f_X(2).$

$\vdots$

$$f_{\bar{X}}(n) = c \cdot f_X(n) \quad n \geq 1.$$

c persze nem lehet akármilyen.

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\bar{X}}(n) \quad \text{ kell.}$$

$$\begin{aligned} &\parallel \\ f_{\bar{X}}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{\bar{X}}(n) &= f_{\bar{X}}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot f_X(n) = \\ &= f_{\bar{X}}(0) + c \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_X(n)}_{1 - f_X(0)} = \\ &= f_{\bar{X}}(0) + c(1 - f_X(0)). \end{aligned}$$

innen

$$c = \frac{1 - f_{\bar{X}}(0)}{1 - f_X(0)}.$$

n-edik momentum:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^n) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^n f_{\bar{X}}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n f_{\bar{X}}(k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^n \cdot c \cdot f_X(k) = c \sum_{k=1}^{\infty} k^n \cdot f_X(k) = \\ &= c \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k^n f_X(k)}_{E(X^n)} = c \cdot E(X^n). \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= E(\bar{X}^2) - E^2(\bar{X}) = \\ &= c \cdot E(X^2) - (c \cdot E(X))^2 = \\ &= c E(X^2) - c^2 E^2(X) = \\ &= c E(X^2) - c^2 \tilde{E}(X) = c (E(X^2) - E^2(X)) + (c - c^2) E(X) = \\ &= c V(X) + c(1-c) E(X). \end{aligned}$$

Példa

tfh: $X \sim \text{Geom}(0,1)$, $P(\bar{X}=0) = 0,3$ kell.

a) $\bar{X}$ -re néhányszor lép fel.

b) $P(\bar{X} < 4) = ?$

c) $E(\bar{X}) = ?$ $V(\bar{X}) = ?$

$X \sim (q, 0, 0)$

$$P(\bar{X}=n) = \underbrace{\left(q + \frac{0}{n}\right)}_q P(\bar{X}=n-1) = q P(\bar{X}=n-1).$$

$$c = \frac{1 - f_{\bar{X}}(0)}{1 - f_X(0)} = \frac{1 - 0,3}{1 - 0,1} = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}$$

$q = 1 - p = 0,9$

k	$f_X(X=k)$	$f_{\bar{X}}(\bar{X}=k)$	
0	0,1	0,3	csok-c-vel valószínűség!!
1	$0,1 \cdot 0,9$ $0,09$	0,07	
2	$0,09 \cdot 0,9 =$ $0,081$	0,063	$\cdot q$
3	0,0729	0,0567	$\cdot q$

$\cdot c$

$$P(\bar{X} < 4) = 0,3 + 0,07 + 0,063 + 0,0567 = \underline{\underline{0,4897}}$$

$$E(\bar{X}) = c \cdot E(X) = \frac{7}{9} \cdot 9 = \underline{\underline{7}}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{0,9}{0,1} = 9$$

$$V(\bar{X}) = c \underbrace{V(X)}_{\frac{q}{p} = 90} + c(1-c) \underbrace{E^2(X)}_{9^2} = \underline{\underline{84}}. \quad \square$$

Példa

$$X \sim \text{Poi}(2,5)$$

$$P(\bar{X} = 0) = 0,55.$$

a) $\bar{X}$ -re rekurrens reláció

b) $P(\bar{X} \geq 4) = ?$

c) $E(X) = ? \quad V(X) = ?$

a) $X \sim (0, \lambda, 0)$

$$P(\bar{X} = n) = \left(0 + \frac{\lambda}{n}\right) P(\bar{X} = n-1) = \frac{\lambda}{n} P(\bar{X} = n-1).$$

$$C = \frac{1 - f_{\bar{x}}(0)}{1 - f_x(0)} = \frac{1 - 0,55}{1 - 0,5769} = \frac{0,45}{0,4231} = 1,0636$$

$$f_x(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-0,55} = 0,5769$$

z	$f_x(z)$	$f_{\bar{x}}(z)$
0	0,5769	0,5500
1	0,3173	0,5850
2	0,1586	0,1609
3	0,1058	0,1073

0,082	0,55
0,205	0,2696
0,1025	0,05024
0,0683	0,0334

$$P(\bar{X} \geq 4) = 1 - [P(\bar{X}=0) + P(\bar{X}=1) + P(\bar{X}=2) + P(\bar{X}=3)] =$$

↑
2ar.

$$P(\bar{X}=n) = \frac{2,5}{n} P(\bar{X}=n-1)$$

z	$f_{\bar{x}}(z)$	$f_x(z)$
0	0,55	0,0821
1		0,2065
2		0,20
3		0,2138

0,55
0,1006
0,1258
0,1048

$$P(\bar{X} \geq 4) = 0,1188$$

$$E(\bar{X}) = C E(X) = C \lambda = C \cdot 2,5 = 1,2255$$

$$V(x) = C \cdot \underbrace{V(x)}_{2,5} + C(1-C) \underbrace{E(x)}_{2,5} = \underline{\underline{2,7874}}$$

emmyitve

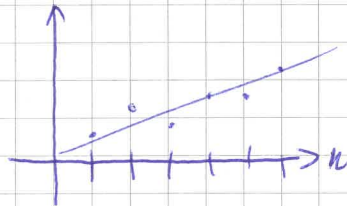
Kis elmélet:

$$P_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) P_{n-1} \Leftrightarrow n \cdot \frac{P_n}{P_{n-1}} = \underbrace{na + b}$$

n a változó,
amely lin. függvény



egyenest illeszthető.



ittől a, b leolvasható.

Bin	$a < 0$	csökkenő	} nézve az adatokra elrendelhető ez a sorrend.
NB	$a = q > 0$	növekvő	
Póssz	$a = 0$	vízszintes	