

2019. 11. 30.

3. konvult dicit

Egenvölklenségek

Igazolja, hogy n term, $p, q \geq 1$ tetsz. valós, és

$$\frac{(n-1)^2 pq + (n-1)(p+q) + 1}{n} \leq (n-1) pq + 1$$

Sorozat:

$$1, \underbrace{p, p, p, \dots, p}_{n-1}$$

legyen.

itt van.

$$1, \underbrace{q, q, \dots, q}_{n-1}$$

Hét skálázó sorozat:

$$1 + \underbrace{pq, pq, \dots, pq}_{n-1} = 1 + (n-1) pq$$

Cauchy? Csebisev?

Csebisev: számtani közép:

$$\frac{1 + (n-1)p}{n}$$

$$\frac{1 + (n-1)q}{1}$$

és $\frac{1 + (n-1)p}{n} \cdot \frac{1 + (n-1)q}{1} \leq \frac{1 + (n-1)pq}{n}$ lesz.

$$\frac{1 + (n-1)p + (n-1)q + (n-1)^2 pq}{n^2} \leq \frac{1 + (n-1)pq}{n} \quad \square$$

Ha $n > 1$ természetes, akkor $\frac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \sqrt{n^2-3^2} + \dots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n-2} \cdot \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{n-(n-1)} \cdot \sqrt{n+(n-1)} \quad \text{van}$$

és skalársorozatok.

$$\sqrt{n-1}, \sqrt{n-2}, \sqrt{n-3}, \dots, \sqrt{n-(n-1)} \quad \text{egyes}$$

$$\sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, \sqrt{n+3}, \dots, \sqrt{n+(n-1)} \quad \text{másik}$$

Ötlet: Cauchy!!

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \dots + \sqrt{n^2-(n-1)^2} &\leq \sqrt{\overbrace{n-1+n-2+\dots+1}^{n-n+1}} \cdot \sqrt{\overbrace{n+1+n+2+\dots+n+1}^{n-(n-1)}} \\
 &\parallel \\
 &\sqrt{(n-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot \sqrt{(n-1)n + \frac{(n-1)(n-2)}{2}} \\
 &\parallel \\
 &\sqrt{(n-1) \frac{2n-(n-2)}{2}} \sqrt{(n-1) \frac{2n+(n-2)}{2}} \\
 &\parallel \\
 &\sqrt{(n-1) \frac{n-2}{2}} \sqrt{(n-1) \frac{3n-2}{2}} \\
 &\parallel \\
 (n-1) \sqrt{\frac{n-2}{2} \frac{3n-2}{2}} &\leq n \sqrt{\frac{3n^2}{4}} \\
 &\parallel \\
 n^2 \frac{\sqrt{3}}{2} &\text{ az jó, 0 a feladat zírása SZAR.}
 \end{aligned}$$

— 6 —

$\operatorname{tg} x$ konvex ~~EG~~ est lehet be.

Szigorúan konvex $[0, \frac{\pi}{2})$ -n.

$0 \leq x_1 < x_2 < \pi$ legyen.

$$\operatorname{tg} \frac{x_1+x_2}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2}$$

ELI KELL BELÁTNI

$$\operatorname{tg} \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2} \quad \text{azt használjuk}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{x_2}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x_1}{2} \operatorname{tg} \frac{x_2}{2}} \leq \frac{\operatorname{tg} \frac{x_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x_1}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{x_2}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x_2}{2}} \quad \text{adódik}$$

legyen ~~teszt~~ $A = \lg \frac{x_1}{2}$, $B = \lg \frac{x_2}{2}$.

$$0 \leq A < 1$$

$$0 \leq B < 1$$

és $A < B$ azt tudjuk

$$\frac{A+B}{1-AB} \leq \frac{A}{1-A^2} + \frac{B}{1-B^2} \quad \text{azt kapjuk}$$

$$\parallel \frac{A - AB^2 + B - A^2B}{(1-A^2)(1-B^2)}$$

$$\parallel \frac{(A+B)(1-AB)}{(1-A^2)(1-B^2)}$$

$$(1-A^2)(1-B^2) \leq (1-AB)^2$$

Csebisewel:

$$(1-A)(1-B)(1+A)(1+B) \leq (1-AB)^2$$

$$1, A, B$$

$$1, -A, -B$$

} két sorozat

ELLENTÉTESÉN RENDEZETT

LEMMA: nem jö. megse

$$1 - A^2 - B^2 + A^2B^2 \leq 1 - 2AB + A^2B^2$$

$$A^2 + B^2 \geq 2AB$$

$$\sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}} \geq \sqrt{AB} \quad \text{Kapjuk} \checkmark$$

