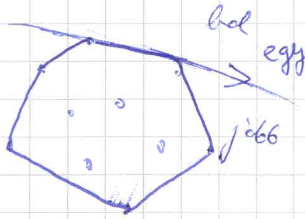
Konvexitás fogalma kell.

síkon maradunk.

Van véges sok pont. Kell: ezek konvex burka.



egyenes: két nyílt részhalmazra vágja a síkot.

jobb egyenes két féle irányítással lép.

jobb/bal félsíkot vannak.

Konvex: öt tartalmazó félsíkok halmaza.

↑ ucsu.

$P \notin K$

$\exists$ szeparációs egyenes, ami P-t és K-t szeparálja

K konvex

kompakt C de elég, ha csak zárt.)

Példa.

KÖR.

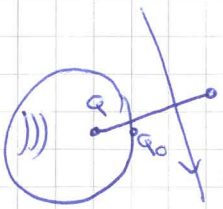
nyílt-zárt körlap konvex

$S \subset S'$

D^2 - nyílt körlap

$S \cup D^2$ is konvex marad.

a szeparációs tétel itt is igaz $\Rightarrow$ a zárt körlap érintőjét lesz



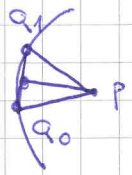
$d(P, Q)$

és $\min d(P, Q)$

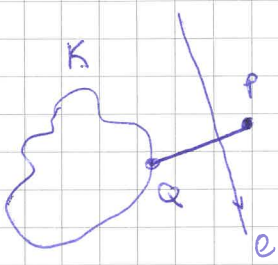
↑ Q függvényében.

$\min d(P, Q) = Q_0$. lehet több is.

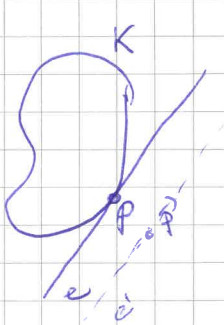
$Q_0 \in \min d(P, Q)$.



ezért $\min d(P,Q) \in \exists Q_0$ egyértelmű.



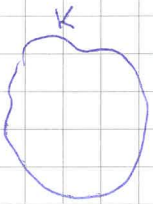
szeparálja a pontot és a konvex hélmaszt



$P \notin \operatorname{int} K$

$P \in e$, $e \cap \operatorname{int} K = \emptyset$

P'-ről bizonyítunk.



Π_K: metrikus projekció.

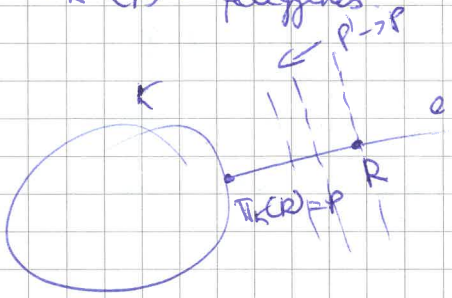
$\Pi_K : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \partial K$

$R \mapsto Q(R)$ úgy, hogy

$PQ(R)$ minimális.

JÓL DEFINIÁLT LEKÉPEZÉS EZ.

Ha $P \in \partial K$, $\Pi_K^{-1}(P)$ - félegyenes



ez a félegyenes lesz az inverz

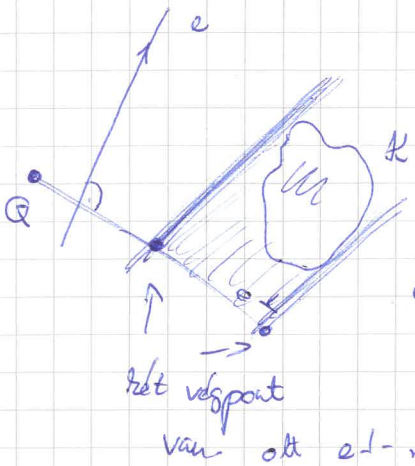
A P' esen a félegyenesen választható.

