

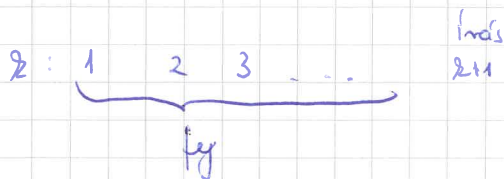
Geometria elosítás

fej: q írás: p

Hányszor dobunk fejet az első írás előtt?

Legyen ez N .

$$P(N=z) = q^z p$$

A negatív binomialis emel egy általánosítása.Hány fejet dobunk az r -edik írás előtt?

$$P(N=z) = \binom{z+r-1}{z} q^z p^r \quad \text{lesz emiatt.}$$

$\uparrow$
 z fej

 z db fej + r írás lesz. egye.
 $z+r-1$ db dobás lesz: z db fej
 $r-1$ db írás
másik mód: t.f.h. $X_1, \dots, X_r \sim \text{geom}(p)$

$$Y = X_1 + \dots + X_r \sim \text{NB}(r, p)$$

A kettő valójában ugyanaz.

Miért negatív binomialis? r itt egész. De az a rizikóval nem kell elmünk!Newton-féle binomialis tétel

$$(1+x)^d = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} x^n$$

ha $|x| < 1$ es tulajdonképpen
 emel a Taylor-sora
 0 körül. ①

$$\binom{d}{n} \quad n=0,1,2,\dots$$

$d \in \mathbb{R}$

$$\binom{d}{0} := 1$$

$$n > 0 \quad \binom{d}{n} = \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!}$$

Ha d egész (t.f.h $d=3$):

$$d(d-1)(d-2)(d-3) \dots$$

végig csak marad csak.

$d = \frac{1}{2}$ (nem egész) esetén egyáltalán sem lesz 0.

pl: mit kapunk?

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} \dots ?$$

$$(a+b)^d = a^d \left(1 + \frac{b}{a}\right)^d, \text{ így ez is benne van. Ennyi.}$$

$$Y = X_1 + \dots + X_n$$

fgln-ek:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) =$$

$$= (M_X(t))^n = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^n \text{ lesz.}$$

ha $t < \ln\left(\frac{1}{q}\right)$

$$E(X) = n E(X) = \frac{p}{q} n = \frac{np}{q}. \text{ így. Erre ennyi.}$$

Def: X $(a, b, 0)$ -eloszlású, ha

$$\underbrace{P(X=n)}_{P_n} = \left(a + \frac{b}{n}\right) \underbrace{P(X=n-1)}_{P_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

legyen P_0 adott. Többi p : rekurzíval!

$$P_0, P_1 = \left(a + \frac{b}{1}\right) P_0, P_2 = \left(a + \frac{b}{2}\right) P_1, \dots$$

ez nem rossz. Ezt nézzük.

T.f.h $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{P_{n-1}} &= \frac{\cancel{\lambda^n} e^{-\lambda}}{\cancel{\lambda^{n-1}} n!} \cdot \frac{(n-1)!}{\cancel{\lambda^{n-1}} e^{-\lambda}} = \\ &= \frac{\lambda^n}{\cancel{\lambda^{n-1}}} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \lambda \cdot \frac{1}{n} = \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \lambda. \end{aligned}$$

geometria is némi neg. Ha $X \sim \text{Geom}(p)$.

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = f_X(n) \cdot \frac{1}{f_X(n-1)} = p q^n \cdot \frac{1}{p q^{n-1}} = q \Rightarrow b=0 \\ a=q. \square$$

A binomiális jön most.

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\frac{f_X(n)}{f_X(n-1)} = \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\binom{n}{n} p^n q^0}{\binom{n}{n-1} p^{n-1} q^{n-(n-1)}} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{p}{q} \frac{\binom{n}{n} \Rightarrow 1}{\binom{n}{n-1}}$$

$$\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} =$$

n

NEH $\exists$ o!

$$\frac{f_X(z)}{f_X(z-1)} = \frac{\binom{n}{z} p^z q^{n-z}}{\binom{n}{z-1} p^{z-1} q^{n-z+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\frac{n!}{z!(n-z)!}}{\frac{n!}{(z-1)!(n-z+1)!}} =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{n-z+1}{z} = \left[-\frac{p}{q} + \frac{\frac{p}{q} n+1}{z} \right]$$

$(a + \frac{b}{z})$ - alak kell

$$a = -\frac{p}{q} \quad b = \frac{p(n+1)}{q}$$

a negatív binomiális hasonló, szagolni feladat.

