

2013.04.26.

3. konzultáció

Vektoralgebra

nyomult tovább.

Vonalmenti integrál volt.

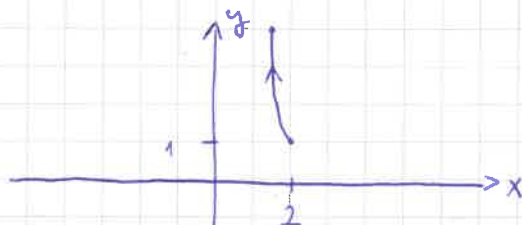
4. feladat, 2. feladat

$$\int_{\xi} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \text{ ahol } \vec{F} = (xy, x+y) = xy \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j}$$

$$\xi: x = 1 + \frac{1}{t}, y = t^2 \quad 1 \leq t \leq 2.$$

es. kell.

a görbe:



$$\int_{\xi} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right) t^2 \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{t} + t^2\right) 2t \, dt \right) =$$

$$= \int_1^2 \left(-1 - \frac{1}{t} + 2t + 2 + 2t^3 \right) dt =$$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t} + 2t + 2t^3 \right) dt = \left[t - \ln t + t^2 + \frac{2}{4} t^4 \right]_1^2 =$$

$$= \left(2 - \ln 2 + 4 + 8 \right) - \left(1 - 0 + 1 + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{23}{2} - \ln 2}}$$

Hátsó út?

1.5.

$$y = -6x + 13$$

$\xi_2:$

1 4 2

$$x = t \quad y = -6t + 13$$

$$\left| \frac{3}{2} \leq t \leq 2 \right|$$

$$\int_{\xi_2} (-6t^2 + 13t) \cdot 1 + (-5t + 13) \cdot (-6) \, dt =$$

$$= \int_{3/2}^2 (-6t^2 + 13t - 78) \, dt = \left[-2t^3 + \frac{13}{2}t^2 - 78t \right]_{3/2}^2 = (-16 + 26 - 156) - \left(-\frac{27}{4} + \frac{117}{8} - 117 \right)$$

$$= 31 - \frac{333}{8} \approx \underline{\underline{-10}}, \text{ más eredményt kapunk.}$$



$$y: 1 \rightarrow 4$$

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$x: 2 \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\int_1^4 ((2t) \cdot 0 + (2+t) \cdot 1) dt + \int_2^{3/2} 4t \cdot 1 + (4+t) \cdot 0 dt =$$

$$= \int_1^4 (2+t) dt + \int_2^{3/2} 4t dt = \left[2t + \frac{t^2}{2} \right]_1^4 + \left[2t^2 \right]_2^{3/2} =$$

$$= (8 + 8) - (2 + \frac{1}{2}) + \frac{9}{2} - 8 = 6 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \underline{\underline{10}}$$

Milyen $\vec{F}$ kell, hogy út független legyen a vektortegrel.

• " $\vec{F}$ " konzervatív;

↑ energiamegmaradás megőrzése

$$\Leftrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\Leftrightarrow$ Van potenciálfüggvény (összesen öf. telonajk)

$$u(x, y) \text{ olyan, hogy } \begin{pmatrix} u'_x(x, y) \\ u'_y(x, y) \end{pmatrix} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \quad u'_x = P$$

$$u'_y = Q$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{"nabla"}$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot u = \left(\frac{\partial}{\partial x} u, \frac{\partial}{\partial y} u \right) = \underline{\underline{\text{grad } u.}}$$

- Van ilyen u potenciál függvény.

$$P_y \stackrel{!}{=} Q_x \text{ igaz fordítva is!}$$

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \text{ van.}$$

K : $\odot$ - körül 3 sugarú kör. $\odot$ poz. irány.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = ?$$

$$(1) K: x = r \cos t \quad y = 3 \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \oint_K \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \frac{-3 \sin t}{9(\cos^2 t + \sin^2 t)} \cdot (-3 \sin t) + \frac{3 \cos t}{9(\cos^2 t + \sin^2 t)} \cdot 3 \cos t \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad P_y' = \frac{-1(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q_x' = \frac{1(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$P_y' = Q_x' \Leftrightarrow \exists u(x,y). \Rightarrow \oint = u(r_p) - u(r_p) = 0.$$

A tétel másképp nem egyszerűen össze függő.

