

2019.09.20.

1. Zonettáca

Nem - életbiztosítás

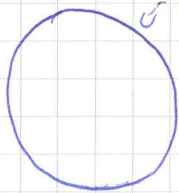
Szabó László in da house.

Feladatmegoldás írásbeli vizsga lesz.

Adott a tárgy "vicces" neve. Hagyományokból fakad.

Általános biztosításmatematika. Inkább, helyesen.

Nyomjuk.



↳ biztosításcsoport.

Mennyi lesz a zára belőle?

≡ Mennyit kell fizetnie?

Mindig ez a kérdés. Mennyi az összeg?

$S = ?$

↑ sum.

Két modell van.

egyesi kockázat  
modellje

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

$n$  ügyfél van.

Sok ügyfél  $\Rightarrow n$  nagy.

$$P(S = 100\,000\,000) = ? \quad \text{Ezt nehéz számolni.}$$

az összeg tag száma itt kisebb lesz.

kollektív kockázat  
modellje

$N$ : károk száma  
adott idő  
alatt.

$N$  is valószínű.

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

$X_i$ : az  $i$ -edik bejelentett kár.

$X_i$ :  $i$ -edik ügyfél kára. valószínű.

$N: 0, 1, 2, \dots$  lehet egész.

$X$ : folytonos nemnegatív valószínű.  $X: [0; \infty)$ .

Momentengenerátor - függvény

$E[X^n]$ :  $X$   $n$ -edik momentuma. Volt, egész.

$$M_X(t) = E[e^{tx}] : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

ami tuti:  $M_X(0) = 1$ . A többi már nem ilyen biztos..

Tfh  $\exists (a, b)$ ,  $0 \in (a, b)$ ,  $\forall t \in (a, b)$   $M_X(t) \exists$ .

Ezért: •  $M_X'(t) = E[X e^{tX}]$  lesz.

•  $M_X^{(2)}(t) = E[X^2 e^{tX}]$  lesz.

$\vdots$

akárhány-szer deriválható.

•  $M_X^{(n)}(t) = E[X^n e^{tX}]$  lesz.

és  $M_X^{(n)}(t=0) = E[X^n]$  épp az  $n$ -edik momentum.

Tény: Ha  $(\forall t \in (a, b)) (M_X(t) = M_Y(t))$ , akkor  $X$  és  $Y$  azonos eloszlású valószínűségi változók.

Tény: Ha  $X$  és  $Y$  függetlenek, akkor  $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$ .

Biz.:  $M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}] = E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}]$ . D

(Ha  $Z_1$  és  $Z_2$  fglk.  $\Rightarrow E[Z_1 Z_2] = E[Z_1] \cdot E[Z_2]$ )

és  $f(z_1)$  és  $g(z_2)$  is így viselkedik.

Tehát  $E[f(z_1)g(z_2)] = E[f(z_1)] \cdot E[g(z_2)]$

Jelölés:  $f_X(z) = P(X=z)$ , ez ismert.

Kétszám - eloszlások:

Megjegyzés:

0, 1, 2, ...

$$E[X] = \sum_{z=0}^{\infty} z P(X=z)$$

$$E[X^n] = \sum_{z=0}^{\infty} z^n P(X=z)$$

$$E[e^{tX}] = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{t^z}{z!} P(X=z) \quad \text{tiszta sor.}$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n (e^t p)^k q^{n-k} = (e^t p + q)^n \quad \square$$

$$E[X] = M'_X(0) = \left( (e^t p + q)^n \right)' = \cancel{e^t p}^n \quad \cancel{e^t p}^n$$

$$\left( (e^t p + q)^n \right)' = ?$$

$$(e^t p + q)^n = \cancel{\frac{n}{2} \frac{n-1}{2}}$$

es lsg nem egyszerű.

$$M'_X(t) = n (e^t p + q)^{n-1} \cdot e^t p$$

$$M'_X(0) = n (p + q)^{n-1} p = np \quad \square$$

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p} \quad \text{Mge.}$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} p q^k = p \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} q^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (q e^t)^k = p \frac{1}{1 - q e^t}$$

$$0 < q e^t < 1$$

NEH MINDIG KONVERGENS!

$$e^t < \frac{1}{q}$$

$$t < \ln(1/q)$$

full.

~~száma~~  
0

$$E[X] = ?$$

$$M'_X(t) = p (-1) \frac{1}{(1 - q e^t)^2} \cdot (-q) =$$

$$\frac{pq}{(1 - q e^t)^2}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{q}{p}$$



$$X \sim \text{Poi}(\lambda)$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{tk}} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = \underline{\underline{e^{\lambda(e^t - 1)}}} \end{aligned}$$

Tfh  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$  és  $Y \sim \text{Poi}(\mu)$  függetlenek.

$$X+Y \sim \text{Poi}(\lambda+\mu).$$

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) M_Y(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \cdot e^{\mu(e^t - 1)} = e^{\lambda(e^t - 1) + \mu(e^t - 1)} = \\ &= e^{(e^t - 1)(\lambda + \mu)} \Rightarrow X+Y \sim \text{Poi}(\lambda + \mu). \square \end{aligned}$$

$$E[X] = ?$$

$$M'_X(t) = \left( e^{\lambda(e^t - 1)} \right)' = e^{\lambda(e^t - 1)} \cdot \lambda e^t$$

$$M'_X(0) = \underbrace{e^{\lambda(1-1)}}_{e^0=1} \cdot \lambda \underbrace{e^0}_1 = \lambda \quad \square$$

$\parallel$   
 $E[X].$

utolsó példa.

Tfh  $X_1, X_2, X_3$  fgbln.

$$X_1 \sim \text{Poi}(2), \quad X_2 \sim \text{Poi}(3), \quad X_3 \sim \text{Poi}(5)$$

$$\cancel{P(X_1 + X_2 + X_3 = 6)} \quad P(X_1 + X_2 + X_3 = 6) = ?$$

Tehát a kérdés:  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 6) = ?$

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{Poi}(2+3+5=10)$$

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 6) = \frac{10^6 e^{-10}}{6!} = \underline{\underline{0,06305}}$$

