

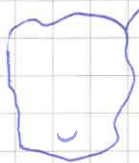
2019. 08. 18

4. Resultat

Vertebralisation

V tén fogat, határa S felület

$$\partial V = S.$$



$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \underbrace{\oint_S \vec{F} \cdot \vec{ds}}_{=0}$$

fluxes.

Bil:

Kumpulan fiktasi berbasis teknologi.

divergenciátétel volt.



 $\downarrow$ R-es részt egy igazított $\vec{F} = (p, q, r)$

végas felületen vett integrál pedig a normális irányítás

mitt fieser.

Kreuzfeldambolalan all vana burih ca eges. Parabolhato-e?

Normalisiert



Kürzes Dupli

a navnd verber a "lylber"

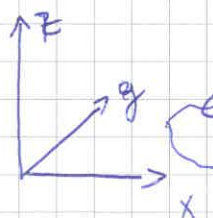
metassander a troughed rifle

Green-total:

sikbeli cuccos.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

tegyük azt tételel $\vec{F} = (P, Q, R)$.



→ $\frac{1}{n}$ a felület egy xy-síkban

2nd part or

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iiint_D \underbrace{\text{rot } \vec{F}}_{\text{rot } s-x \perp \text{ rot } y-z} d\vec{s} \quad /$$

①

Stokes-tétel

általában is: S egy felületdarab, ∂S gáze. határ.

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

S olyan mint egy xy -síkbeli egyszerűen összefüggő tartomány - folytonos, differenciálható, integrálható függvény.

Biz: csak a P -s részt. $\vec{F} = P \cdot \vec{e}$

felület pedig: $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$. $x,y \in D$.
 $\uparrow$ klasszikus felső xy -felület.

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot } P\vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_x \vec{e}_y - P'_y \vec{e}_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\iint_S (P'_x \vec{e}_y - P'_y \vec{e}_x) \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\vec{n}'_y = (0, 1, f'_y) \quad \vec{n}'_x = \vec{e}_y + f'_y \vec{e}_z$$

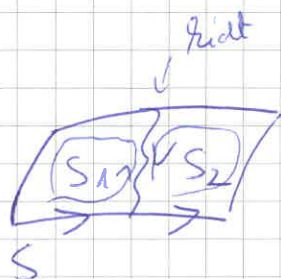
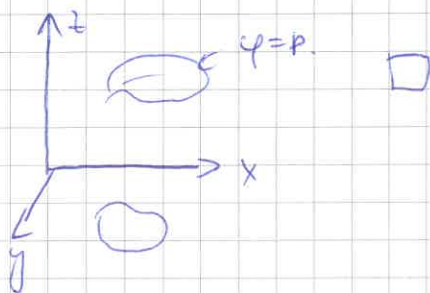
$$\vec{n} \cdot \vec{e}_x + f'_y \vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\iint_S (-P'_x f'_y \vec{n} \cdot \vec{e}_z + P'_y \vec{n} \cdot \vec{e}_x) \, dS$$

a felírni: $P(x,y,z) = P(x,y, f(x,y)) = \varphi(x,y)$

$$\varphi'_y = P'_x \cdot 0 + P'_y \cdot 1 + P'_z \cdot f'_y = P'_y + P'_z f'_y \quad \text{Green-tétel}$$

$$\iint_S -\varphi'_y \vec{n} \cdot \vec{e}_z \, dS = \iint_D -\varphi'_y \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \varphi \, dx$$

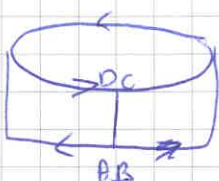


síkbeli Greene verifikál vissza.

(a)



$$\iint_A \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

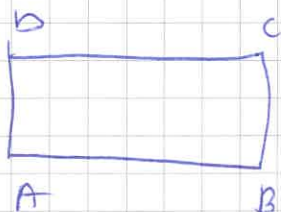


↙ azígy össze nem ér, addig ígér

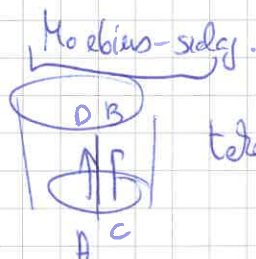
énveges erre is a Stokes-tétel.

Pitt a fűszert az ujjak. Erre is OK!

(b)



=>



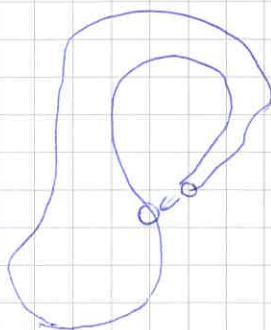
teljesen egyet
nyit

erre már nem

énveges a Stokes!

a Möbius-szalag nem ígér.

Klein-fülső.



egyszerűsített felület,
mivel fülső-felső.

A n nem tud híjeli mutatni.

$\mathbb{R}^n$ -ben n -ban din
sokaság

$$P \subseteq \mathbb{R}^2$$

$M: \mathbb{R}^2 = D \rightarrow \mathbb{R}^n$ u. manyföld.

görbe: 1D-ből képezett 3D-ba.

felület: 2D-ből képezett 3D-ba.