P'-re jön a egyenes párhuzamosak

Ha $P' \to P$, akkor esen egyenesnek lesz egy határhelyzete.

Ez a határhelyzet: TÁMASZEGYENES. Így megfogható.

Van más módszer.



vagy félegyenes, ha K nem kompakt (határa)

merőlegest húzok.

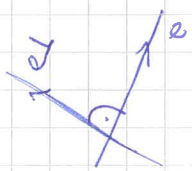
ebben a sávban benne van a konvex halmaz

Véges sok pont van a síkon. Adjunk adott irányú támaszegyenest!

legyen $e = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ irányvektora.

$P + t\,(\cos\varphi, \sin t)$

$e^\perp$ irányvektora: $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$ lesz. derivált.



Ponthalmaz: $P_1, \ldots, P_n$

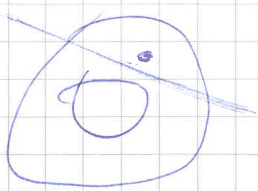
$\langle e^\perp, P_1 \rangle, \ldots, \langle e^\perp, P_n \rangle$ belső szorzat kell.

maximuma kell ezeknek.

ezt a P-t helyettesítjük be $P + t\,(\cos\varphi, \sin\varphi)$-be és kész.

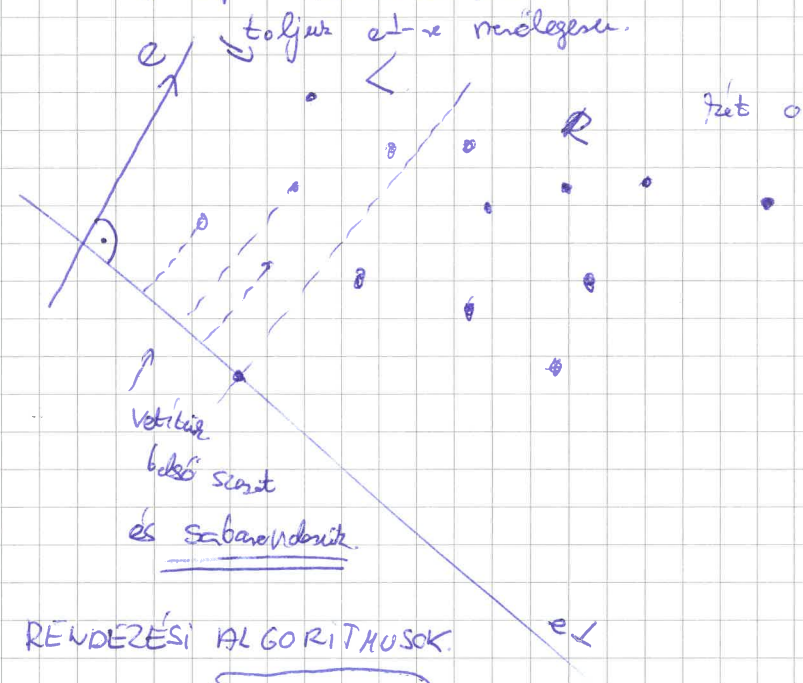
Lényeges egyenes ha K-t szakaszban metszi. (ez pl. a típusú két csúcsnál így lehúzzuk.

Konvex sokszög: zárt felsíkok metszete.



Szitárintés. Intervallum - aritmetika.

Véges ponthalmas sepresse.



Két oldalra osztja a halmazt.

b bittel reprezentált számok vannak

$O(b \cdot n)$

↑ lineáris időben is lehet rendezni.

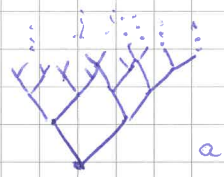
RENDEZÉSI ALGORITHUSOK.

$O(n \log n)$ van.

ez a legjobb, ha csak összehasonlítás lehetséges.

Hajnal Péter

Algoritmikus geometria.



