

dr. Németh Z. nyoma. Előre számunkra nincsen.

Ajánlott irodalom: Thomas - fele fele.

komm. e-mailben: publikus.

Myjz is.

Vektorértékű függvények: $f, D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

tipikusan $\mathbb{R}^2$: sík

$\mathbb{R}^3$: tér.

D tipikusan valamilyen intervallum.

Ellen vektorértékű függvény $\sim$ görbe.

pont mozgása a síkon az időben.

tipikus: $t \mapsto (x(t), y(t))$ $a \leq t \leq b$.

Milyenek ezek a görbék?

$\uparrow$ az tipikusan olyan azonosítás, ami nem bijectív.

(pl.) $0 \leq t \leq 1$

$$x(t) = t$$

$$y(t) = t$$

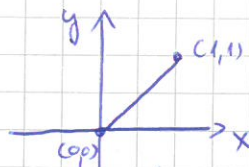
$$t \mapsto (t, t) = t \cdot \underline{i} + t \cdot \underline{j}$$

$$x(t) = t^3$$

$$y(t) = t^3$$

$$t \mapsto (t^3, t^3).$$

$$t \mapsto \underline{r}(t).$$



más vektorfüggvény ugyanazzal a pályával. Ez fontos.

más sebességgel járjuk be ugyanazt a görbét.

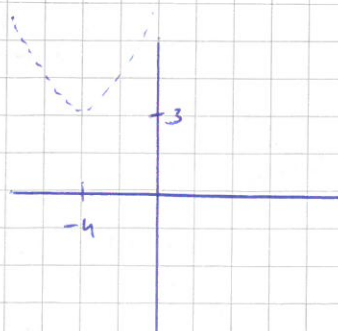
(pl.) $x = 2t - 4$ $y = 3 + t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow t = \frac{x+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 3 + \left(\frac{x+4}{2}\right)^2 = \dots$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ ellipszis pl.}$$

paraméteres alak?

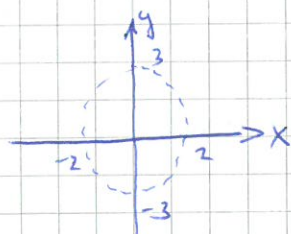


pl.

$$x = 2 \cos t$$

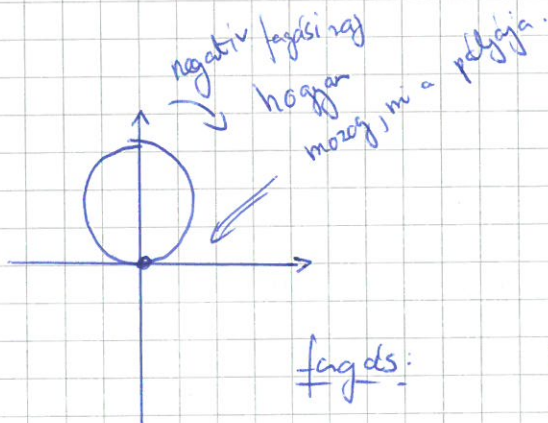
$$y = 3 \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



es a tipikus feladat.

pl.



- a kör fázis

- a fázis $\rightarrow$ halmaz.

fázis:

$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \sin \varphi$$

φ : elfordulás szöge.

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

ω negatív

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = R \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = R \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = \underline{\underline{0 - 1 \cdot \sin \omega t}}$$

$$y = R \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = \underline{\underline{-R(\cos \omega t + 0)}}$$

$$v = R\omega$$

Ezt kell behelyettesíteni.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= R\omega t - R\sin \omega t \\ y(t) &= 1 - R\cos \omega t \end{aligned} \right\}$$

$R = \omega = 1$ legyen.

