

2015. 10. 18.

1. konzultáció

Egyszerűsítő feladatok

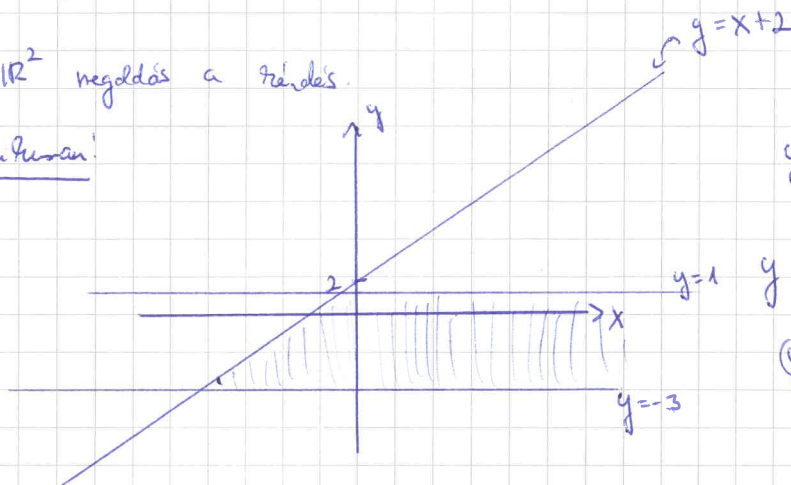
Tegjék főszef csapatja.

Tablaviszga: elmélet + gyakorlat. Ennyi.

$$\left. \begin{array}{l} y - x < 2 \\ y^2 + 2y \leq 5 \end{array} \right\} \text{vizsgáljuk meg!}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ megoldás a rendszer.

Grafikusan!



$y = x + 2$ egyenes

$$y(y + 2) \leq 5$$

$$(y + 1)^2 \leq 4 \text{ lesz.}$$

Teljes négyzet.

így néz ki grafikusan meggy.

$$|y + 1| \leq 2$$

$$-2 \leq y + 1 \leq 2$$

$$\underline{y = 1}$$

$$\underline{y = -3}$$

Számítási - névtelen feladat (Zárótti összehasonlítás)

$$x_1, x_2 > 0$$

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ lesz igaz.}$$

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} \text{ lesz.}$$

$$4x_1 x_2 \leq x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$

$$0 \leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2. \quad \square$$

További:

← négyzetes közép

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

$$\frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

①

egyenlőség: csak akkor, ha $x_1 = x_2$. geom. közép

Harmonikus közép:

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}}$$

viSSzaerethető.

Hatványközep:

$$3 \sqrt{\frac{x_1^3 + x_2^3}{2}}, \quad 4 \sqrt{\frac{x_1^4 + x_2^4}{2}}, \quad \dots, \quad n \sqrt{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}$$

adható.

$x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ z -adik közép: ($z \in \mathbb{R}, z \neq 0$).

$$S_z(x) = \sqrt[z]{\frac{x_1^z + x_2^z + \dots + x_n^z}{n}}$$

z -adik hatványközep.

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor legyen.

Ha $z = -1$:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad \text{harmonikus közép lesz}$$

$$G(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$\uparrow$
 $\underline{x}$ geom. közep.

$$\text{Feltevéssel } S_{-1}(x) \leq G(x) \leq S_1(x) \leq S_2(x) \leq S_3(x) \dots$$

igaz-e?

Ezt kellene igazolni.

Legyen $n=4$.

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} = \frac{\frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_3 + X_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{X_1 + X_2}{2} \cdot \frac{X_3 + X_4}{2}}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{X_1 X_2} \sqrt{X_3 X_4}} = \sqrt[4]{X_1 X_2 X_3 X_4}$$

Ha tudjuk, hogy ~~$S_{2^k}(x) \leq S_{2^{k+1}}(x)$~~ ~~$G_{2^k}(x) \leq G_{2^{k+1}}(x)$~~

$$G_{2^2}(x) \leq S_{2^2}(x) \quad \forall 2 \leq n$$

$$\Rightarrow G_{2^{n+1}}(x) \leq S_{2^{n+1}}(x)$$

~~$x_1, x_2, \dots$~~

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2^n} + X_{2^{n+1}} + \dots + X_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2^n}}{2^n} + \frac{X_{2^{n+1}} + X_{2^{n+2}} + \dots + X_{2^{n+1}}}{2^n}$$

$$\sqrt{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{2^n}}{2^n} \cdot \frac{X_{2^{n+1}} + \dots + X_{2^{n+1}}}{2^n}}$$

$$\sqrt[2^n]{X_1 X_2 \dots X_{2^n}} \sqrt[2^n]{X_{2^{n+1}} \dots X_{2^{n+1}}} = G_{2^{n+1}}(x).$$

~~Da $G_2(x) \leq S_2(x) \Rightarrow G_{2-1}(x) \leq S_{2-1}(x)$~~

Da $G_2(x) \leq S_2(x) \Rightarrow G_{2-1}(x) \leq S_{2-1}(x)$.