DÖNTÉSI FA.

a fa mélysége: $\log_2 n! \approx n \cdot \log n$

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\log n! \sim n \log n$

Naiv algoritmus: find(A, k) elem.

↑ halmaz

pivot = random elem.

(L, R) = split(A, pivot)

k = |L| + 1 return pivot

k < |L| return find(L, k)

k > |L| + 1 return find(R, k - |L| - 1).

$O(n \log n)$-ben véges.

Adható jobb? Adható $O(\log n)$-es is, ami amúgy nehéz.

medián.

$(A_1, \ldots, A_5)$; $(A_6, \ldots, A_{10})$; ...

esen csoportokra <u>konstans időben</u> adható medián.

$\Rightarrow$ végül vesszük esen csoport medián-át. □

REKURZÍVAN.

így választjuk meg a pivotot, és az előző algoritmust alkalmazzuk.

5 ös csoportokra osztás: $O(n)$

5 ös csoport mediánja: $O(n)$

$T(n)$: futási idő

pivot meghatározása: $T(\frac{n}{5})$

split : $O(n)$

$k = \lvert L \rvert + 1$	$O(1)$	csak az egyiket hajtjuk végre
$k < \lvert L \rvert$	$T(k)$	
$k > \lvert L \rvert + 1$	$T(n-k)$	

$\max(T(k), T(n-k))$.

$$T(n) = T(\tfrac{n}{5}) + T(\max(k, n-k)) + O(n)$$

$$T(n) \leq T(\tfrac{n}{5}) + T(\tfrac{7}{10}n) \overset{(+6)}{} + O(n) \text{ lesz.}$$

Áll: $T(n) \leq c \cdot n$.

$$c \cdot n \leq c \cdot \frac{n}{5} + c \frac{7}{10} n + c \cdot 6 + d \cdot n = cn - \left(\frac{cn}{10} - 7cn - 2n\right) \text{ ⑤}.$$

Vagy valami ilyesmi...

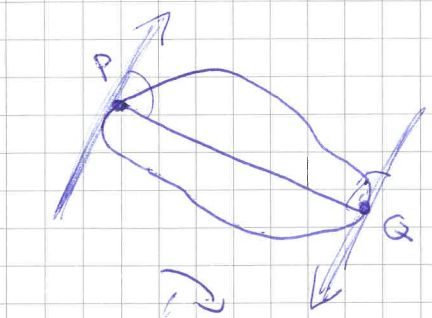
Konvex halmaz átmérője, szélessége

$K \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \operatorname{diam} K = \max_{P,Q \in K} d(P, Q)$. így definiáljuk.

K kompakt. nem egyértelmű (lásd: KÖR)

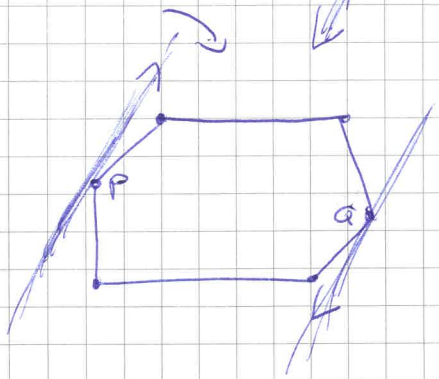
Észrevétel: $\operatorname{diam} K = \operatorname{diam}(\operatorname{conv} K)$