-o-

$$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \gamma \geq 3 \sqrt[n]{3^n}$$



hegyesszögű

$$\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

n természetes.

$$0 < \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma$$

n-edik közép:

$$\sqrt[n]{\frac{\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \gamma}{3}} \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{3} \geq \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

számtan

↑
 Jensen!
egyenlőtlenség

$$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \gamma \geq 3 \sqrt[n]{3^n} \quad \checkmark \quad \square$$

-o-

$$x^4 - 17 = y^4 - 7 = z^4 + 5 = t^4 + 19 = xyzt.$$

$$\left. \begin{aligned} x^4 - 17 &= xyzt \\ y^4 - 7 &= xyzt \\ z^4 + 5 &= xyzt \\ t^4 + 19 &= xyzt \end{aligned} \right\}$$



ez itt éppen nulla. összege

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 4xyzt$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}{4}} = \sqrt[4]{xyzt}$$



közép

geometria

$$|x| = |y| = |z| = |t| \quad \wedge \quad \text{és} \quad \text{illetmondás} \quad \text{Nincs H.o.}$$

④

- o -

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 60 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= 120 \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda, \beta, \gamma, \delta > 0$$

valami kell

trükk kell

$$\lambda \left(\frac{x}{\lambda} \right) + 2\beta \left(\frac{y}{\beta} \right) + 3\gamma \left(\frac{z}{\gamma} \right) + 4\delta \left(\frac{u}{\delta} \right) = 60$$

$$\lambda^2 \left(\frac{x}{\lambda} \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{y}{\beta} \right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{z}{\gamma} \right)^2 + \delta^2 \left(\frac{u}{\delta} \right)^2 = 120$$

$$\boxed{\lambda=1} \text{ jö}$$

$$2\beta = \beta^2 \Rightarrow \boxed{\beta=2}$$

$$\boxed{\gamma=3}$$

$$\boxed{\delta=4}$$

erősen a számok jók

szükség van ellenőrzés:

$$\frac{x + 4 \frac{y}{2} + 9 \frac{z}{3} + 16 \frac{u}{4}}{30} = 2 \quad \text{lesz}$$

$$\frac{x^2 + 4 \left(\frac{y}{2} \right)^2 + 9 \left(\frac{z}{3} \right)^2 + 16 \left(\frac{u}{4} \right)^2}{30} = \frac{2}{30} = k$$

a feltételt teljesíti megesszük

$$2 = \frac{x + 4 \frac{y}{2} + 9 \frac{z}{3} + 16 \frac{u}{4}}{30} \leq \frac{|x| + 4 \left| \frac{y}{2} \right| + 9 \left| \frac{z}{3} \right| + 16 \left| \frac{u}{4} \right|}{30} \leq k = 2$$

egyenlőség csak akkor, ha

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{u}{4} \quad \text{kell}$$

$$(x, 2x, 3x, 4x)$$

$$x + 4x + 9x + 16x = 60 \quad \textcircled{5}$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{y=4}$$

$$\boxed{z=6}$$

$$\boxed{u=8}$$

- o -

$$a^n + b^n \leq \left(b + \frac{a^n}{n b^{n-1}} \right)^n, \quad a, b > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

igazoljuk.

jobb oldal:

$$\left(b + \frac{a^n}{n b^{n-1}} \right)^n = b^n \left(1 + \frac{a^n}{n b^n} \right)^n = b^n + a^n. \quad \square$$

Bernoulli: $(1+x)^n = 1 + nx$

- o -

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

$$G_{n-1} = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

Bizonyítás:

$$n G_n - (n-1) G_{n-1} \leq a_n$$

$$n \frac{G_n}{G_{n-1}} - (n-1) \leq \frac{a_n}{G_{n-1}}$$

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{a_n}{(a_1 \dots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{a_n}{G_{n-1}}$$

$$\frac{n}{n-1} - 1 = \frac{n - n + 1}{n-1}$$

$$n \frac{G_n}{G_{n-1}} - (n-1) \leq \left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n$$

$$n \left(\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1 \right) + 1 \leq \left(\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1 \right) + 1 \right)^n \quad \square$$

BERNOULLI

- 0 -

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt{3} \quad \text{ha } x, y, z > 0 \text{ és } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt{3} \quad \text{van. ez tuti.}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

↑ harmonikus közép.

a négyzetes középvel hasonlítható

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \square$$

- 0 - Ábrahám György: Nevezetes egyenlőségek