Van-e potenciál?

$$\exists u, \quad \vec{F} = \nabla u.$$

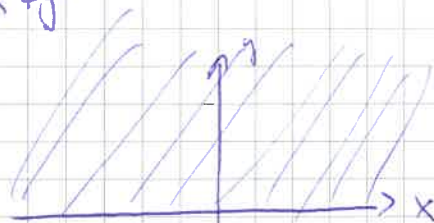
$$u'_x = \frac{-y}{x^2+y^2} = -y \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$$

$$u(x,y) = -\arctg \frac{x}{y} + C(y)$$

$$u'_y = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot x \cdot \frac{-1}{y^2} + C'(y) = 0 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} + C = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = -\arctg\left(\frac{x}{y}\right) + C$$



itt értelmezhető?

↑
alább felsőként lehet definiálni
potenciált függvényként

Tanulság:

$$\text{Ha adott } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}, \quad P'_y = Q'_x \Rightarrow$$

$u(x,y)$ megkonstruálható.

" + C " megjelölés.

5/2. feladat

$$\vec{F} = (3x+4y, 3x+9y)$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{ellipszis} \quad \odot$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = ?$$

(h.)

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

$$x = 3 \cos t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

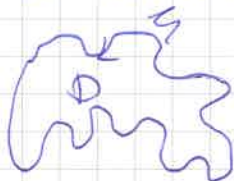
$$y = 2 \sin t$$

$$\begin{aligned} \oint_0^{2\pi} & \left[(12 \cos t + 8 \sin t) (-3 \sin t) + (24 \cos t + 18 \sin t) (2 \cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (48 \cos^2 t - 24 \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \left(48 \frac{1 + \cos 2t}{2} - 24 \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 12 + 12 \cos 2t dt = \left[12t + \frac{12}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \\ &= \underline{\underline{(24\pi)}} \end{aligned}$$

GREEN-TÉTEL

$\vec{F}$ vektor méré (sima)

$\oint$ egyszerű zárt görbe ami a D tartományt határolja. $\odot$ pos.



$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dxdy$$

— 0 —

$$Q'_x = 2$$

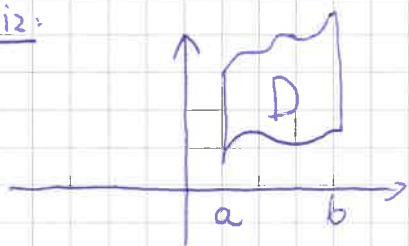
$$P'_y = 4$$

⑤

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D 4 dxdy = 4 \cdot \text{ellipsz terület}$$

$$= 4 \cdot 6\pi = \underline{\underline{24\pi}} \quad \square$$

Biz:



$$D: \quad a \leq x \leq b$$

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

$$\oint_{\partial D} P dx = \int_{\sim} + \int_{\uparrow} + \int_{\sim} + \int_{\downarrow} = (1) + (2) + (3) + (4)$$

$$(2) \quad \int_{\uparrow} P dx = \int_{y_1(6)}^{y_2(6)} P(6, t) \cdot 0 dt = 0 \quad \int_{\downarrow} = 0 \text{ is.}$$

$x=6$
 $y=t \quad y_1(6) \leq t \leq y_2(6)$

$$(1) \quad x=t \quad a \leq t \leq b$$

$y = y_1(x)$

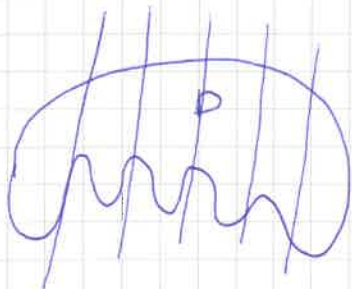
$$(4) \quad \int_a^b -P(t, y_2(t)) dt.$$

$$\int_a^b P(t, y_1(t)) \cdot 1 dt =$$

$$\oint_{\partial D} P dx = \int_a^b P(t, y_1(t)) - P(t, y_2(t)) dt.$$

$$\iint_D -P_y' dx dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} -P_y' dx = \int_a^b \left[-P(x, y) \right]_{y_1(x)}^{y_2(x)} =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) dx \Rightarrow \oint_{\partial D} P dx = \iint_D P_y' dx dy.$$



darabokból kell. a résdarabokra pedig már igaz lesz a csecc.