konvex burok átmérője

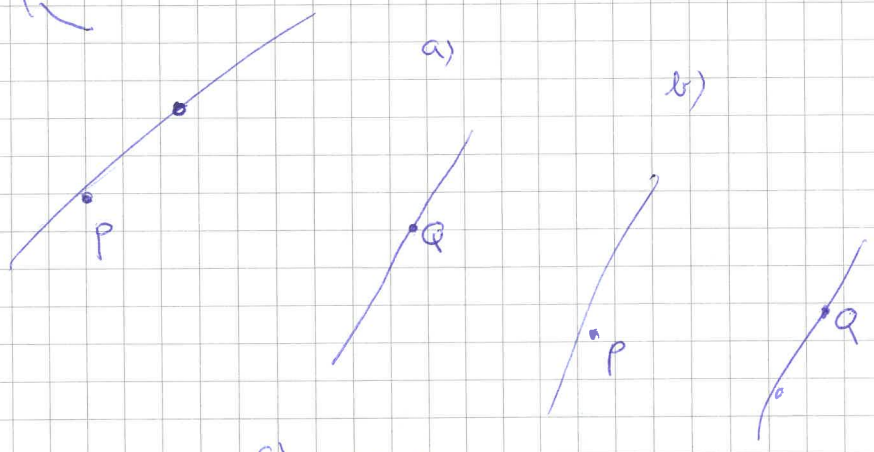


a sávon belül van

nem egyenes NEM LÉNYEGI TÁMASZEGYENES.

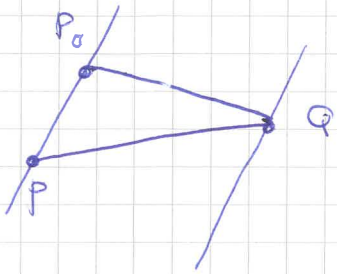


forgatjuk úgy, hogy
megőrizzük a párhuzamosságot



c) egyenes.

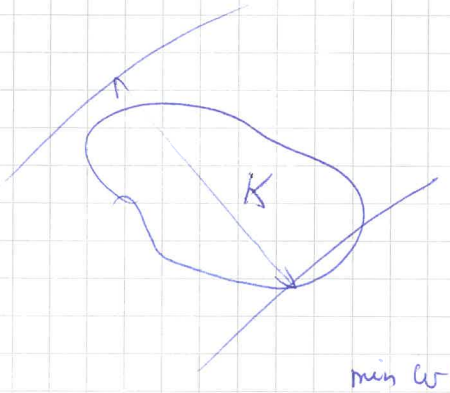
a)



valamelyik C legalább az egyik) maximum.

Minden esetben (a), b) és c)) maximum.

Konvex sokszög csúcsai hogyan követik egymás után. Ez síkra adott forgatásra. Tulajdonképpen ennyi $O(n)$ algoritmus.

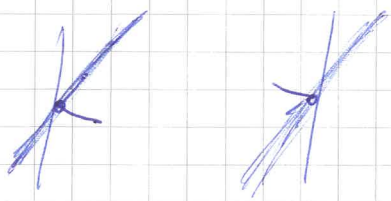


2 || támaszegyenes

esen egyenesek távolsága.

$\min_{\omega} w(K, \omega) = w(K)$ – szélesség

Legalább az egyik lényegi?



forgassuk el

az elforgatottak távolsága

nőjön.

Ez baj.

Igen, az egyik legalább lényegi egyenes.

Az egyik biztosan az.

Szélesség meghatározása: $\sigma(n)$
↑ csúcspontok száma.

Itt tárolni kell.

Logaritmus tár és lineáris idő. Ennyi.

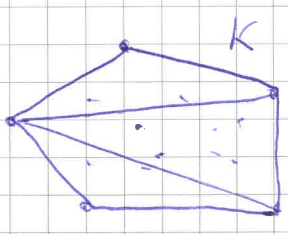
Síkon véges ponthalmaz konvex burka:

mohó primitív algoritmusokat. Lehet adni

$\text{conv}\, K = \bigcup_{P,Q,R \in K} \text{conv}(P,Q,R)$ CARATHEODORY TÉTEL ez.

~~Ha $S \in K$ akkor~~ $S \in \text{conv}(K) \Rightarrow \exists\, P,Q,R \in K$ $S \in PQR$ Δ.

Bizonyítsuk be véges sok pontra.



