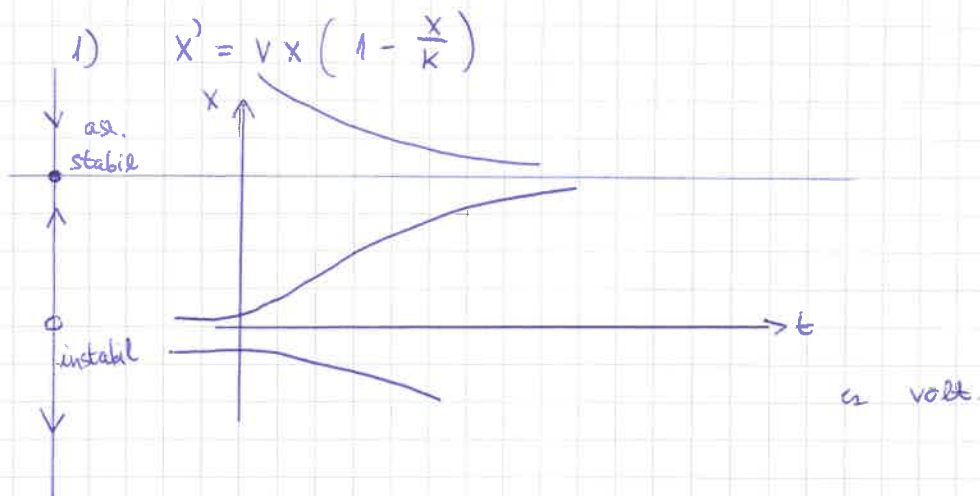


Multidirek.

Def: X_* az $X' = f(x)$ egyenlet egyensúlyi helyzete, ha $f(X_*) = 0$.

X_* stabil, ha $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (ha \|X(0) - X_*\| < \delta, \text{ akkor } \|X(t) - X_*\| < \varepsilon, t \geq 0)$.

X_* instabil, ha nem stabil.

X_* aszimptotikusan stabil, ha stabil és $\exists \Delta > 0$, hogy ha $\|X(0) - X_*\| < \Delta$, akkor $X(t) \rightarrow X_*, t \rightarrow \infty$.

Legyen f folytonosan differenciálható innenről.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(X_*) \text{ Jacobi-matrix}$$

$$y^{(1)} = Ay \text{ az } x^{(2)} = f(x) \text{ linearizálta } X_* \text{ körül.}$$

(1) „hasonlóan viselkedik” a 0 körül, mint a (2) az X_* körül.

Tétel: Ha $A \forall \lambda$ sajátértékére $\operatorname{Re} \{\lambda\} < 0$, akkor X_* as. stabil

(2)-re.

Ha $\exists \lambda$ hogy $\operatorname{Re} \{\lambda\} > 0$, akkor X_* instabil.

Ila $\forall \lambda \operatorname{Re}\{\lambda\} \leq 0$ és $\exists \lambda \operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$, akkor a lineáris rendszer elég, lehet aszimptotikusan stabil vagy instabil is.

1 dimenzióban: $f'(x_*) = 0$

$$f'(x_*) > 0 \quad \text{instabil}$$

$$f'(x_*) < 0 \quad \text{stabil}$$

$$f'(x_*) = 0 \quad ? \quad \begin{array}{l} \dot{x} = x^3 \\ \dot{x} = -x^3 \end{array} \quad \text{példák.}$$

Logisztikus egyenlet:

$$\dot{x} = \underbrace{r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)}_{f(x)}$$

e.h.: 0 és K.

$$\begin{aligned} f'(x) &= r \left(1 - \frac{x}{K}\right) + r x \left(-\frac{1}{K}\right) = \\ &= r \left(1 - \frac{2x}{K}\right) \end{aligned}$$