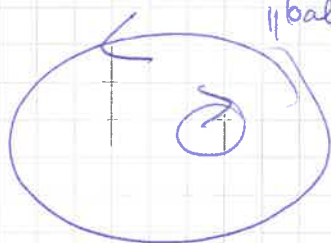
ilyen tartományokra szabható.

$$\iint_D Q'_x - P'_y = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \dots$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$



a vektorok kifelé. □



"balra fel van a tartomány"

itt semmi kell irányítani,
alra megmarad a Green-tétel

D tartomány határa a C : $C = \partial D$

Ha $P'_y = Q'_x \Rightarrow \iint_D = 0 \Rightarrow \oint_C = 0$, ut független az integrál.

Green-tétel: $F = (P, Q)$ $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx \, dy$

1. Ver: $\xi: x = x(t)$ $y = y(t)$ $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ $\vec{r}(0) = (x(0), y(0))$ $\vec{v}(0) = (x'(0), y'(0))$

$\vec{t} = \vec{v}(0) = (x', y')$ érintő egyenesvektor



⊕

$$\vec{n} = (y', -x') \quad \vec{v} = (+Q, +P)$$

Tehát a vektormező: $\underline{V} = (Q, -P)$.

$$\oint P \dot{x}(s) + Q \dot{y}(s) ds = \iint_D Q'_x - P'_y$$

ami másképp:

$$\oint_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n} ds = \iint_D (\underline{V}_1)_x + (\underline{V}_2)_y dx dy.$$

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Emel leírás.

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \quad P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\vec{F}(\underline{x} + \underline{h}) - \vec{F}(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + \text{hisz } \underline{h} \text{ kicsi}$$

↑
3x3-as mátrix.

$\underline{A}$ = szimmetrikus + antiszimmetrikus

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \underline{V} = P'_x + Q'_y + R'_z \quad \text{skalárfüggvény.}$$

$$\text{rot } \underline{V} = \text{curl } \underline{V} = (R'_y - Q'_z)\vec{i} \dots \text{ a szokásos VÉKTOR}$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}, \quad \text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

Legyen $\underline{V}$ áramlási tér.



$$\begin{aligned} z &= t \\ x &= r \cos \omega t \\ y &= r \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\dot{x} = -r \omega \sin \omega t$$

$$\dot{y} = r \omega \cos \omega t.$$

③

Össz. $\vec{v} = (-\omega y, \omega x)$ lesz.

$$\vec{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

$$\text{rot } \vec{v} = (0, 0, \omega - (-\omega)) = (0, 0, 2\omega) \quad \text{örvénysűrűség.}$$

Példán. $f \rightsquigarrow f'$. f' -ből f kapható?

f skálár $\Rightarrow$ van ∇f vektore.

adott $\vec{F}$ vektore. VAN-E f , hogy $\vec{F} = \nabla f$?

$$\text{Van} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = 0$$

Ha ez teljesül: f az plusz c egyéig egyértelmű.

$\vec{F}$ vektore $\Rightarrow$ rot $\vec{F}$ vektore.

adott $\vec{F}$. Van-e olyan $\vec{G}$, hogy $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$.

VAN $\Leftrightarrow \boxed{\text{div } \vec{F} = 0}$ plusz (∇f) egyéig egyértelmű.

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$$

$$\text{div } \vec{F} = \text{div rot } \vec{G} \equiv 0$$

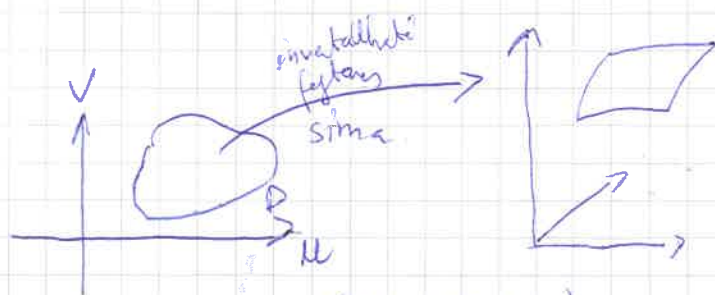
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0.$$

Vegyük észbe.

zsfűszített paralelepipedon térfogatát adja meg.
 $\equiv 0$ hiszen két vektor azonos.