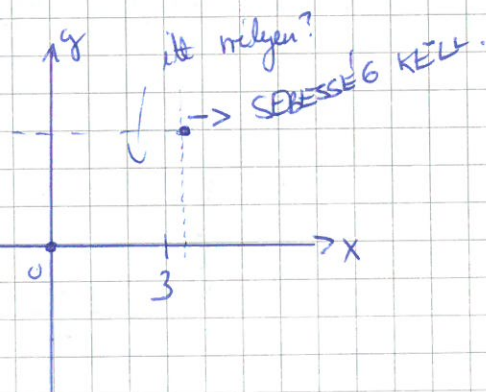
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Sebeny: } \left. \begin{aligned} x(t) &= 1 - \cos t \\ y(t) &= \sin t \end{aligned} \right\}$$

0-ban 0.

$t = \pi$ -ben $(2, 0)$

$$y'(x) = ?$$



$y = y(t)$
 $x = x(t)$

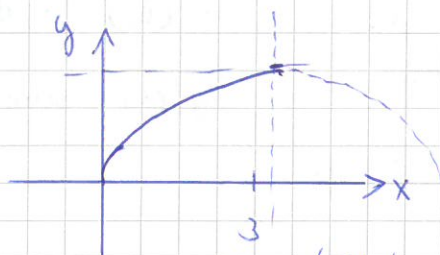
~~$x = x(t)$~~ $t = T(x)$ $x(t)$ inverse.
 is lehetne fejteni.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(y(t(x)))}{dx} = y'(t(x)) t'(x) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dx}}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} \Big|_{t=0} = \frac{2 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \rightarrow \infty$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi} = 0$$



nagyjából így néz ki, bár
nem állt össze.

Differenciálhatóság:

1 dim. esetre $f(x)$ -et jól közelíti $l(x)$ lineáris függvény.
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a pont körül.

$$f(x) = \underbrace{\{ f(a) + g(x-a) \}}_{l(x)} + \underbrace{w(x)}_{\rightarrow 0 \text{ ha } x \rightarrow a} |x-a|$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ deriválhatósága. $\vec{f}(x)$ fgv-t jól közelíti $\vec{l}(x)$ lineáris függvény a körül.

$$\vec{f}(x) = \vec{f}(a) + \underline{Q} \cdot (x-a) + \underbrace{\vec{w}(x)}_w \cdot \|x-a\|$$

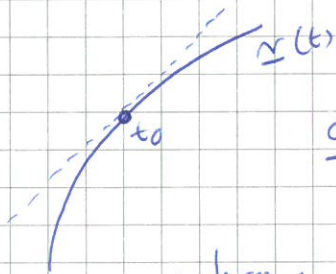
mátrixos alakban

Most: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(t_0) + \underline{q}(t-t_0) + \underline{w}(t-t_0)$$

$$\underline{q} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t-t_0} \quad \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$$

③



q érinti $r(t) - t$ t_0 -ban.

a hossza: $\left\| \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \right\| = \frac{\|r(t) - r(t_0)\|}{t - t_0} \approx \frac{\text{ív hossz}}{t - t_0}$

átlagsebesség

egy fgtc

$\|q\|$: sebesség nagysága.

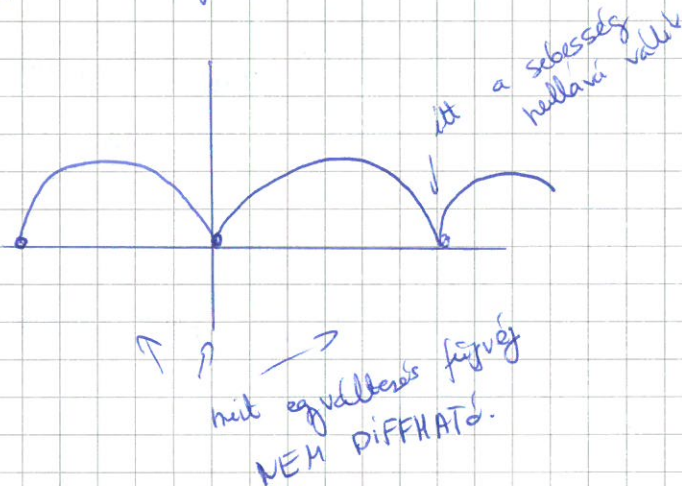
$r'(t)$: érintővektor
sebesség.

$r'(t_0)$: érintővektor

$r'(t)$: sebesség függvény.