Véges sok félsík metszete

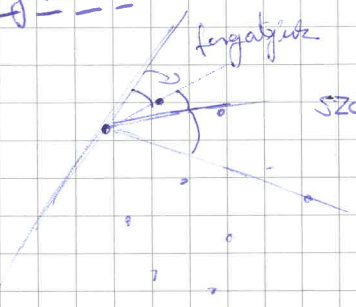
Ha $P \in K \Rightarrow P \in$ valamely részháromszög.

Naiv: összes Δ uniója

a burok oldalai NEM három oldalú háromszöget adnak

$\sigma(n^3)$ algoritmus ez.

Jarvis - algoritmus



szögeket nézzük

n db pont van a burkon.

kiválasztjuk a legfelsőbbet, ahol tesszük az egyenest. Aztán is kiválasztjuk a legfelsőbbet... h lépésben végzünk ↑ határpontok száma $\Rightarrow \quad O(ch - h)$

h szögét számoljuk ki $\forall$ lépésben vmax

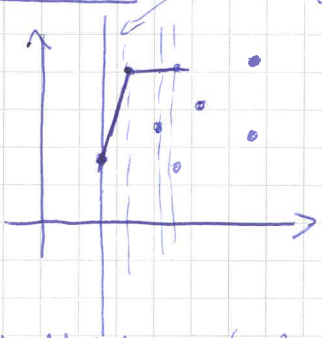
javítható $O(n \cdot \log h)$ - ra, de bonyolultabb.

És is ilyen sópapír algoritmus $\Rightarrow$ 1D-re butítjuk a 2D-t.

Ami fasza.

Graham scan

támaszegyenes



X - koordinátákat itt sorbarakjuk.

$O(n)$ - re kapunk egy általános elrendezésű cuccot

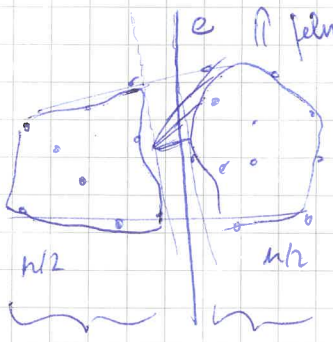
Vesszük a vetületeket (már különbözők) és sorbarendezzük őket

$\Rightarrow O(n \log n)$ vesszük a körülöttük $\Rightarrow$ összhyp

konvexitás sértése esetén a felesleges pontot kidobjuk

$\boxed{O(n \log n)}$ a kezdeti rendezés miatt a futási idő.

Kirpatric - Seidel - algoritmus



e $\Uparrow$ felmászik $O(n)$ lépésben két részre osztjuk

majd a teljes konvex burok jön

- felsőt/alsót balra jobbra
- a belsőket kidobjuk

kicsi-kicsi megoldjuk vajon a feladatot

e - vel párhuzamos egyenesz melyek támaszthják a két konvex burkot

futási idő: $l(n) = 2\,l(n/2) + \Theta(n)$ kell.

$$\boxed{l(n) = \Theta(n \log n)}$$

ennyi.

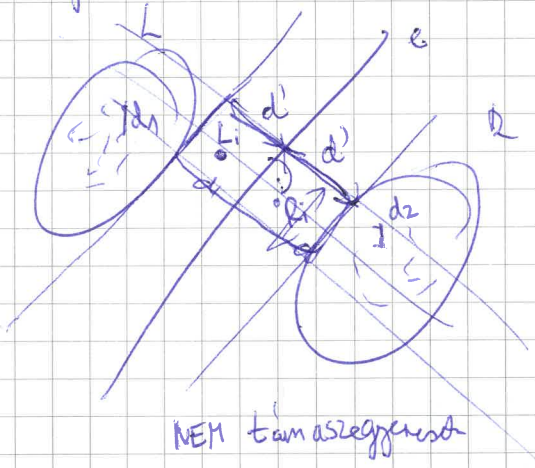
Ponthalmazon belüli minimális távolság

$P_1, \ldots, P_n$. Mi a minimális $d(P_i, P_j)$?