$\vec{F}: M \rightarrow$

$$\iint_M \text{diff mennyiség} = \oint_{\partial M} F \cdot d\vec{r}$$

általános Stokes tétel

Fizikai példa.

$T(x, y, z)$ hőmérséklet eloszlás adott.

$F = \lambda \nabla T$ hőáramlásra jellemző véc.

hőenergia:

$E \sim c \cdot m \cdot T = c \cdot \underset{\uparrow \text{fajhő}}{\rho(x, y, z)} \cdot \Delta V \cdot T$

$E \sim c \cdot \rho(x, y, z) \cdot \Delta V \cdot T.$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V c \cdot \rho \cdot T \, dV = \oint_{\partial V} -\lambda \nabla T \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V c \rho T \, dV = \iiint_V \text{div}(-\lambda \nabla T) \, dV$$

$$\iiint_V \frac{d}{dt} c \rho T \, dV = \iiint_V \text{div}(-\lambda \nabla T) \, dV$$

Körérelék-tétel:

$\forall V$ térfogatra

$$\iiint_V f(x) \, dV = \iiint_V g(x) \, dV$$

$\Downarrow$
 $f(x) = g(x)$

$\Downarrow$
 $\frac{d}{dt}(c \rho T) = \text{div}(-\lambda \nabla T)$

$$c \rho \frac{dT}{dt} = -\lambda \text{div}(\nabla T) = \boxed{-\lambda \Delta T}$$

(4)

Kapcsolat:

$$K \frac{dT}{dt} = \Delta T$$

hogyan definiálható a kapcsolat a T tér- és időbeli eloszlása között

állandósult állapot:

$$\Delta T = 0$$

$\Downarrow$ T "harmonikus függvény".

Remi - példa:

$$\frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ & 7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \vec{F} \rightarrow \\ \downarrow \end{array}$$

Harmonikus függvények:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta f = 0$$

$$f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0.$$

FIZIKA:

- hővezetés
- hullámjelenségek ...

MATEKA:

VAF

komplex függvények.

1) Közepérték - tulajdonság

Legyen f harmonikus, $P \in \mathbb{R}^3$ egy pont.

S egy P -közeli gömb R sugarúval.

$$f(P) = \frac{\oint_S f(\vec{r}) d\vec{s}}{\oint_S 1 d\vec{s}} \quad (5)$$



$$f(p) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\vec{r}) d\vec{S}?$$

Biz: Tfh $\bar{p} = \mathbb{Q}$ origo.

$f(\vec{r})$ függvény. Adott. ~~φ_t~~ $\varphi_t(\vec{r}) := f(t \cdot \vec{r})$.

$\varphi_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\frac{d}{dt} \iint_S \varphi_t(\vec{r}) d\vec{S} = \iint_S \frac{d}{dt} \varphi_t(\vec{r}) d\vec{S} = \iint_S f'_x t + f'_y t + f'_z t d\vec{S}$$

$$\varphi_t(\vec{r}) = f(tx_1, ty_1 + tz_2) =$$

$$= \iint_S f'_x t + f'_y t + f'_z t d\vec{S} =$$

$$= \iiint_{\partial S} t f''_{xx} + t f''_{yy} + t f''_{zz} dV = 0. \Rightarrow \frac{d}{dt} \iint_S \varphi_t(\vec{r}) d\vec{S} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_S \varphi_t(\vec{r}) d\vec{S} \text{ állandó}$$

$$t=1: \iint_S f(\vec{r}) d\vec{S}$$

□

② Maximum - elv

Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^3$ összefüggő nyílt halmaz.

f harmonikus K -n.

$\Rightarrow f$ -nek nincsenek szélsőértékei K -ban.

Biz: Tfh $\bar{p}_0 \in K$ -ban maximum van.

p_0 -nak egy kis környezete benne van K -ban.

Kis gömb p_0 körül: S .

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_S f(\vec{r}) d\vec{S}$$

$\uparrow$ $f(p_0)$ $\downarrow$ $\text{Ha } f \text{ nem konstans.}$

③ Dirichlet - probléma

Legyen K egy összefüggő, kompakt halmaz. f, g harmonikus K -n.

$$\forall x \in \partial K \quad f(x) = g(x) \Rightarrow \forall x \in K \quad f(x) = g(x).$$

$\Delta u = 0$ és ismerem u -t valami határon.

Biz: $\varphi(\vec{r}) := f(\vec{r}) - g(\vec{r})$.

$\varphi(\vec{r})$ folytonos a kompakt K -n $\Rightarrow K$ -n felveszi szélsőértékét.

minimuma $\vec{r}_1$ -ben.

maximuma $\vec{r}_2$ -ben.

φ is harmonikus. $\Rightarrow \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \partial K$.

$$\varphi(\vec{r}_1) \leq \varphi(\vec{r}) \leq \varphi(\vec{r}_2) \quad \forall \vec{r} \in K.$$

$\parallel$
0

$\uparrow$
ez is

$\parallel$
0

triviális

0 lenne. $\Rightarrow f = g \quad \square$

Lineáris programozási feladat:

$$a_1x + b_1y \leq c_1$$

$$a_2x + b_2y \leq c_2$$

$\vdots$

$$x + y \leq 50$$

$$a_2x + b_2y \leq 100$$

$$a_3x + b_3y \leq 50$$

$\vdots$