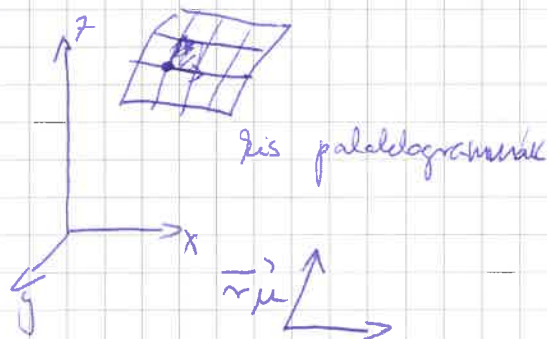
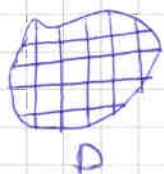
Hf: $\text{rotgrad } f = 0.$

felület (darab)
 $\mathbb{R}^2$



$$(u, v) \mapsto \mathcal{R}(u, v)$$

Legyen D egy felosztása.

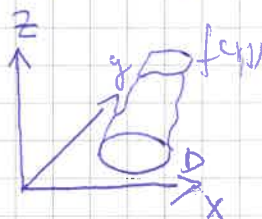


his párh. terület: $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \frac{1}{2}$

felületképlet:

$$A = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv.$$

Speciális eset: $f(x, y)$ grafikonja a felület



$$(u, v) \equiv (x, y)$$

$$\vec{r} = (u, v, f(u, v))$$

$$\vec{r}_u = (1, 0, f'_u)$$

$$\vec{r}_v = (0, 1, f'_v)$$

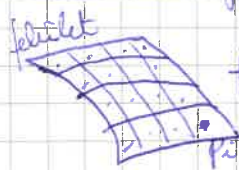
$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_u \\ 0 & 1 & f'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-f'_u) - \vec{j}(f'_v) + \vec{k} \cdot 1.$$

$$\iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \, dx \, dy$$

innen f' ok.

felület szerinti integrál:



f skalár

felosztást adunk.

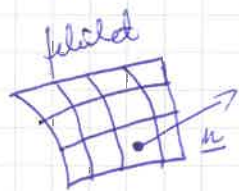
$$\sum f(p_i) \text{ (his db megszámja)}$$

$$\downarrow \text{Riemann-konvergencia}$$

$$\iint f \, dA.$$

$$\iint_D f \, dA = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \cdot \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv \quad \text{sgy számítható.}$$

Másik típus:



$\vec{F}$ vektorfüggvény.

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ vektor merőleges a felületre, hossza a "paralelogrammaszorzék" területével egyenlő.

Legyen $\|\underline{n}\| = 1$.

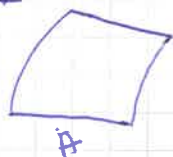
$$\sum \vec{F}(p_i) \cdot \underline{n} \cdot (\text{his felületdarab nagysága})$$

$$= \sum \vec{F}(p_i) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$$

$$\iint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{F} \cdot \underline{n} \cdot dA \quad \downarrow \text{Riemann-konvergencia}$$

$$= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv \quad \square$$

Def:



$$\iint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{F} \cdot \underline{n} \, dA$$

$\vec{F}$ A-n vett fluxusa.

Tétel: divergenciatétel. (Gauss - Ostrogradsky)

V egy tartomány. Krumpli. Egyszerű.

$A = \partial V$ legyen a határfelület. $\vec{F}$ egy vektormező.

$$\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

Biz:



$$\forall x, y \in D$$

$$g(x,y) \leq z \leq f(x,y)$$

$$\oint_A \vec{R} \cdot \vec{n} \, dA = \text{a palástot és nulla.}$$

$$= \iint_D \cancel{R(x,y)} R(x,y, f(x,y)) - R(x,y, g(x,y)) \, dx \, dy =$$

$$\iiint R_z \, dx \, dy \, dz = \left(\int R_z \, dz \right) \dots \text{ így mutatható meg. } \square$$

Legyen $\vec{v}$ egy áramlási tér.



$$\oint_A \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = \text{adott térségtől}$$

kijövő összes
folyadék mennyisége.

fluxus.

Ez csak akkor nemzér, ha

a környelében van forrás vagy nyelő.

$\text{div } \vec{v}$: forrás-sűrűség.

A Green-tétel ennek volt tulajdonságai a 2D-ben változatban.

— 0 —