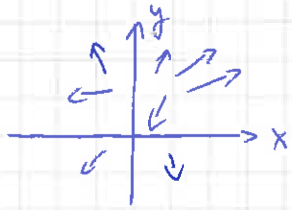
Vektoranalízis 2. konzultáció 2019. 03. 23.

Korábban: $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ volt.
görbék.

Most: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ lesz.



vektormező, vektortér.

görbementi integrál:

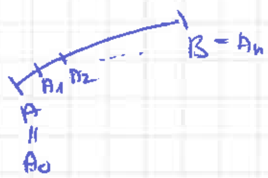
sima görbe

$x(t)$, $y(t)$ $\quad \alpha \le t \le \beta$.

$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j}$.

$\bar{F}(x,y) = \bar{F}(\bar{r})$ lehet. $\quad \bar{F}(\bar{r}) = P(\bar{r})\,\bar{i} + Q(\bar{r})\,\bar{j}$

1 a) adott C görbe és $f(\bar{r})$ skalárfgvny ($\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$).
felosztom a görbét kis darabokra.



$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{A}_k) \cdot \overline{A_k A_{k-1}}$$

C sima, $f(\bar{r})$ folytonos: $\Sigma \longrightarrow \int_C f(\bar{r})\,ds$ ívhossz szerinti integrál – egy szám.

b) adott C görbe, $\bar{F}(\bar{r})$ vektorfüggvény.

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}(A_k)\, \overline{A_{k-1}A_k} \longrightarrow \int_C \bar{F}(\bar{r})\,ds \text{ egy vektor.}$$

formális tulajdonság: lineáris, ív-additív... szokásos.

$$\left| \int_C f(\vec r)\, ds \right| \le \max_{\vec r \in C} f(\vec r) \cdot |C|$$

$$\int_C f(\vec r)\, ds = \int_\alpha^\beta f\left(x(t)\cdot i + y(t)\cdot j\right) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$ KISZ. MÓD.

rugós példa

$r = 4$ cm $\quad m = 3$ cm $\quad N = 5$

$0 \le \varphi \le 10\pi$

$\rho(x,y,z) = kz$ alakú legyen.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= c\cdot\varphi = \frac{3}{10\pi}\varphi \end{aligned}\right\}$$

3 cm dlt / 10π

$$kz\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\,\Delta\varphi$$

$$\int_0^{10\pi} kz\sqrt{16\sin^2\varphi + 16\cos^2\varphi + \frac{9}{100\pi^2}}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{10\pi} \ldots = k\sqrt{16 + \frac{9}{100\pi^2}}\,\frac{(10\pi)^2}{2}.$$

② „erő munkája"

$F\cdot s\cdot\cos\varphi$

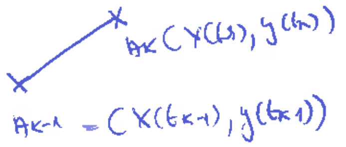
görbe felosztása kis darabokra...

$$W \approx \sum_k \vec F(\vec\Delta_k)\cdot\overrightarrow{A_{k-1}A_k} \xrightarrow[\text{F folytonos}]{\text{a görbe sima}} \int_g \vec F \cdot d\vec r$$

$$= \int_g P\,dx + Q\,dy$$

$$\sum P(x(t_k), y(t_k)) \cdot (x(t_k) - x(t_{k-1})) + Q(x(t_k), y(t_k)) \cdot (y(t_k) - y(t_{k-1}))$$

lesz

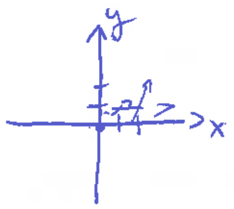


$$= \sum P(x(t_k), y(t_k))\, x'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) + Q(x(t_k), y(t_k))\, y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$$

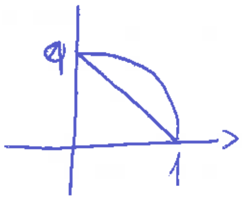
$$\to \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt.$$

pl.

$$\vec{F} = (x+y,\ x-y)$$



$$(1,0) \mapsto (0,1)$$



a) egyenes
b) körív
c) parabola

a) $x = 1-t \quad y = t \quad 0 \le t \le 1.$

b) $x = \cos\varphi \quad y = \sin\varphi \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

c) $x = 1-t \quad y = 1-(1-t)^2 = 2t-t^2 \quad 0 \le t \le 1.$

$$\int_{C_a} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_a} (P\,dx + Q\,dy) = \int_0^1 P x' + Q y'\, dt =$$

$$\int_0^1 1\cdot(-1) + (1-2t)\cdot 1\, dt = \int_0^1 -2t\, dt = \left[-t^2\right]_0^1 = -1$$

b) $$\int_{C_2} \vec{F}\cdot \vec{dr} = \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)(-\sin\varphi) + (\cos\varphi - \sin\varphi)\cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{1}{2} - 0 - \left(0 - \frac{1}{2}\right)\right) = \underline{\underline{1}}$$

c) $$\int_{C_3} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_0^1 (1+t-t^2)(-1) + (1-3t+t^2)(2-2t)\, dt =$$

HF.

$$\int_{C_1} \neq \int_{C_2} \neq \int_{C_3} \qquad \text{függ az úttól!!}$$

Milyen F kell, hogy ne függjön az úttól?