$$f'(0) = r > 0 \quad \text{instabil.}$$

$$f'(K) = -r < 0 \quad \text{stabil (asz.)}$$

— 0 —

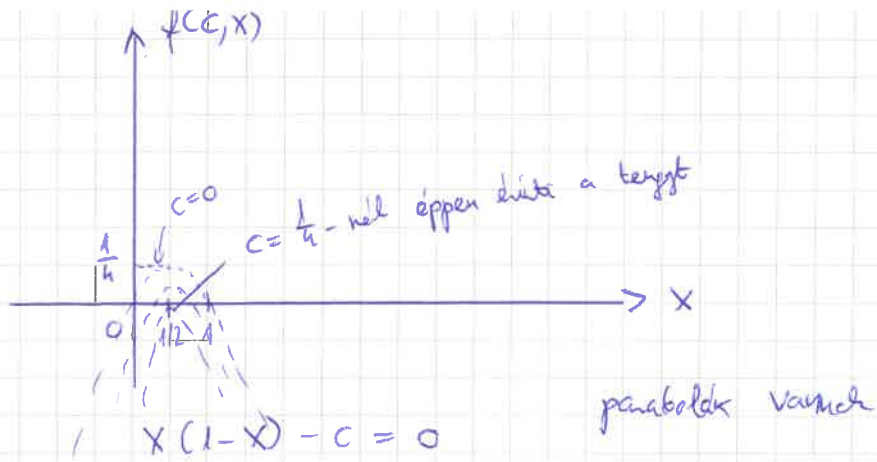
Logisztikus egyenlet konstans halálszáttal:

$$\dot{x} = \underbrace{r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)}_{f(x,x)} - \underbrace{c}_{f(c,x)} \quad r, K > 0, \quad c \geq 0$$

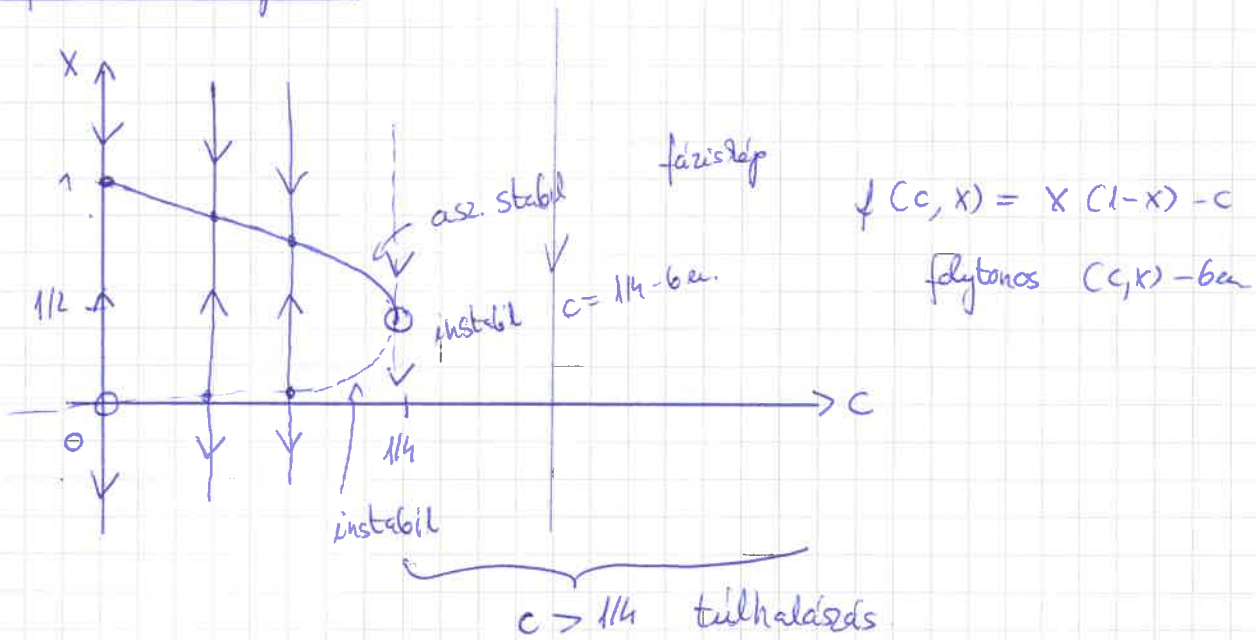
Egens.h.:

$$\begin{aligned} \text{Tf} \quad r, K = 1. \quad \dot{x} &= x(1-x) - c \quad \text{lesz} \\ f(c,x) &= 0. \quad r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - c = 0 \end{aligned}$$

