

2019.10.18.

3. konzultáció

Nem-életbiztosítás

$$V[X] = E[X^2] - E^2[X] \quad \text{adott.}$$

Legyen $K_X(t) = \ln M_X(t)$. ~~az~~ kumuláns generáló függvény.

$$K_n = K_X^{(n)}(0) \quad \text{lesz.}$$

$$K_X(0) = \ln M_X(0) = \ln 1 = 0.$$

$$K'_X(t) = \frac{1}{M_X(t)} \cdot M'_X(t)$$

$$K'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{E[X]}{1} = E[X] = M'_X(0).$$

$$K''(t) = \frac{M''_X(t) M_X(t) - M'_X(t)^2}{M_X(t)^2}$$

$$K''(0) = E[X^2] - E^2[X] = V(X). \quad \text{lesz éppen.}$$

centralis momentumok:

$$C_n = E((X - E(X))^n)$$

$$C_0 = 1$$

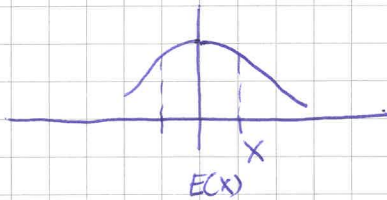
$$C_1 = E(X - E(X)) = E[X] - E[X] = 0$$

$$C_2 = E((X - E[X])^2) = \\ = V[X]$$

$$C_3 = E((X - E[X])^3) =$$

$$\gamma_X = \frac{C_3}{\sigma^3} \quad \uparrow \text{skálázás} \quad \text{ferdeségi együttható.} \quad \text{Mi ez?}$$

legyen szimmetrikus változó.

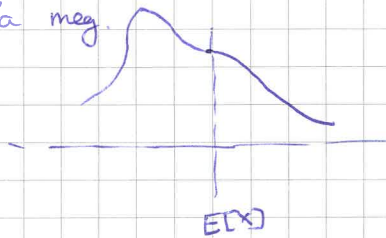


$$\Rightarrow C_3 = 0 \text{ lesz itt.}$$

$$\Rightarrow \gamma_X = 0 \text{ lesz.}$$

↑ mennyire nem szimmetrikus
a változó?

Eset adja meg.



$$\gamma_X > 0 \text{ lesz itt}$$

a másik esetben $\gamma_X < 0$ lesz.

$$K'''(t) = \frac{(M''' \cdot M + M'' \cdot M' - 2M' \cdot M'') \cdot M^2 - (M'' \cdot M - M' \cdot M') \cdot 2MM'}{M^4}$$

$$K'''(0) = E[X^3] + \underbrace{E[X^2]E[X] - 2E[X^2]E[X] + E^3[X]}_{-3E[X^2]E[X]}$$

$$C_3 = E[X^3 - 3X^2E[X] + 3XE^2[X] - E^3[X]] =$$

$$= E[X^3] - 3E[X]E[X^2] + \underbrace{3E^2[X]E[X]}_{3E^3[X]} - E^3[X]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{2E^3[X]}$$

Tehát $C_3 = K'''(0).$

Fontos: $C_4 \neq K^{(4)}(0).$

legyen $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

$$K_X = \lambda(e^t - 1)$$

$$K'_X = \lambda e^t \quad K'_X(0) = \lambda = E[X]$$

$$K''_X = \lambda e^t \quad \therefore \lambda = E^2[X]$$

$$K'''_X = \lambda e^t \quad \therefore C_3 = \lambda.$$

$$\gamma = \frac{C_3}{\sigma^3} = \frac{\lambda}{(\sqrt{\lambda})^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Binomiales

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$K_X(t) = \ln(p e^t + q)^n$$

$$\begin{aligned} K'_X(t) &= \frac{1}{(p e^t + q)^n} \cdot n (p e^t + q)^{n-1} \cdot p e^t = \\ &= \frac{n p e^t}{p e^t + q} \end{aligned}$$

$$K'_X(0) = \frac{np}{p+q} = np.$$

$$K''_X(t) = \frac{np e^t (p e^t + q) - n p e^t^2}{(p e^t + q)^2}$$

$$K''_X(0) = \frac{np(p+q) - np^2}{(p+q)^2} = npq.$$

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$K_X(t) = \ln p - \ln(1 - qe^t)$$

$$K'_X(t) = + \frac{1}{1 - qe^t} qe^t = \frac{qe^t}{1 - qe^t}$$

$$E[X] = K'_X(0) = \frac{q}{1 - q} = \frac{q}{p}$$

$$K''_X(t) = \frac{qe^t(1 - qe^t) + (qe^t)^2}{(1 - qe^t)^2}$$

$$K''_X(0) = \frac{q(1 - q) + q^2}{(1 - q)^2} = \frac{q}{p^2} = V[X]$$

$$X \sim \text{NB}(r, p)$$

$$\ln\left(\left(\frac{p}{1 - q}\right)^r\right) = r(\ln p - \ln(1 - qe^t))$$

$$E[X] = r \frac{q}{p} \quad V[X] = r \frac{q}{p^2}$$

ennyi

Ha X és Y fgln valószínűségi változók.