~~$G_2(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2-1}}{2-1}$~~

$$S = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2-1}}{2-1} \quad \text{geg.}$$

$$S = \frac{2S}{2} = \frac{(2-1)S + S}{2} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2-1} + S}{2} \quad \text{es}$$

$$S \geq \sqrt[2]{x_1 x_2 \dots x_{2-1} \cdot S} = (x_1 x_2 \dots x_{2-1})^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}$$

$$S^{1-\frac{1}{2}} \geq (x_1 x_2 \dots x_{2-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$S^{\frac{2-1}{2}} \geq (x_1 x_2 \dots x_{2-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$S \geq (x_1 x_2 \dots x_{2-1})^{\frac{1}{2-1}} = G_{2-1}(x). \quad \square$$

$x_1, x_2, x_2, x_2, x_3, x_3$ addit.

$$\frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3}{6}$$

Terintsatz:

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}$$

selbst

$$P_n(x) = \frac{p_1 x_1^n + p_2 x_2^n + \dots + p_k x_k^n}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} \quad (1)$$

$n > 0$ rationalis

$p_1, p_2, \dots > 0$

és még: $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

és p és x is $\in \mathbb{R}$.

geom. közép.

$$\frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3}{6} \geq \sqrt[6]{x_1 x_2^3 x_3^2} = (x_1 x_2^3 x_3^2)^{1/6}$$

$$\text{Ez: } \sqrt[p_1 p_2 \dots p_n]{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}} = G(x).$$

Tehát: egész p -re triviális.

Racionális p -re: $p = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a_1}{b} x_1 + \frac{a_2}{b} x_2 + \dots + \frac{a_n}{b} x_n}{\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \dots + \frac{a_n}{b}} &\geq \left(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}} \\ &= \left(x_1^{\frac{a_1}{b}} x_2^{\frac{a_2}{b}} \dots x_n^{\frac{a_n}{b}} \right)^{\frac{b}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}} \end{aligned}$$

$$\bar{H}_N^l(x) = \frac{p_1^l x_1 + p_2^l x_2 + \dots + p_n^l x_n}{p_1^l + p_2^l + \dots + p_n^l}$$

$$p_j^l \rightarrow p_j \quad l \rightarrow \infty$$

p_j^l racionális számok.

írac. számokat közelítünk racionális számokkal

$$\begin{aligned} \frac{p_1^l x_1 + p_2^l x_2 + \dots + p_n^l x_n}{p_1^l + p_2^l + \dots + p_n^l} &\geq \sqrt[p_1^l + p_2^l + \dots + p_n^l]{x_1^{p_1^l} x_2^{p_2^l} \dots x_n^{p_n^l}} \\ &\downarrow \\ G(x). \end{aligned}$$

példák jönnek.

Tétel: $x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$

Biz: $\sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$ tudjuk.

$$\frac{1}{\sqrt{xz}} = \sqrt{\frac{1}{x} \frac{1}{z}} \leq \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{yz}} = \sqrt{\frac{1}{y} \frac{1}{z}} \leq \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{1}{x} \frac{1}{y}} \leq \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}$$

A három egyenletet összeadva éppen azt kapjuk D

Legyen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^n \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos^n \alpha}\right) \geq \left(1 + 2^{\frac{n}{2}}\right)^2$$

$$1 + \frac{1}{\cos^n \alpha} + \frac{1}{\sin^n \alpha} + \frac{1}{\sin^n \alpha \cos^n \alpha} \geq \left(1 + 2^{\frac{n}{2}}\right)^2$$

$$1 + \frac{\sin^n \alpha + \cos^n \alpha}{\cos^n \alpha \sin^n \alpha} + \frac{1}{\sin^n \alpha \cos^n \alpha} \geq 1 + \frac{2}{\sin^{\frac{n}{2}} \alpha \cos^{\frac{n}{2}} \alpha} + \left(\frac{1}{\sin^{\frac{n}{2}} \alpha \cos^{\frac{n}{2}} \alpha}\right)^2$$