Itt lehet fixponti analízis



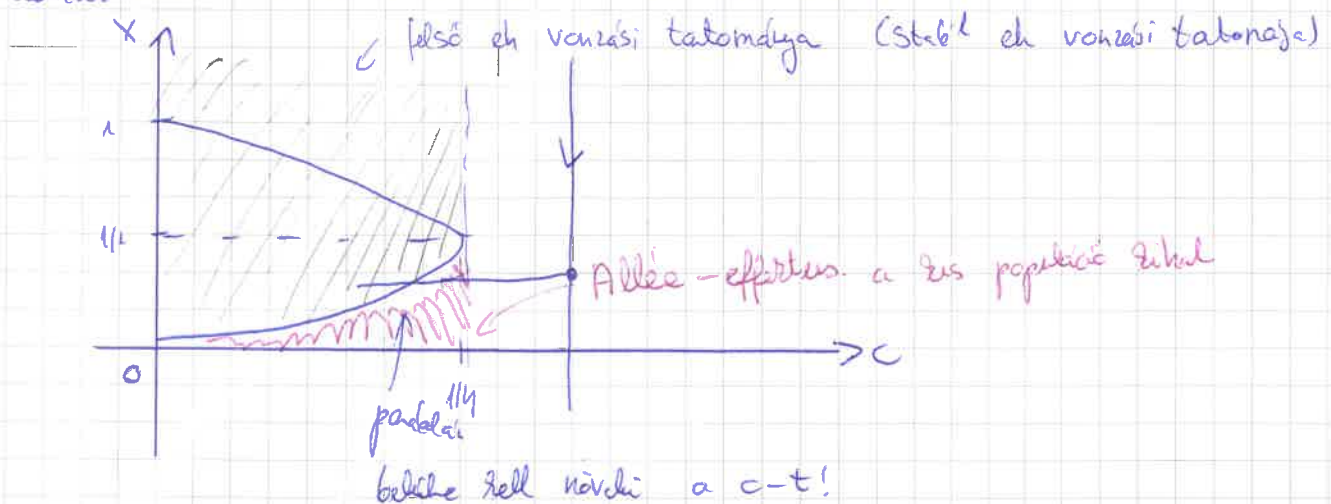
Bifurkációs diagram.



$\frac{1}{2}$ alá csökkenés $\Rightarrow$ túlhaladás van.

Ha észrevesszük, hogy a populáció $\frac{1}{2}$ alá csökkent, akkor

túlhaladásunk $\Rightarrow$ csökkentés a c értékét



Több faj interakciója

1) Lotka - Volterra modell.

Adriai - tengeri első VH.

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}^+$$

$$x' = ax - bxy$$

ragadozó
↕ (fajátva)
zsákmány

$$y' = -cy + dxy$$

$$y=0 \Rightarrow x \text{ exp. nő}$$

$$x=0 \Rightarrow y \text{ kihal}$$

Nullklina: ahol a vektormező valamilyen komponense nulla.

$$x' = 0$$

$$ax - bxy = 0$$

$$x(a - by) = 0$$

$$\swarrow$$

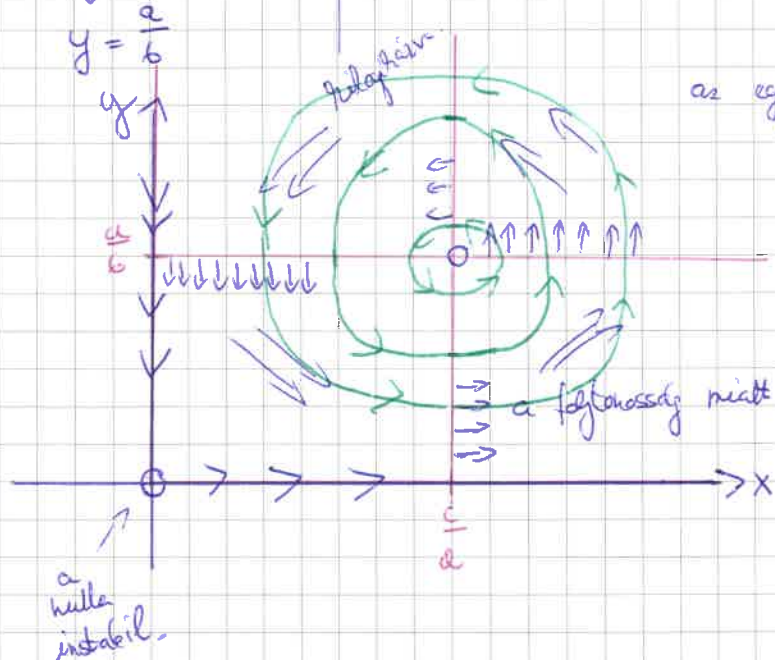
$$x = 0$$

$$\downarrow$$

$$a = by$$

$$y = \frac{a}{b}$$

Ábrázoljuk.