$\Theta(n^2)$ adható. All. $\Theta(n)$ is adható.

Hogyan? Oszd meg és uralkodj!

Felosztjuk a halmazt 2 részre.



NEM támaszegyenes

a két részre megoldjuk.

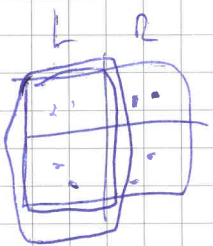
$d' = \min\{d_1, d_2\}$

Ha ez a sáv tartalmaz pontokat akkor van 6 ep.

Máshogy tartalmazhat.

P_i-n keresztül e-re $\perp$ egyenest húzni majd még 2 egyenes d'-re.

a kapott téglalapon túl minden d'-nél távolabb van P_i-től.



legfeljebb 2 lehet minden részére.

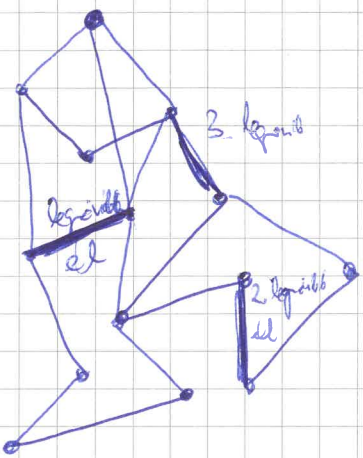
L-ben R-ben ismételt a távolságok

P_i-t csak az L-ben lévő max. 4 ponttal kell összehasonlítani.

Legfeljebb n db ilyen ered van

$$l(n) = 2\ln(n) + O(n)$$

$$O(n \log n)$$



n csúcsok száma

e élek száma.

Kohó algoritmus.

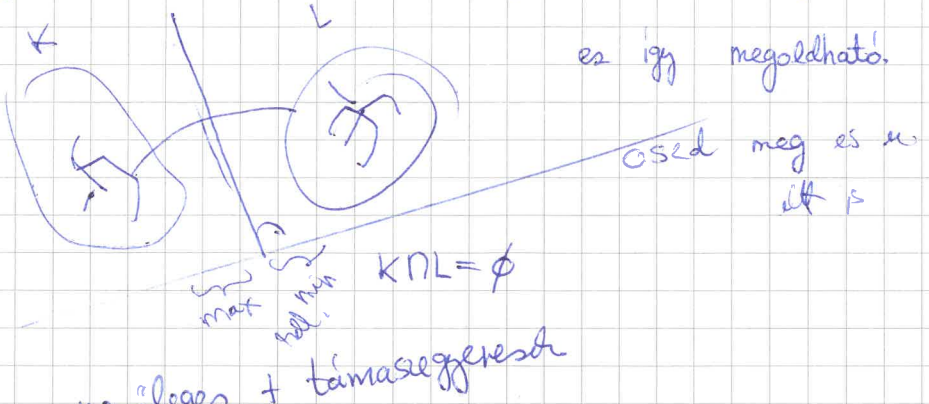
Legrövidebb élek kiválogatása, de a körök elkerülésére figyelni.

MINIMÁLIS FESZÍTŐFA.

$O(e \log e)$ az összehasonlítás miatt.

SORBA KELL RENDEZNI e van

Síkon n ponttal és euklideszi távolsággal: $O(n^2 \log n)$



és így megoldható.

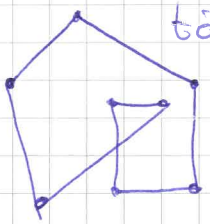
össze meg és ne itt is

merőleges + támaszegyenes

Így kapunk egy teljes feszítőfát. $O(n \log n)$ lesz így.

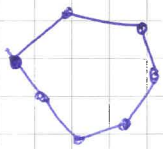
$O(n^2 \log n)$ lehet!!