$$2 \sqrt{\sin^n \alpha \cos^n \alpha} \geq \left(1 + \frac{1}{\sin^{\frac{n}{2}} \alpha \cos^{\frac{n}{2}} \alpha}\right)^2$$

$$\sin^{\frac{n}{2}} \alpha \cos^{\frac{n}{2}} \alpha = \left(\sqrt{\sin^{\frac{n}{2}} \alpha \cos^{\frac{n}{2}} \alpha}\right)^2 \leq \left(\frac{\sin^{\frac{n}{2}} \alpha + \cos^{\frac{n}{2}} \alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}$$

újabb példa

$$2x^3 = x^4 + \frac{27}{16}$$

racionális gyök? $x = \frac{p}{q}$ $\text{lnko}(p, q) = 1$.

$$32 q p^3 - 16 p^4 = 27 q^4$$

$q \mid 16$, mert a baloldal osztható q -val

($\pm$) 1, 2, 4, 8, 16 lehet a q .

$p \mid 27$ mert.

$p = (\pm) 1, 3, 9, 27$ 80 lehetőség, ellenőrizhető.

$p^3 \mid 27$, ezt is tudjuk

p csak ($\pm$) 3 lehet.

$q^4 \mid 16 \Rightarrow q$ csak ± 2 lehet.

$\left(\frac{3}{2}\right)$ és $-\frac{3}{2}$ lehet csak.

megoldás így is megoldható.

Közvetlenül:

$$2x^3 - x^4 = \frac{27}{16}$$

$$x^3(2-x) = \frac{27}{16}$$

$$x \cdot x \cdot x (2-x) = \frac{27}{16}$$

$$x^3(2-x) = \frac{27}{16}$$

$$x^3(2-x) \leq \left(\frac{3x + (2-x)}{4}\right)^4$$

(7.) ha: $x < 2$ lehet csak

ez így még nem az igazi...

$$\left(\frac{x}{3}\right)^3 (2-x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^3 (2-x) \leq \left(\frac{3 \cdot \frac{x}{3} + (2-x)}{4}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{x}{3} = 2-x \quad \text{ezen lehet csúsz} =$$

$$x = 6 - 3x$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Súlyozott közép:

$$H_2(x) = \left(\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

$q_1, q_2, \dots, q_n$
összege 1.

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \frac{1}{p_1 + \dots + p_n} = \begin{matrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{(n+1)S}{n+1} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + S}{n+1} = \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + S + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + S}{n+1}}{n+2} \dots \end{aligned}$$

egyszerű indukciós eljárással

$$\min(x) \leq H_2(x) \leq \max(x)$$

$$\text{Ha } p_i > 0, \text{ akkor } G(x) \leq H_2(x).$$

$$G(x) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} \quad \text{geom. közép}$$

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} = \left[(x_1^2)^{q_1} (x_2^2)^{q_2} \dots (x_n^2)^{q_n} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2}{1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

legyen $z = -\ell$ $\ell > 0$.

$$G(x) = \left[\left(\frac{1}{x_1^\ell} \right)^{q_1} \left(\frac{1}{x_2^\ell} \right)^{q_2} \dots \left(\frac{1}{x_n^\ell} \right)^{q_n} \right]^\ell \geq \left(q_1 \frac{1}{x_1^\ell} + \dots + q_n \frac{1}{x_n^\ell} \right)^\ell$$

$$= (q_1 x_1^z + \dots + q_n x_n^z)^z = H_z(x)$$

pelda - jön

$$m x^n + n x^{-m} \geq m+n \quad x, m, n > 0 \text{ valós}$$

$$\frac{m}{m+n} x^n + \frac{n}{m+n} x^{-m} \geq x^n \frac{m}{m+n} x^{-m} \frac{n}{m+n} = x^0 = 1.$$

$$\frac{m x^n + n x^{-m}}{m+n}$$

Állítás:

$$H_z(x) = \left(\frac{p_1 x_1^z + p_2 x_2^z + \dots + p_n x_n^z}{p_1 + \dots + p_n} \right)^{\frac{1}{z}} \leq H_2(x)$$

$$0 < z < 2$$

$$H_z(x) = (p_1 x_1^z)^{\frac{z}{2}} p_1^{1-\frac{z}{2}} + (p_2 x_2^z)^{\frac{z}{2}} p_2^{1-\frac{z}{2}} \dots$$