$$y' = 0$$

$$-cy + dxy = 0$$

$$y(-c + dx) = 0$$

$$\swarrow$$

$$y = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{c}{d}$$

az egyensúlyi helyzetek:

$$x' = 0 \wedge y' = 0$$

$$(0, 0) \text{ és}$$

$$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

$$x = \frac{a}{b} \text{ esetén}$$

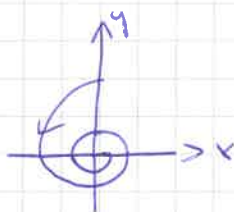
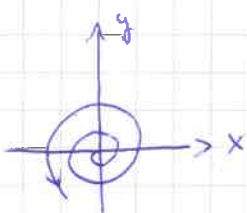
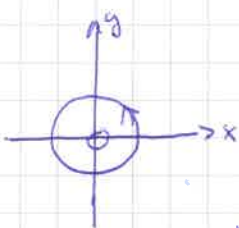
$$y' = -c \frac{a}{b} + d \frac{a}{b} y \quad \text{növ. lineáris függvény}$$

erőlt. konst. el. növeked.

$$y = \frac{a}{d} \text{ esetén is nyilván}$$

A nullhelyek által határolt síkrészekben a megoldások koordinátái monotonok időben.

Lehetséges:



ilyenkor.

Helyre van most?

Trükk ehhez:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dy}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{ax - bxy}{-cy + dx} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)}$$

szétválasztható differenciál x és y között.

$$\int \frac{dx - c}{x} dx = \int \frac{a - by}{y} dy$$

$$\int \left(d - \frac{c}{x}\right) dx = \int \left(\frac{a}{y} - b\right) dy$$

$$dx - c \ln|x| = a \ln|y| - by + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

$$x, y \geq 0$$

$$H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

első integrál: olyan mennyiség, ami konstans a megoldás mentén,
a megoldás a szintvonalak mentén halad

Milyen ez a függvény?

lokális szélsőértékek:

$$H'_x = d - \frac{c}{x} = 0 \quad x = \frac{c}{d}$$

$$H'_y = b - \frac{a}{y} = 0 \quad y = \frac{a}{b}$$

itt lehet szélsőértéke.

Hesse-mátrix:

$$\begin{pmatrix} H''_{xx} & H''_{xy} \\ H''_{yx} & H''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}$$

pozitív definit.
⇓
H konvex függvény.

$(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ -ben minimum van

síntvonalai: $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ körül zárt görbék Az ábrán zölddel.

A görbék az egész síkot kitöltik

A megoldások periodikusok. Kivéve a két egyensúlyi helyzet és
a két tengely. (x, y) T-periodikus megoldás

$$x' = ax - by$$

$$\frac{x'}{x} = a - by \quad \Bigg/ \int_0^T dt$$

$$\int_0^T \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^T (a - by) dt$$

$$\int_{x(0)}^{x(T)} \frac{1}{x} dx = \int_0^T (a - by) dt$$

$$\int_{x(0)}^{x(T)} \frac{1}{x} dx = \left[at \right]_0^T - b \int_0^T y dt$$

$$\left[\ln |x| \right]_{x(0)}^{x(T)} = aT - b \int_0^T y dt$$

6

$$\ln X(T) - \ln X(0) = \ln X(0) - \ln X(0) = 0.$$

↑
T-periodikus
megoldás

$$\int_0^T y \, dt = aT \Leftrightarrow \int_0^T y \, dt = \frac{a}{b} T$$

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T y \, dt}_{y \text{ átlaga}} = \frac{a}{b}$$

ugyanígy kapható:

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x \, dt = \frac{c}{d}}$$

A populáció átlagai a periodikus megoldások mentén:

$$x_{\text{átlag}} = \frac{c}{d} \quad y_{\text{átlag}} = \frac{a}{b}$$

Tfű a populáció nagyságával arányosan halásznak.

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - ex \\ y' = -cy + dxy - fy \end{cases}$$

e, f poz. param.

$$x' = (a-e)x - bxy$$

$$y' = \cancel{cx + fx} y - (c+f)y + dxy$$

És u.a. az egyenlet a, c helyett $(a-e)$ és $c+f$ paraméterekkel.

$$X_{\text{dle}}^{\text{hal}} = \frac{c+t}{d}$$

$$y_{\text{dle}}^{\text{hal}} = \frac{a-e}{b}$$

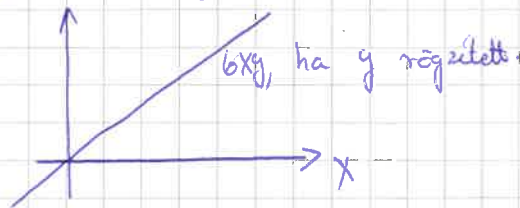
$$X_{\text{dle}} = \frac{c}{d}$$

$$y_{\text{dle}} = \frac{a}{b}$$

es összhangban van a megfigyeléssel.

