

$$X = [0, 1]$$

Legyen $(P(X), \cap, \cup, ^c, \emptyset, X)$.

$$A = \{H \subseteq [0, 1] \mid H \text{ szimmetrikus } \frac{1}{2}\text{-re.}\}$$

És látjuk, hogy $A \subseteq P(X)$

$$\emptyset, [0, 1] \in A$$

$$H \in A \Rightarrow H^c \in A$$

$$H_1, H_2 \in A \Rightarrow H_1 \cap H_2, H_1 \cup H_2 \in A$$

$$\Rightarrow (A, \cap, \cup, ^c, \emptyset, X)$$

Boole-algebra.

K : négyzetmentes szám (poz. egész, nincs négyzetszám-osztója).

példa: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ilyen

↑ egyik prím sem szerepelhet 1-nél magasabb hatványon.

K különböző prímek szorzata.

prímek, 2 prím szorzata, 3 prím szorzata, ... stb.

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ is ilyen

(a, b) : inkor

$[a, b]$: legkisebb közös többszöröse.

$$a' = \frac{K}{a}$$

$$\text{és } A = \{a \in \mathbb{N}^+ \mid a \mid K\}.$$

pl. $K = 30$ $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ lesz.

Állítás: $(A, \cap, \cup, ^c, 1, K)$ Boole-algebra.

és érdekesség, nem bizonyítjuk.

pl: $(a, b) = (b, a)$ kommutatív, világos.

ÉRDEKESÉG: $(a, a') = 1$ kell. pl. $(a \cap a' = 0)$

mat

$p_1, p_2, \dots, p_n$ - köl all a szám.

a	X	X		X					
	p_1	p_2	p_3	p_n	-	-	-	p_n	
a'			X					X	

X: benne van a felbontásban.

$K = p_1 \dots p_n$ és a, a' relatív prímek. ezért kell még
a definíciót, hogy K négyzetes.

$a + a' = 1 \Rightarrow$ itt $[a, a'] = K$ ugyancsak látható. $\square$

és egy példa vált, érdekeség.

Most jön egy „majdnem”-Boole-algebra.

$A = [0, 1]$ intervallum.

$$x + y = \max\{x, y\}$$

$$xy = \min\{x, y\}$$

$$x' = 1 - x$$

$0 = 0, 1 = 1$ legyen.

$(B1), (B1)', \dots, (B4), (B4)'$ axiómák teljesülnek (egyszerűen bizonyítható).

$(B5), (B5)'$ NEM teljesül. pl: $x = \frac{1}{3}, x' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ DE

$$x + x' = \frac{2}{3} \neq 1.$$

Készenlében $x x' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq 0$. Nem teljesül.

DE: $\max(1-x, 1-y) = 1 - \min(x, y)$ de-Morgan TELJESÜL

$$x' + y' = (xy)'$$

$$(x')' = x \text{ is. } \Rightarrow 1 - (1 - x) = x.$$

Egy csomó azonosság teljesül, de sajnos az ötödik axióma nem...

- o -

Az ítéletek Boole-algebrája:

$$p \wedge q, p \vee q, \neg p, \dots$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p, \quad \text{stb.}$$

$$p \wedge \neg p \equiv h \quad p \vee \neg p \equiv i \quad \text{ezeket is tudjuk.}$$

felölés: $\text{Form} :=$ az összes ítélet vagy formula halmaza.

Azonosítsuk az egymással ekvivalens ítéleteket !!! Ez kell.

Ekkor egy Boole-algebrát kapunk.

Formálisan $\equiv$ ekvivalenciareláció Form -on. (ez látszik).

Legyen A az összes ekvivalenciaosztályok halmaza.

$\alpha: [\alpha]$ az ekvivalenciaosztály α -nak.

$$[\alpha] = \{ \beta \in \text{Form} \mid \beta \equiv \alpha \}.$$

$$A = \{ [\alpha] : \alpha \in \text{Form} \}.$$

$$\text{Bátható, hogy } (\alpha_1 \equiv \alpha_2) \wedge (\beta_1 \equiv \beta_2) \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2 = \beta_1 \wedge \beta_2$$
$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \equiv \beta_1 \vee \beta_2$$
$$\neg \alpha_1 \equiv \neg \alpha_2.$$

Def: $[\alpha] \vee [\beta] = [\alpha \vee \beta].$

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta].$$

$$\neg [\alpha] = [\neg \alpha]. \quad \text{tautológiák}$$

Ekkor $(A, \wedge, \vee, \neg, [h], [i])$ Boole-algebra !!!

$\uparrow$
kontradikciók

Ez a Lindenbaum-Tarski-algebra.

Ennyit a formalitásról, inkább egyszerűsítünk.

$$\wedge \rightarrow \cdot \quad \equiv \rightarrow =$$

$$\vee \rightarrow + \quad i \rightarrow 1, h \rightarrow 0, \dots \text{ stb. jelgokkal élünk.}$$

Kiterjesztés: Leibniz álma — „számoljuk ki, hogy ki van igaza!”

utána jött George Boole, és részben megvalósította Leibniz álmat...

Itt még: Voltaine - Candidate Leibniz refigurálására indult.

„A világ, amiben élünk, a világok legjobbjika.” (Leibniz).

Számolunk.

tautológia:

$$p \vee \neg p \equiv 1.$$

$$p + p' = 1 \text{ most:}$$

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$ is tautológia.

$$x \rightarrow y \equiv \neg x \vee y$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) = p \rightarrow (q' + p) = p' + (q' + p) = \underbrace{p + p'}_1 + q' = 1.$$

ennyi.

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) = (p' + q) + (q' + p) = \underbrace{(p + p')}_1 + \underbrace{(q + q')}_1 = 1.$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q) &= p' + ((p' + q) \rightarrow q) = \\ &= p' + ((p' + q)' + q) = \\ &= p' + p q' + q = p' + q + p q' = p' + p + q = 1.0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x + x' y = x + y}$$

~~4.1.1. x~~

$$p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) = p' + (q' + pq) = \underbrace{p' + pq + q'}_{x + x'y = x + y} = p' + q + q' = 1.$$

Még 1:

$$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p = ((p' + q)' \rightarrow p)' + p =$$

$$= ((p' + q)' + p)' + p = (pq' + p)' + p = (pq')' p' + p =$$

$$= (p' + q) p' + p = p' (p' + q) + p = p + p' + q = 1. \square$$

vagy:

$$((p' + q)' + p)' + p = \underbrace{(pq' + p)}_p' + p = p' + p = 1. \square$$

$$p \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \quad \text{igazolható.}$$

$$p (q' + p) = p$$

↑ elnyelési azonosság.