Tétel: Ha $X \sim (a, b, 0) \Leftrightarrow X$ binom, neg. binom vagy Poi. eloszlás.

Nem bizonyítjuk.

$$\text{Ifh } N \sim (0, b, 0) \Rightarrow N \sim \text{Poi}(\underbrace{\quad}_{b} \text{ ???}).$$

Biz: P_0 addt.

$$P_1 = \frac{b}{1} P_0, \quad P_2 = \frac{b}{2} P_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{1} P_0 = \frac{b^2}{1 \cdot 2} P_0, \quad \dots$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{b^n}{n!} P_0 \text{ lesz.}$$

P_0 kicsoda? Kell: $1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} P_0$

$$\Rightarrow 1 = P_0 e^b$$
$$\Downarrow$$
$$P_0 = e^{-b}. \quad \square$$

így $P_n = \frac{b^n}{n!} e^{-b} \Rightarrow$ Poisson.

- o -

Tfh $X \sim (a, b, 0)$. $E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(a + \frac{b}{n}\right) P_{n-1} =$

$$P_n = P(X=n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) P_{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a P_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b P_{n-1} = b + \sum_{n=1}^{\infty} n a P_{n-1}$$
$$b \sum_{m=0}^{\infty} P_m$$
$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} P_m}_{1}$$

$m=n-1$

~~$\sum_{n=1}^{\infty}$~~

$$a \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) P_m$$

$$a \sum_{m=0}^{\infty} m P_m + a \sum_{m=0}^{\infty} P_m$$
$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} m P_m}_{E(X)} \quad \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} P_m}_a$$

Telát:

$$E(X) = a E(X) + a + b$$

$$E(X)(1-a) = a+b \Leftrightarrow$$

$$E(X) = \frac{a+b}{1-a}$$

- o -

$Y = aX + b$ legyen. Lintranszfam.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E\left[e^{t(aX+b)}\right] = E\left[e^{taX} \cdot e^{tb}\right] = \\ &= e^{tb} E\left[e^{taX}\right] = \\ &= e^{tb} M_X(ta) \quad \square \text{ ahogy:} \\ &= e^{tb} E\left[(e^t)^a\right] = e^{tb} M_X(ta). \end{aligned}$$

- o -

Tfh $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$ $i = 1, 2$. függetlenek.

$X_1 + X_2 \sim \text{Bin}$ lesz. ezt kell igazolni.

$$X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p) \quad Y = X_1 + X_2$$

$$X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p)$$

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = (pe^t + q)^{n_1} (pe^t + q)^{n_2} = \\ &= (pe^t + q)^{n_1+n_2} \Rightarrow Y \sim \text{Binom}(n_1+n_2, p). \end{aligned}$$

generátor függvény:

$$X: 0, 1, 2, \dots$$

$$P_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n p_n$$

Mit generál?

$$P_X^{(0)} = 1 \cdot P(X=0) = P_0 \text{ lesz.}$$

$$P_X^{(1)}(t) = P_1 + 2P_2 t + 3P_3 t^2 + \dots \text{ lesz.}$$

$$P_X^{(1)}(0) = P_1 \text{ lesz.}$$

$$P_X^{(2)}(t) = 2P_2 + 3P_3 t + \dots$$

$$P_X^{(2)}(0) = 2P_2 \text{ lesz}$$

általában: $\frac{P_X^{(n)}(0)}{n!} = P_n \text{ lesz igaz, ez látszik.}$

Tehát a valószínűségeket generálja ez a csúc.

Mi a generátor és a momentengenerátor-függvény kapcsolata!

$$\underline{\underline{P_X(t) = E[t^X] = E[(e^{tX})^X] = E[e^{tX \cdot X}] = \underline{\underline{\psi_X(t)}}.}}$$

$$M_X(t) = P_X(e^t) \text{ lesz.}$$