Az integrál úttól független $\iff$ A-ból B-be bármely görbén egyforma

$\iff$ $\forall$ zárt görbén 0. $\Rightarrow$ $\oint_C \vec{F}\,d\vec{r} = 0$.

Ha $\vec{F}$-nek van potenciálja. $\exists\, u$ skalár függvény $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

$$P = u'_x \qquad Q = u'_y$$

$$\vec{F} = (u'_x, u'_y) \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = \nabla u}$$

Biz:

„⇐" Ha $\exists u$:

$$\int P\,dx + Q\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \underbrace{u(x(t),y(t))}_{u(t):\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}}\,dt$$

$$\frac{du(t)}{dt} = u'_x \cdot x'(t) + u'_y \cdot y'(t)$$

$$= u(x(\beta),y(\beta)) - u(x(\alpha)+y(\alpha)) = u(VP) - u(KP).$$

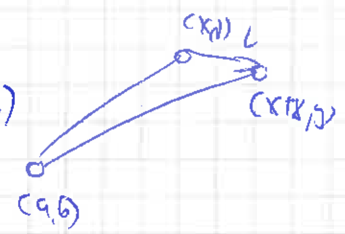
$\vec{F} = \nabla \cdot u = \operatorname{grad} u$. $\vec{F}$ egy skalárgradiens

„⇒" (a,b) rögzített.

$$u(x,y) := \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy -$$

$$\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h P(x,y)\cdot 1 + Q(x,y)\cdot 0\,dt = \frac{1}{h}P(x+\xi,y)\cdot h$$

$\downarrow$ $u'_x(x,y)$



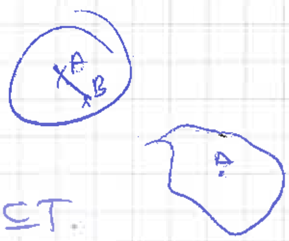
$L:\ r(t) = (x+t, y)$ $\quad 0 \le t \le h$

$0 \le \xi \le h$

$\Downarrow$

$P(x,y)$

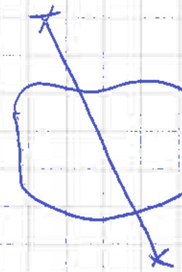
$u'_x = P$ lesz $\square$

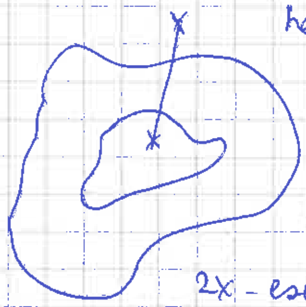


KONVEX: $\forall A,B$ $\overline{AB} \subseteq T$

CSILLAGSZERŰ: $\exists A$ $\forall B$ $\overline{AB} \subseteq T$

Egyszeresen összefüggő tartomány.





nem esik szét

1x-esen

2x-esen összefüggő.

↑ ilyenen vagyunk

Ha van ilyen: $\boxed{P'_y = Q'_x} \Longleftrightarrow$ Létezik a potenciál

Green-tétel:

$\vec{F}$ sima vektormező, ξ zárt görbe egyszerű.
ami D-tartományt határol

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dA$$

ez mennyire indokolja az előző tételt $\int_a^b \left[P(x,y)\right]_{y_1}^{y_2} dx =$

Biz:

1)

$$\oint_C = \int_{\downarrow} + \int_{\to} + \int_{\uparrow} + \int_{\leftarrow}$$

$$\int_{\downarrow} P\,dx = \int_{y_2(a)}^{y_1(a)} P(x,y)\cdot 0\,dt = 0 \qquad \int_{\leftarrow} P\,dx = \int_b^a P(t, \ldots) \quad -\int_a$$

$$\oint_g P\,dx = \iint_D P'_y\,dA$$

$$\int_{\uparrow} P\,dx = 0$$

$\to \quad x = t \quad y = y_1(t) \qquad \int_{\to} P\,dx = \int_a^b P(t, y_1(t))\cdot 1\,dt$

2.

három részre (D_1, D_2, D_3) kell bontani

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

általában is igaz.