Interakció:

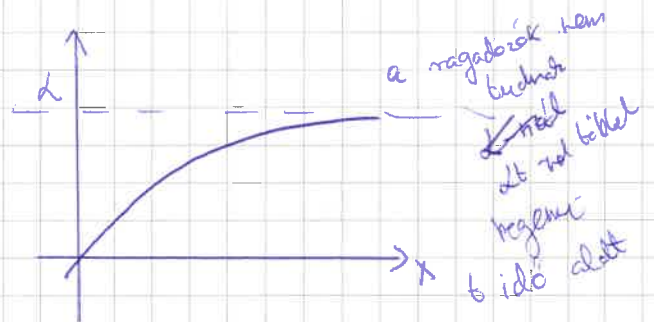
1) Kolling 1. típus: bxy (Lotka-Volterra)



2) Kolling 2. típus:

$$\frac{dxy}{x+\beta}$$

ha $x \rightarrow \infty$

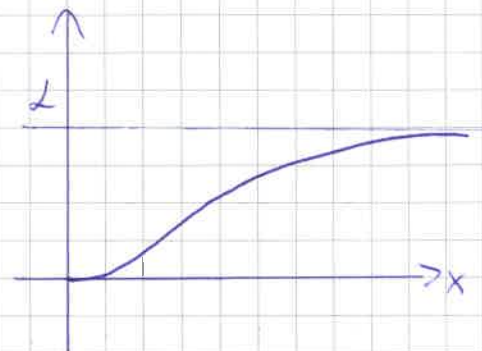


3) Kolling 3. típus

$$\frac{d x^2 + c}{x^2 + \beta} \quad z > 1.$$

$$\rightarrow L \quad \text{ha } x \rightarrow \infty$$

de a nullában
0 a deriváltja



pl: madarak vs. rovarok
his populációjuk sokkal nem
fogható vadász, nem
veszt el

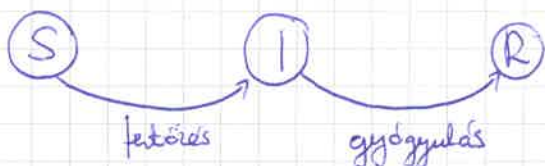
gőványtejedés

SIR - model:

S: фодэконуак

i: fertőzött

R: felgyógyult



Tfh muncs születés/halálra

a populáciu jol' revet

a felgyógyultak immunitást

a factors contact-media tested

a győgyülés a rátaival történik

$$\int S = -\beta S i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = + \beta S i - 21 \end{array} \right.$$

$$R' = +\alpha I$$

199 what's fel.

Fertőzéssel száma:

Száma:

I . C . $\frac{S}{N}$. P

↑ ↑ ↓

fertőzött 1 fertőzött egyén
száma ennel találkozik

P (megfertőzi)

PC (ennek fogakora)

N a teljes populáció száma

KONTAKTUSOK SZÁMA

$$N = S + I + R$$

N Ironstans

$$N' = S' + I' + R' = 0$$

Így $\beta = \frac{Cp}{N}$ és az első egyenletet kapjuk.

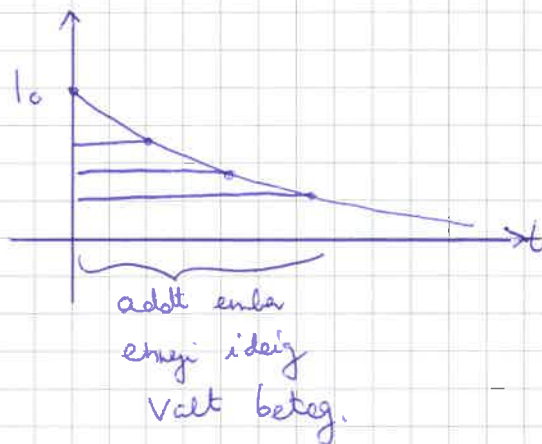
Betegség átlagos hossza

Tfh $S=0$.

$$I(0) = I_0$$

$$I' = -\alpha I$$

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{lesz.}$$



$$\frac{1}{I_0} \int_0^{\infty} I(t) dt = \frac{1}{I_0} \int_0^{\infty} I_0 e^{-\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \dots = \frac{1}{\alpha} \quad \text{ez az átlag.}$$

Észrevétel: • R nem játszik szerepet az első két egyenletben.

