

Volt: magasabb momentumok.

$$m_2 = E(X^2)$$

$$m_2^c = E((X - E(X))^2) \text{ ugye.}$$

ferdeség, lapultság is előjön.

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$\text{All: } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

$$\overline{X \cdot Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

$$\overline{X} \underbrace{\sum_{i=1}^n Y_i}_{n \cdot \overline{Y}} = n \cdot \overline{Y} \cdot \overline{X}$$

lesz. Σ nem
látjuk a dián.

Van korrigált kovariancia is

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$$

$$(X_i, Y_i) \text{ eloszlása} \equiv (X, Y) \text{ eloszlása.}$$

(X_i, Y_i) és (X_j, Y_j) független, ha $i \neq j$.
ez nem mindig.

$$\frac{n}{n} E(XY) - \frac{1}{n^2} \cdot n E(XY) - \frac{1}{n^2} n(n-1) E(X)E(Y)$$

$$E(\hat{C}) = \frac{n-1}{n} C(X, Y) \text{ korrigált.}$$

empirikus kovariancia együttható.

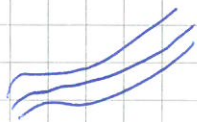
⊕ Bayes - becslés

empirikus elosulásfüggvény.

$$F(x) = P(X \leq x).$$

legyen $g_n(x) = \begin{cases} \bar{x}^n & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{andó} \end{cases}$ pontankénti konvergencia

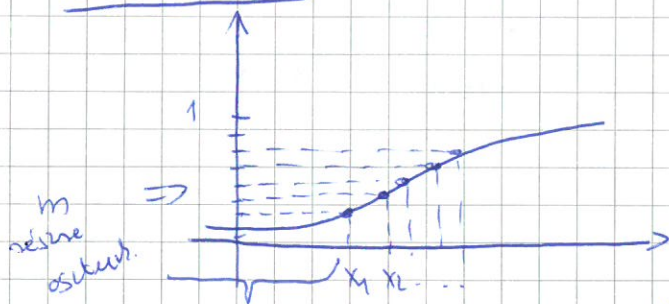
pontankénti konvergencia nem elég! Kell a Glivenko - Cantelli-tétel!



Pontankénti konvergenciát tudjuk. De végtelen sok ponton van

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| \xrightarrow{mb} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

G-C-tétel:



F monoton nem csökkenő.

legyen $m \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges. $x_i = \inf \{x : F(x) = \frac{i}{m}\}$.

$x_0 = -\infty$, $x_m = \infty$ is lehet. legyen $x_{i-1} < x < x_i$.

$$F_n^*(x) - F(x) \leq F_n^*(x_i) - F(x_{i-1}) = F_n^*(x_i) - F(x_i) + \frac{1}{m}$$

1. becsles

$$F_n^*(x) - F(x) \geq F_n^*(x_{i-1}) - F(x_i) = F_n^*(x_{i-1}) - F(x_{i-1}) - \frac{1}{m}$$

2. becsles.

Ha $x_{i-1} < x < x_i$

$$|F_n^*(x) - F(x)| \leq \left\{ |F_n^*(x_{i-1}) - F(x_{i-1})| + \frac{1}{m} \right\} \leq$$

②

$$\leq \max_{0 \leq i \leq m} |F_n^*(x_i) - F(x_i)| + \frac{1}{m}$$

$\rightarrow$ 0. minden n mellett az i .
 biztos $\forall x$ -re igaz.

$$\Delta_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$$

enne is igaz lesz.

$$\Delta_n \leq \max_{0 \leq i \leq m} |F_n^*(x_i) - F(x_i)| + \frac{1}{m}$$

$\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ m bármilyen nagy lehet

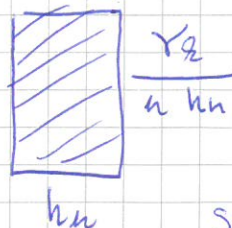
$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n > \frac{1}{m}\right) = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{Z}^+) \Rightarrow P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0\right) = 1.$$

ebből már látszik a konvergencia. $\forall x$ -ből végtelen sok van.

Deriválással meghatározhatjuk sűrűség függvényt. De ezt nem lehet deriválni.



terület: $\frac{y_k}{n} \cdot h_n \cdot \frac{1}{h_n}$



Boxplot is van
 kvantilisokkal

SŰRŰSÉGHISTOGRAMOT
 KAPUNK

Ártán nyitjuk az RStudio-t.

Becsési módszerek.

- Maximum likelihood becslés.

$$L(\theta) = f_{\theta, X}(X) = f_{\theta}(x_1) \cdot f_{\theta}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\theta}(x_n).$$

$$\sum_i (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_i x_i - n\hat{\mu} = 0$$

$$n\bar{X} - n\hat{\mu} = 0$$

$$\boxed{\bar{X} = \hat{\mu}}$$

Momenter módszer

Egyenlítés

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = m_1$$

variancia

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$m_2 = E(X^2) = \frac{(a-b)^2 + 3(a+b)^2}{12}$$

$$M_1 = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}$$

$$M_2 = \frac{(\hat{a} - \hat{b})^2 + 3(\hat{a} + \hat{b})^2}{12}$$

számolható.

Exp: $X \sim \exp(\lambda)$

$$m_1 = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow M_1 = \bar{X} = \frac{1}{\hat{\lambda}}.$$