

Szabó Lászlóval folytatjuk a bicenizet.

Semmi egyéb új dolog nincs jelenleg.

Boole - algebra

$$(A; +, \cdot, ', 0, 1)$$

Prioritás: 1) $\cdot$, 2) $+$

$+$: kétváltozós művelet $\Rightarrow A$ -n értelmezve.

$'$: egyváltozós művelet (inverz / komplement)

$0, 1 \in A$. jelölés: $x \cdot y = xy$

Tulajdonságok: (axiómák)

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x (y z) = (x y) z$$

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

$$x + xy = x$$

$$x(x+y) = x \quad \text{elnyelési azonosság}$$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$x + yz = (x+y)(x+z)$$

$$x + x' = 1$$

$$xx' = 0$$

Huntington találta ezt ki. George Boole (1815-1864) tiszteletére hívják ki.

$+$ $\cong \cup$, $\cdot \cong \cap$ írható és X alaphalmaza van, $A \subseteq X$, $\bar{A} = X \setminus A$.

Ez az összes fenti axióma teljesülési fog.

$$A \cup B = B \cup A, \text{ stb, atd.}$$

Tehát: $(\mathcal{P}(X); \cup, \cap, ', \emptyset, X)$ Boole-algebra.

Speciális esetek: $X = \emptyset$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ 1-elemű Boole-algebra.

Ha $X = \{a\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\} = \{0, 1\}$ 2-elemű Boole-algebra.

Még: $(\{0, 1\}; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ is Boole-algebra.

Tétel: $x + x = x$ mely Boole-algebrában.

Biz.: ez az idempotencia.

$$x + x = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. ax.} \\ \text{jobb}}}{x} (x + y) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. ax.} \\ \text{bal.}}}{x} = x. \quad \square$$

Tétel: $x \cdot x = x$ (dualisan is igaz)

$$x \cdot x = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. ax.} \\ \text{bal.}}}{x} (x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. ax.} \\ \text{jobb}}}{x} y) = x. \quad \square$$

Tétel: $x + y = y \Rightarrow xy = x.$

Biz.: Tfh $x + y = y.$

$$xy = x(x + y)y = xyy = \dots$$

$$x + y = x(x + y) = x$$

$$xy = x. \quad \square$$

Tétel: $xy = x \Rightarrow x + y = y$

Biz.: ~~$xy = x \Rightarrow xy = x$~~ $xy = x(x + y)y = xy(x + y) = x(x + y) = x. \quad \square$

Vagy: $x + y = xy + y = y + yx = y. \quad \square$

Mi ez? $A \cap B = A, A \cup B = B, A \subseteq B.$ Tulajdonságok.

Def.: $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y \Leftrightarrow xy = x.$
 $\uparrow$
résbenrendezés

Állítás: Ez minden Boole-algebrán résbenrendezés.

(a) reflexív: $x \leq x \quad \forall x$

(b) antiszimmetrikus: $x \leq y$ és $y \leq x \Rightarrow x = y$

(c) transzitiv: $x \leq y$ és $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Feladat: igazolni szeretem!

Biz: (a) $x \leq x \Leftrightarrow x + x = x \Leftrightarrow x \cdot x = x$.

$$~~x + x = (x(x+y)) + x = (x+x) \cdot x~~$$

$$x + x = x \quad \square$$

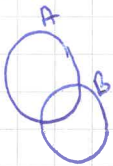
$$(b) \quad x + y = y \quad y + x = x$$

$$x + y = y + x \Rightarrow y = x. \quad \square$$

$$(c) \quad x + y = y \quad y + z = z \quad \text{Kell:} \quad x + z = z$$

$$\begin{aligned} y + z &= (x + y) + z = z \\ &\parallel \\ &= x + \underbrace{(y + z)}_z \quad \square \end{aligned}$$

Ennyi, beláttuk.



$$\sup\{A, B\} = A \cup B \quad \text{lesz igaz}$$

$$\text{itt:} \quad \sup\{x, y\} = x + y.$$

$$(a) \quad x \leq x + y \quad \wedge \quad y \leq x + y \quad \text{felső határ}$$

$$(b) \quad \cancel{x} \leq z \quad \wedge \quad y \leq z \Rightarrow x + y \leq z \quad \text{legkisebb felső határ.}$$

ezt is be kellene látni.