$$\begin{cases} S' = -\beta Si \\ I' = \beta Si - \alpha I \end{cases}$$

$$R = N - S - I \quad \text{számolható.}$$

• Ha I_0 és S_0 pozitív, akkor S és I pozitív marad.

$$S' = -\beta Si$$

$$\frac{S'}{S} = -\beta i \quad / \int_0^t ds$$

$$\int_0^t \frac{s'}{s} ds = -\beta \int_0^t I ds$$

$$\ln |S(t)| - \ln |S(0)| = -\beta \int_0^t I ds$$

$$S(t) = S_0 \cdot e^{-\beta \int_0^t I ds}$$

hasznosan: $I(t) = I_0 \cdot e^{-\int_0^t (\beta S(s) - \alpha) ds}$ eset pozitív

- S csökkenő, ezt is látjuk S alulról felülről.

csökken és alulról felülről: S konvergen

- R növekvő, $R \leq N \Rightarrow R$ is konvergen

- $I = N - S - R$ ez is konvergens lesz.

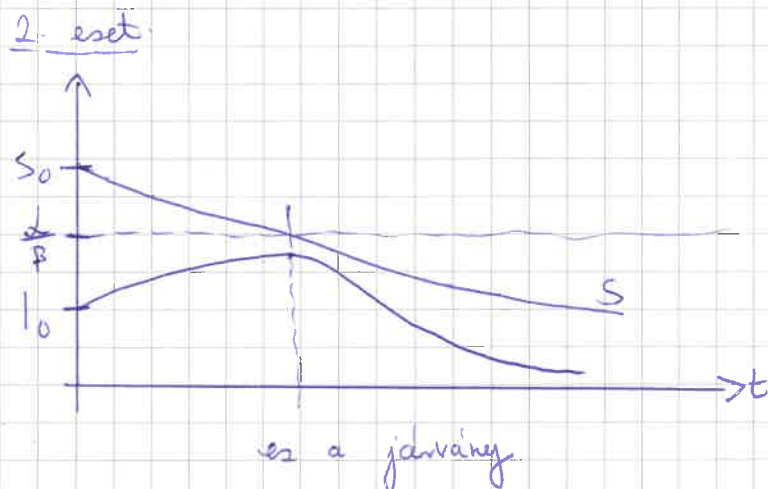
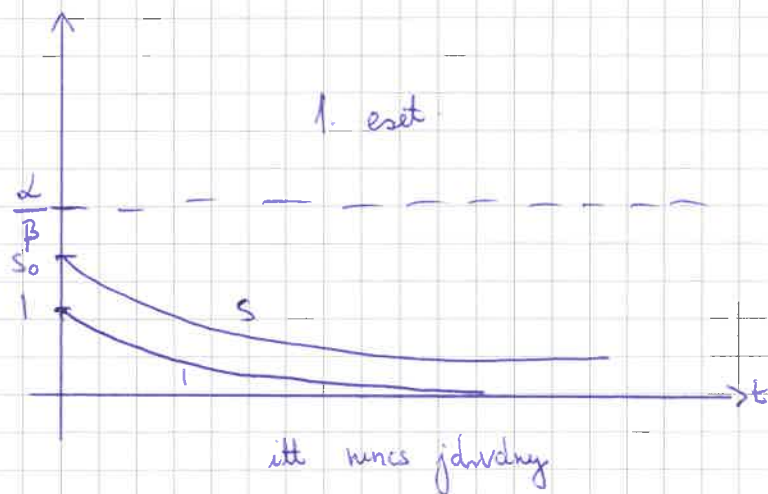
Tf h $I_\infty > 0$ Ekkor $R(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$
 $R \leq N \downarrow$

Emiatt $I_\infty = 0$.

- $I' = \beta SI - \alpha I = I(\beta S - \alpha)$

$$I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{\alpha}{\beta}$$

2 eset van.



ami kell: $I'(0) = I_0 (\beta S_0 - \alpha) =$

$$= \alpha I_0 \left(\frac{\beta}{\alpha} S_0 - 1 \right)$$

es az R_0 : alap reprodukciós szám

Meghatároz 1 fertőzött hány embert fertőz meg.