Poligonok:



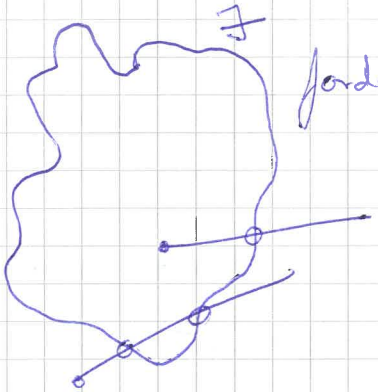
törött vonal. Ha a végét összeállítjuk: POLIGA

(Önátmetsző)

egyszerű poligon: ha nincs önátmetszés  Amagi

bonyolultak tudnak lenni ezek

$\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^n$ folytonos, injektív.



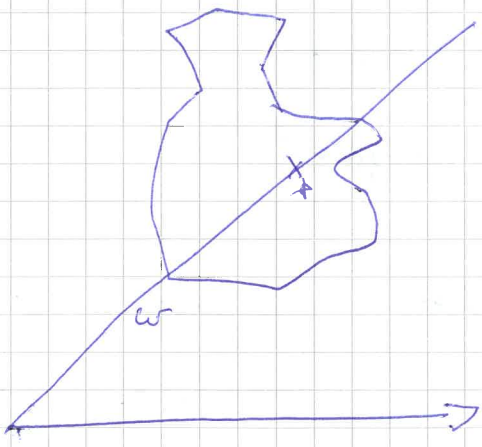
Jordan-görbe.

$\mathcal{J}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{J}$ két komponensű. → egyik korlátos

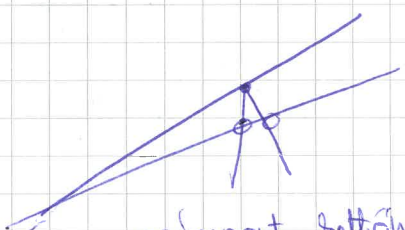
↘ másik nem korlátos

Külső pont: páros számú metszés

Belső pont: páratlan számú metszés



$\mathrm{mod}_2 \#\{P + \epsilon w) \cap S\} = \text{konstans}$



csúcspont kettőnél számít.

így tényleg folytonos marad a paritás. és ennyi:

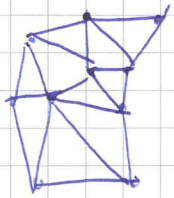
Ha a paritás 1 => belső pont;

Ha a paritás 0 => külső pont.

P, Q $\overline{PQ} \cap \partial S = \phi$ => P és Q azonos paritással.

$O(n)$ a legjobb adható algoritmus.

Triangulálás:



ez a triangulálás.

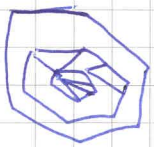
Egyáltalán nem biztos, hogy ez létezik

Konvex esetben könnyű adni.

ez pont nem lett konvex...

Delaunay-triangularizálás (Delone) ilyen is van tetszőleges pontrendszere

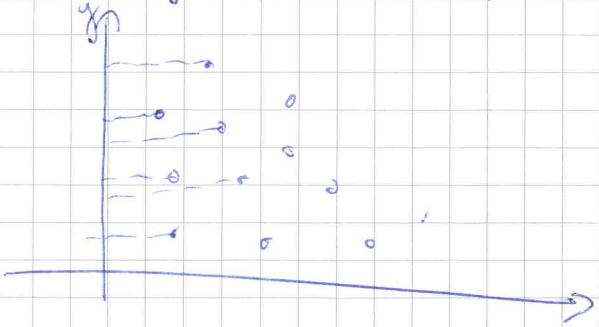
$O(n \log n)$ lesz.



bentről kifelé sávokat

triangularizálunk

Másik módszer: csináljunk rendezést a pathalmazon!