Biz.: (a)

$$x \leq x+y \Leftrightarrow x + (x+y) = x+y$$

$$y \leq x+y \Leftrightarrow y + (x+y) = x+y$$

$$x + (x+y) = (x+x) + y = x+y.$$

$$y + (x+y) = y + (y+x) = (y+y) + x = y+x = x+y. \quad \square$$

(b) $x \leq z \Leftrightarrow x+z = z$

$$y \leq z \Leftrightarrow y+z = z$$

$$x+z = \underbrace{x+y+z}_{=z} = z \Rightarrow x+y \leq z. \quad \square$$

Tovább: állítás:

$\inf \{x, y\} = xy$ Szorgalmként megmutatható ez is.

Így művelet: $x/y \equiv (xy)'$ Sheffer-művelet volt.

AXIÓMA: $((a|b)|c) | (a|((a|c)|a)) = c.$

Ez az axióma az összes többi magába foglalja. csak nehéz. 😞
Erdősésségként jött elő csak.

Def.: X egy tetszőleges alghalmaz. Egy X feletti HALMAZALGEBRÁN a következőket értjük: $B \subseteq P(X)$

(a) $\emptyset \in B, X \in B;$

(b) $A \in B \Rightarrow \bar{A} \in B;$

(c) $A, B \in B \Rightarrow A \cap B \in B \wedge A \cup B \in B.$

Állítás: Minden halmazalgebra Boole-algebra.
(4)

Speciális esetek:

eml: $A \cup B = (\overline{A \cap B})$

(1) $B_0 = \{\emptyset, X\}$ halmazalgebra.

(2) $B_1 = \mathcal{P}(X)$ halmazalgebra.

(3) $B = \{A \subseteq X \mid A \text{ véges vagy } \overline{A} \text{ véges}\}$

persze itt X végtelen halmaz, akkor érdekes csak.

Állítás: B halmazalgebra.

Biz:

(a) $\emptyset \in B$ mert $\emptyset$ véges

(b) $X \in B$ mert $\overline{X} = \emptyset$ véges.

(c) $A \in B \Rightarrow \overline{A} \in B$ a szimmetria miatt.

(d) $A, B \in B$

A véges, B véges; $\Rightarrow A \cap B$ véges $\Rightarrow A \cap B \in B$

A véges, $\overline{B}$ véges; $\Rightarrow A \cap B \stackrel{\subseteq A}{=} \overline{\overline{B}}$ véges $\Rightarrow A \cap B \in B$

$\overline{A}$ véges, B véges; $\Rightarrow A \cap B \subseteq B$ véges $\Rightarrow A \cap B \in B$

$\overline{A}$ véges, $\overline{B}$ véges $\Rightarrow A \cap B = \overline{\overline{A \cup B}}$
 $\underbrace{\overline{A \cup B}}_{\text{véges}} \Rightarrow \overline{A \cap B}$ véges

//

$A \cap B \in B.$

□

$(A_1; +, \cdot, ', 0, 1)$ és $(A_2; +, \cdot, ', 0, 1)$ két Boole-algebra.

És izomorf, ha $\exists f: A_1 \rightarrow A_2$ bijekció és

$f(x+y) = f(x) + f(y);$

$f(xy) = f(x)f(y);$

$f(x') = (f(x))'$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1.$

(5)

Stone-tétel (1936): Minden Boole-algebra izomorf egy halmazalgebrával.

Minden véges Boole-algebra izomorf egy $P(X)$ Boole-algebrával.

$\Rightarrow$ egy véges Boole-algebra elemszáma 2^n .