$$R_0 > 1 \rightarrow I'(0) > 0$$

$$R_0 < 1 \Rightarrow I'(0) < 0$$

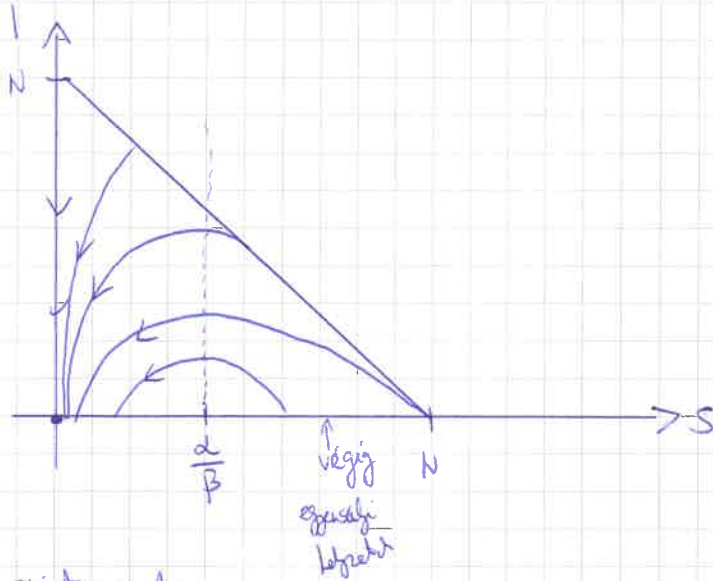
$$\text{járvány} \Leftrightarrow R_0 > 1$$

$$\frac{dS}{dI} = \frac{S'}{I'} = \frac{-\beta SI}{I(\beta S - \alpha)} = \frac{\beta S}{\alpha - \beta S} \Leftrightarrow \int \frac{\alpha - \beta S}{\beta S} dS = \int dI$$

$$\int \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{S} - 1 \right) dS = I + C$$

$$\frac{d}{dt} \ln |S| - S = 1 + c$$

$$H(S, I) = \frac{d}{\beta} \ln S - S - I = c \quad c \in \mathbb{R} \text{ első integrál.}$$



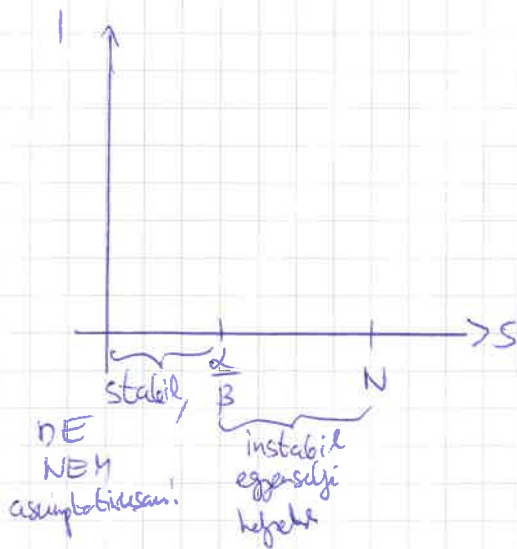
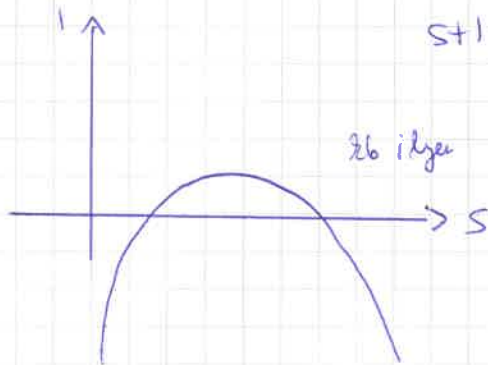
H egy szintvonala:

$$I = \frac{d}{\beta} \ln |S| - S + c$$

$$S \geq 0$$

$$I \geq 0$$

$$S + I \leq N$$



Az első integrál konstans $\Rightarrow$

$$\frac{\alpha}{\beta} \ln S_{\infty} - S_{\infty} - I_{\infty} = \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 - S_0 - I_0$$

$I_{\infty} = 0$, ezt tudjuk.