q legyen

$$H_z(x) = \left[\underbrace{(q_1 x_1^z)^{\frac{z}{2}}}_{q_1} + \underbrace{(q_2 x_2^z)^{\frac{z}{2}}}_{q_2} + \dots + \underbrace{(q_n x_n^z)^{\frac{z}{2}}}_{q_n} \right]^{\frac{1}{z}}$$

$$\leq \left[\frac{2}{2} q_1 x_1^2 + (1 - \frac{2}{2}) q_1 + \frac{2}{2} q_2 x_2^2 + (1 - \frac{2}{2}) q_2 + \dots + \frac{2}{2} q_n x_n^2 + (1 - \frac{2}{2}) q_n \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{2}{2} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2) + (1 - \frac{2}{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Nun jö.:

$$H_2(x) = (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq \underbrace{(q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2)^{\frac{1}{2}}}_A$$

$$\leq A^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{H_2(x)}{A^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left[(q_1 x_1^2)^{\frac{2}{2}} q_1^{(1-\frac{2}{2})} + \dots + (q_n x_n^2)^{\frac{2}{2}} q_n^{(1-\frac{2}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}}$$

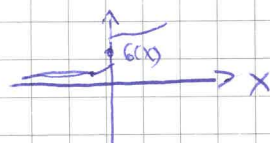
$$= \left[\left(q_1 \frac{x_1^2}{A} \right)^{\frac{2}{2}} q_1^{(1-\frac{2}{2})} + \dots + \left(q_n \frac{x_n^2}{A} \right)^{\frac{2}{2}} q_n^{(1-\frac{2}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\frac{2}{2} \frac{q_1 x_1^2}{A} + (1 - \frac{2}{2}) q_1 + \dots + \frac{2}{2} \left(\frac{q_n x_n^2}{A} \right) + (1 - \frac{2}{2}) q_n \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{2}{2} \frac{q_1 x_1^2 + \dots + q_n x_n^2}{A} + (1 - \frac{2}{2}) (q_1 + \dots + q_n) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{2}{2} + (1 - \frac{2}{2}) \right]^{\frac{1}{2}} = 1.$$

$H_2(x)$ a 2 függvényben feltehető, monoton nö. C-ban
hússzen elhelyezve.



Rendezési tétel:

(1, 2, 3)

vektor.

$\boxed{14}$

skaláris

1 3 2

13

sorozat

2 1 3

13

3 1 2

11

2 3 1

11

3 2 1

$\boxed{10}$

legyen

$a_1, a_2, \dots, a_n$

azonosan rendezett, ha

$b_1, b_2, \dots, b_n$

$$a_i < a_j \Rightarrow b_i < b_j.$$

ellentétesen rendezett, ha

$$a_i < a_j \Rightarrow b_i > b_j.$$

pl: (1, 3, 2) és (4, 6, 5) azonosan rendezett

azonosan rendezett: maximális a sorok

ellentétesen rendezett: min a sorok

~~$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$~~

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

az

$$p_1 = b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_n$$

$$p_2 = b_1, \dots, b_{i-1}, b_j, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, b_i, b_{j+1}, \dots, b_n$$

$$\begin{aligned}
 (a, p_1) - (a, p_2) &= a_i b_i - a_i b_j - (a_j b_j - a_j b_i) = \\
 &= a_i (b_i - b_j) - a_j (b_j - b_i) = \\
 &= (a_i + a_j) (b_i - b_j)
 \end{aligned}$$

innen látszik már a rendezési tétel.

Mire lehet használni?

Biz: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{z}}}_{\text{önmagával vett szed. szed.}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{z}}}_{\text{másokhoz rendezett szed. szed.}}$$

A rendezési tétel miatt azonnal látni

$$(x, y, z) \subset (y, z, x).$$

Példa

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{a+b+c}$$

~~$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{a+b+c} = \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^a$$~~

$$\frac{3}{a+b+c} \leq \frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{\frac{1}{a+b+c}}}$$

számtani közép

$$\begin{aligned}
 \frac{1+1+1}{a+b+c} &= \frac{a}{(a+b+c)a} + \frac{b}{(a+b+c)b} + \frac{c}{(a+b+c)c} \leq \\
 &\leq \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{a}{a+b+c}} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{b}{a+b+c}} \left(\frac{1}{c} \right)^{\frac{c}{a+b+c}} \quad (12)
 \end{aligned}$$