$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t) \quad \text{a log miatt.}$$

Összkár-modellzés (volt):

$$S = X_1 + \dots + X_n \quad \text{egyesi kockázat modellje.}$$

X_i fgln, azonos eloszlású valószínűségi változók

$$E[S] = n E[X] \quad \text{egyszerű.}$$

$$V[S] = n V[X]$$

$$M_S(t) = (M_X(t))^n$$

ez meggyőző problémára.

Kollektív kockázat modellje:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad \uparrow \quad N \text{ is valószínű.}$$

$X_1, X_2, \dots$ azonos eloszlásúak

$X_1, X_2, \dots, N$ független valószínűségi
véletlen tagok összege és

A teljes valószínűség tételle:

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \quad P(B_n) > 0.$$

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} E(X|B_n) \cdot P(B_n).$$

$$B_n = \{N=n\}$$

$$E(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E(S|N=n)}_{E[X_1 + \dots + X_n]} \cdot P(N=n)$$

$$E(X_1 + \dots + X_n | N=n)$$

$\parallel$ függetlenség miatt

$$E(X_1 + \dots + X_n)$$

$\parallel$

$$n E[X]$$

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot E[X] \cdot P(N=n) = E[X] \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n)}_{E[N]} = \underline{\underline{E[X] \cdot E[N]}}$$

⑤

$E[N]$

$V[S] = ?$ mi a helyzet a szóráshegységgel?

$$E[S^2] = \sum_{n=0}^{\infty} E(S^2 | N=n) \cdot P(N=n) =$$
$$= ? = \sum_{n=0}^{\infty} \left(V(S | N=n) + \underbrace{E^2[S | N=n]}_{(nE[X])^2} \right) \cdot P(N=n) =$$

$$V[Z] = E[Z^2] - E^2[Z]$$



$$E[Z^2] = V[Z] + E^2[Z]$$

erőlt

$$\Rightarrow \begin{array}{c} V(S | N=n) \\ // \\ V(X_1 + \dots + X_n | N=n) \\ // \\ V(X_1 + \dots + X_n) \\ // \\ n \cdot V[X]. \end{array}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot V[X] \cdot P(N=n) + E^2[X] \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n).$$

$$= V[X] \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) + E^2[X] \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n) =$$

$$= V[X] E[N] + E^2[X] E[N^2]. \quad \square$$

és az $E[S^2]$. Kell: $V[S] = ?$

$$\boxed{V[S]} = E[S^2] - E^2[S] = V[X] E[N] + E^2[X] E[N^2] - E^2[X] E^2[N]$$
$$= \boxed{V[X] E[N] + E^2[X] V[N]}.$$

$$\begin{aligned}
 M_S(t) &= E[e^{tS}] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E[e^{tS} | N=n]}_{\substack{\parallel \\ E[e^{t(X_1+\dots+X_n)} | N=n] \\ \parallel \\ E[e^{tX_1} \dots e^{tX_n}] \\ \parallel \\ E[e^{tX_1}] \dots E[e^{tX_n}] \\ \parallel \\ E[e^{tX}]} } \cdot P(N=n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} M_X^n(t) \cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \ln M_X(t)}{e} P(N=n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} M_N(\ln M_X(t)).
 \end{aligned}$$

$\left(\sum e^{nc} P(N=n) = E[e^{Nc}] = M_N(c) \right)$

$$\underline{K_S(t) = \ln M_N(\ln M_X(t)) = K_N(K_X(t))}$$

$$K_S(t) = K_N \circ K_X \quad \text{lesz.}$$

$$K'_S(t) = K'_N(K_X(t)) \cdot K'_X(t)$$

$$K'_S(0) = E(N) \cdot E(X) \quad \text{lesz.}$$

legyen Y összevett eloslasa.

$$Y = X_1 + \dots + X_N \quad X_1, X_2, \dots, X_N, N \text{ függetlenek.}$$

N eloslása az elsődologos eloslás.

X -ek eloslása a másodlagos eloslás.

Tfh:

$$N \sim \text{Poi}(\lambda)$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$Y: \text{Poi} - \text{Bin}$$