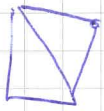


Vetítjük az $\underline{X}$ vagy az X

y tengelyre.

meghatározzuk a minimumot

és így adódik



ilyen lehetőségeink vannak.

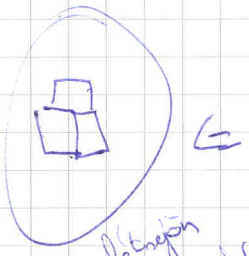
Áll: $c - e + l = 1$

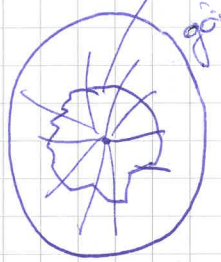
(élek)

↑ csúcsok ↑ lapok száma.

$= 2$ Euler-poliéder-tétel.

P konvex poliéder.





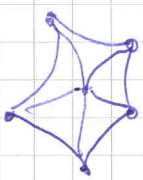
konvex poliéd

gömb

vetítjük a gömbre

sugárirányba.

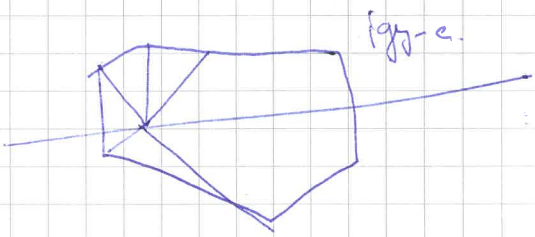
létrejön egy gráf a gömbön



síkgráf jön.

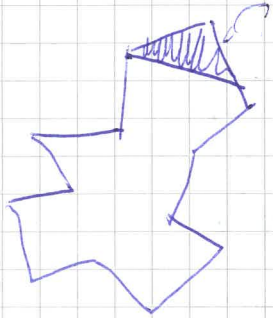
$c - e + l = 2$.

Van egy konvex poliéder, amit egy síkkal metszünk, ami nem illeszkedik egy pontra sem



így-e.

Egyszerű sokszög.

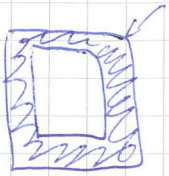


és itt egy „fül".

Egy sokszög konvex => 2 fül van.

Minden egyszerű sokszögnek van füle. (egy alább 2.

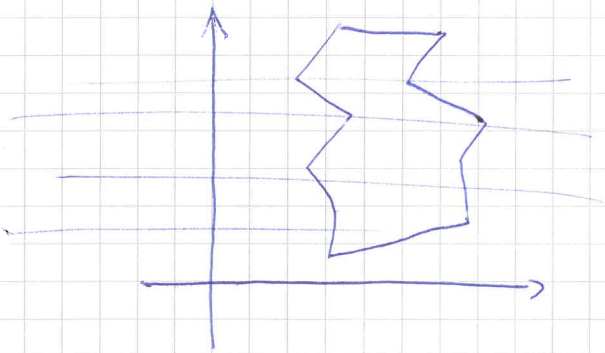
...



nem egyszerű sokszög.

NINCS FÜLE.

Mit lehet tenni általában?



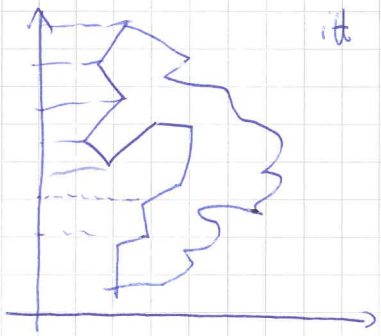
monoton sokszög

x-el párhuzamos egyenes

$O(n)$-ben megy.

Sokszög felbontása monoton sokszögekre. annak a egyenesek

itt van vmi.



y-ra vetítünk.

Háromszög-trapézok levágása a feladat

⇑

átlót behúzunk, rész

Pl. csúcsokat hozunk be, az annyira nem jó.

ez is megy. a monoton sokszög pedig bizonyos