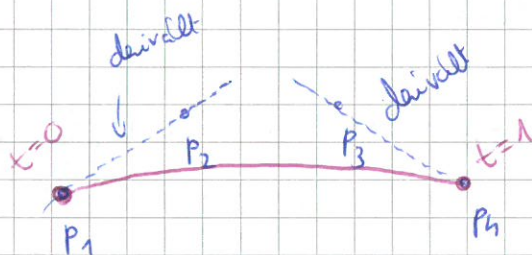
$\Rightarrow$ A sebesség mindig érintőirányú.

Ciklois:



De mit várunk függvény, diffható!

$$r'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$



$$P_i = (a_i, b_i)$$

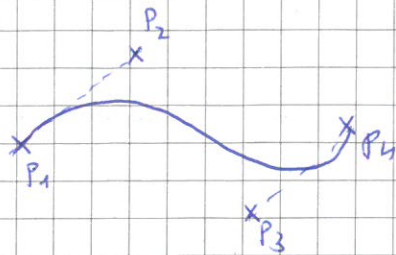
számítógépes grafika
használat

Bézier-görbe

$$X(t) = a_1(1-t)^3 + 3a_2t(1-t)^2 + 3a_3t^2(1-t) + a_4t^3$$

$$y(t) = b_1(1-t)^3 + 3b_2t(1-t)^2 + \dots \quad 0 \leq t \leq 1.$$

másik példa:



(HF) Beldtvi, hogy a két pont P_2, P_3 -ba kerül.

Belátvi, hogy benne van a görbe P_1, P_2, P_3, P_4 □-ben.

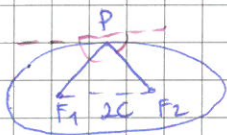
ellipszis / hi parabola / parabola

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = \frac{1}{2p} x^2$$

adott.

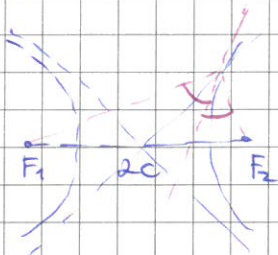


ellipszis definíciója

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$2a > 2c$$

hiperbola

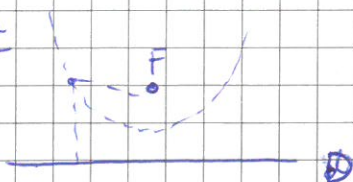


parabola a kör középpontjának

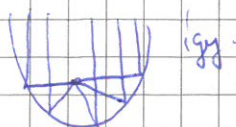
$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$a < c$$

parabola



kör középpontjának



$$PF = PO$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$



$$\overline{PF} = \varepsilon \overline{PD}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ excentricitás}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon < 1: \text{ellipszis} \\ \varepsilon > 1: \text{hiperbola} \\ \varepsilon = 1: \text{parabola} \end{array} \right\}$$

$$\underline{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0} \text{ másodrendű görbék eset}$$

változó másodfokú egyenlet névtünk eddig.

Vektorműveletek

- vektor + ✓

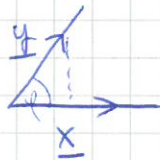
- vektor • skalar ✓

- vektorok skaláris szorzata:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2 v 3 dimenzióban

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$



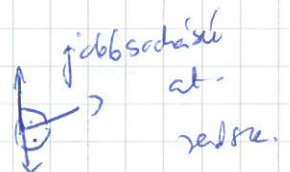
$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

y-hoz x-re vett
vetületének
hossza • x hossza.

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos \varphi.$$

3 dim. VEKTORINLIS SZORZAT

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$



✓ a kifeszített $\square$ a kétféle vektor
hossza. TERÜLET.

[HF]: i) $(\underline{x} \cdot \underline{y})' = (\underline{x}' \cdot \underline{y}) + (\underline{x} \cdot \underline{y}')$ belátni.

ii) $(\underline{x} \times \underline{y})' = (\underline{x}' \times \underline{y}) + (\underline{x} \times \underline{y}')$.

iii) $f(t) \cdot \underline{x}(t) = (f(t)x_1(t), f(t)x_2(t))$

$(f \cdot \underline{x})' = f' \cdot \underline{x} + f \cdot \underline{x}'$ igaz-e?

Példa

$x = R \cos \omega t$

$y = R \sin \omega t$

máhold

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

☞

$\underline{v} = (x', y')$

$\underline{a} = (x'', y'')$

ugye.

$\overset{M}{\bullet} \xrightarrow{d} \overset{m}{\bullet} \quad |F_g| = \gamma \frac{mM}{d^2} \quad \text{grav. vonzerő.}$

$\underline{F} = m \underline{a}$ ugye.



$|F_g| = \gamma \frac{mM}{R^2} = \|m \underline{a}\|$

$x'' = -R\omega^2 \cos \omega t = -\overset{\omega^2}{R} x$

$y'' = -R\omega^2 \sin \omega t = -\overset{\omega^2}{R} y$

$\vec{F}_g = \left(-\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{x}{R}, -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{y}{R} \right) = m (-\omega^2 x, -\omega^2 y)$

$\gamma \frac{m}{R^3} = \omega^2$

$\gamma \frac{M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Leftrightarrow$

$\boxed{\frac{\gamma M}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2}}$

Kepler III. törvénye

Kepler-törvények és Newton-törvények.

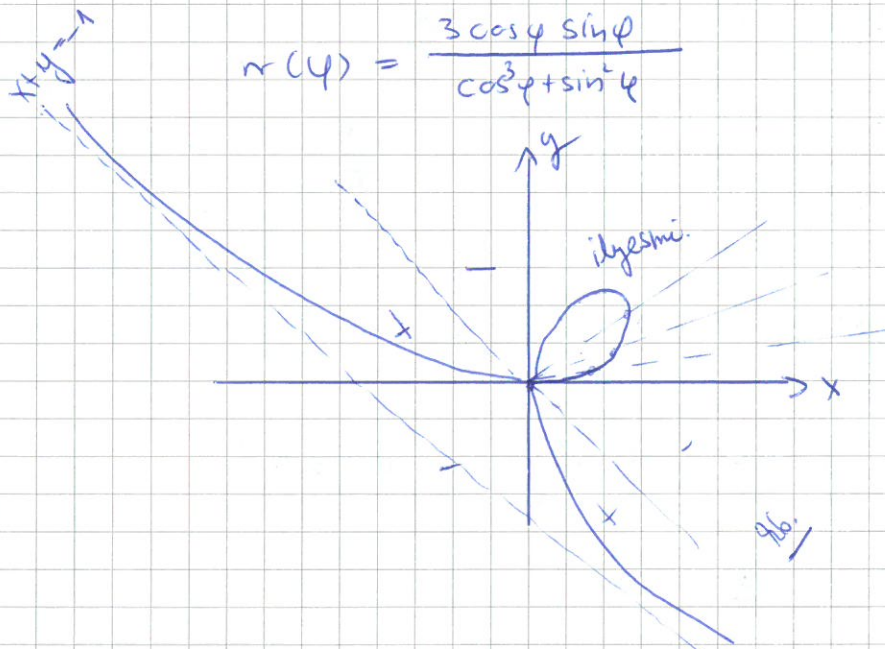


• "tűnéspontok"

feladat:

$$x^3 + y^3 - 3xy \quad \text{polaris koordinátákban}$$

$$r^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3 \cos \varphi \sin \varphi r^2$$



meg tudjuk mutatni az aszimptotát? És az alapját?

$$r'(\varphi) \text{ kiszámolható.} \quad r'(\varphi) > 0 \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow r(\varphi) \uparrow$$

$$x = r \cos \varphi = \frac{3 \cos^2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

$$y = r \sin \varphi = \frac{3 \cos \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

max. pont?

$$\underline{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

max. pontban $\underline{r}'$ vízszintes

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \right)'_{\varphi} = \frac{3 - \sin \varphi \sin^2 \varphi + 3 \cos \varphi \cdot 2 \sin \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2}$$

$$\underline{r}' = (3 - \sin \varphi \sin^2 \varphi + 3 \cos \varphi \cos \varphi)$$

NEH JO! 😞

$$x^3 + y^3(x) = 3xy(x)$$

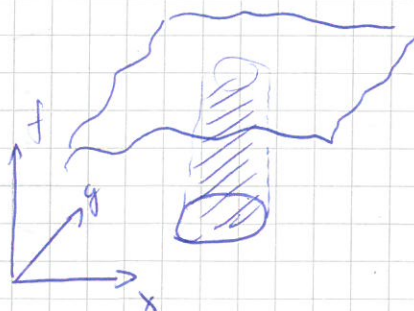
$$3x^2 + 3y^2 y' = 3y + 3xy' \quad \text{így oldható meg.}$$

Itt a polarizáció nem segít.

Integrál

$$f(x, y), \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \iint_D f(x, y) dA$$

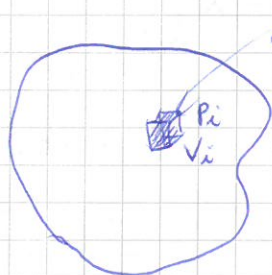


$$\sum f(x_i, y_i) \mu(T_i) \rightarrow \text{konvergál}$$

$$f(x, y, z) \quad D \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz := \iiint_D f(x, y, z) dV$$

$\mathbb{R}^3$ -ban nincs szép geometriai szemléltetése



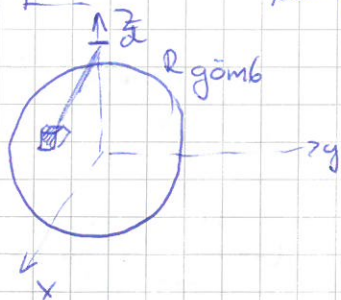
$$\sum f(p_i) \mu(V_i) \rightarrow \iiint_D f dV$$

↑ mérték

Gravitációs potenciál:

$$\mu = \gamma \frac{M}{d}$$

R gömb, γ állandó súlyerő



$$\mu(d) = ?$$

fókus

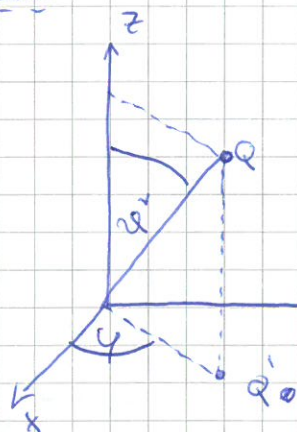
$$V_i \quad (x_i, y_i, z_i)$$

$$\sum \gamma \frac{3V_i}{\|(0,0,d) - p_i\|}$$

$$= \sum_i \gamma \frac{3V_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + (z_i - d)^2}} \rightarrow$$

$$\iiint_{\text{gömb}} \frac{\gamma \delta}{\sqrt{\text{távolság}}} dV$$

gömbi polárkoordináták rendszere:



r : origó és Q távolsága

Q' : Q vetülete xy -síkra

φ : Q' xy -síkra szerkesztés polársöge

ϑ : r - z -tengely söge

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$|\vec{r}| = r \sin \vartheta$$

$$\iiint_{\text{gömb}} \frac{\gamma \delta}{r_{\text{tav}}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\pi \gamma \delta \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \vartheta}} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

↑
Jacobi-mátrix
det.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \gamma \delta \left[2 \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \vartheta} \frac{1}{2dr} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} r^2 \sin \vartheta dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \gamma \delta \frac{1}{dr} r^2 \left(\sqrt{d^2 + r^2 + 2dr} - \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr} \right) dr d\varphi =$$

$$d+r - (d-r)$$

HF: mi van,
ha $d < R$
itt lesz
váltás
gömbön belül.

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \gamma \delta \frac{2}{d} r^2 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \gamma \delta \frac{2}{d} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \gamma \delta \frac{2}{d} \frac{R^3}{3} d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3} \gamma \delta \frac{1}{d} = \gamma M \frac{1}{d}$$

a nagy integrált gömb pontsűrűség tekintetében az origóban.

TÖMEGELŐRŐLÉS