Tíh $I_0 = 0$.

$$\frac{\alpha}{\beta} \ln S_{\infty} - S_{\infty} = \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 - S_0$$

$$\frac{\alpha}{\beta} (\ln S_{\infty} - \ln S_0) - S_{\infty} + S_0$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{S_{\infty}}{S_0} = S_0 \left(\frac{S_{\infty}}{S_0} - 1 \right)$$

$$\ln \frac{S_{\infty}}{S_0} = \underbrace{\left(\frac{\beta}{\alpha} S_0 \right)}_{R_0, \text{ ugye}} \left(\frac{S_{\infty}}{S_0} - 1 \right) \quad - \quad \frac{S_{\infty}}{S_0} = 3$$

$$\ln 3 = R_0 (3 - 1) \quad \text{Végállapot - egyenlet.}$$

$\Downarrow$

3 norm. köréltetési

$$\left. \begin{matrix} 3 \\ S_0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow S_{\infty} \text{ jón. } \cancel{S_{\infty}} \rightarrow S$$

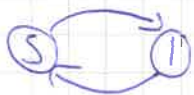
$S_0 - S_{\infty}$: energi értéke függ az
a bekezdést

$$I \text{ maximális} \Leftrightarrow S = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} - I_{\max} = \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 - S_0 - I_0$$

$$I_{\max} = I_0 + S_0 + \frac{\alpha}{\beta} (\ln \frac{\alpha}{\beta} - \ln S_0 - 1)$$

SIS - modell



$$S' = -\beta SI + \alpha I$$

$$I' = \beta SI - \alpha I$$

$$N = S + I \Leftrightarrow S = N - I$$

$$I' = \beta (N - I) \cdot I - \alpha I = I (\underbrace{\beta N - \alpha}_{\text{transmissio} = K} - 1)$$

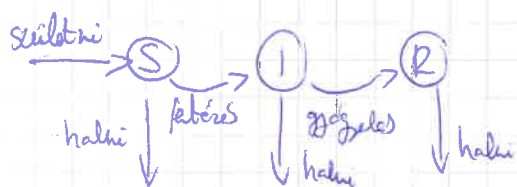
$$I' = I (K - 1) = \underbrace{KI \left(1 - \frac{1}{K}\right)}_{\text{logisztikus egyenlet } r=K-1 \text{ val.}}$$

logisztikus egyenlet $r=K-1$ val.

Ez csak fixpont volt.

SIR demográfiaival

Tfh μ a születési és halálozási ráta.



módosítás:

$$\begin{cases} S' = -\beta SI + \mu N - \mu S \\ I' = \beta SI - \alpha I - \mu I \\ R' = \alpha I - \mu R \end{cases}$$

$$N' = S' + I' + R' = \mu (N - S - I - R) = 0.$$

Tfh $N=1$. (Skalárással elérhető).

$R = 1 - S - I$, egyenlet elhagyható.

$$\begin{cases} S' = -\beta Si + \mu - \mu S \\ I' = \beta Si - \alpha I - \mu I \end{cases}$$

egyensúlyi helyzeteket nézzük

$$\begin{cases} -\beta Si + \mu - \mu S = 0 \\ \beta Si - \alpha I - \mu I = 0 \end{cases}$$

$$I(\beta S - \alpha - \mu) = 0$$

$$\boxed{I = 0}$$

$$\beta S - \alpha - \mu = 0$$

$$\boxed{S = \frac{\alpha + \mu}{\beta}}$$

nt az elsőbe:

$$-\beta \frac{\alpha + \mu}{\beta} I + \mu - \mu \frac{\alpha + \mu}{\beta} = 0$$

$$-(\alpha + \mu)I + \mu - \mu \frac{\alpha + \mu}{\beta} = 0$$

vagy $\mu = \mu S \Leftrightarrow \boxed{S = 1}$

$(1, 0)$: betegségmentes egyensúly „DFE”.

~~$\alpha + \mu$~~

$$\boxed{I = \mu \left(\frac{1}{\alpha + \mu} - \frac{1}{\beta} \right)} > 0$$

ha $\boxed{\beta > \alpha + \mu}$

akkor van értelme

$$(S_*, I_*) = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}, \mu \left(\frac{1}{\alpha + \mu} - \frac{1}{\beta} \right) \right).$$

endemiás egyensúly „EE”

Locális stabilitás

$$f(S, I) = -\beta SI + \mu - \mu S$$

$$g(S, I) = \beta SI - \alpha I - \mu I$$

$$J = \begin{pmatrix} f'_S & f'_I \\ g'_S & g'_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha - \mu \end{pmatrix}$$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \alpha - \mu \end{pmatrix}$$

felsőtrianguláris $\lambda_1 = -\mu < 0$

$$\lambda_2 = \beta - \alpha - \mu \stackrel{?}{<} 0$$

$$\beta < \alpha + \mu \text{ ekkor lenne stabil}$$

DFE asz. stabil, ha $\beta < \alpha + \mu$.

instabil, ha $\beta > \alpha + \mu$.

(Hf.) endemikus egyensúly aszimptotikusan stabil, ha létezik, azaz $\beta > \alpha + \mu$.

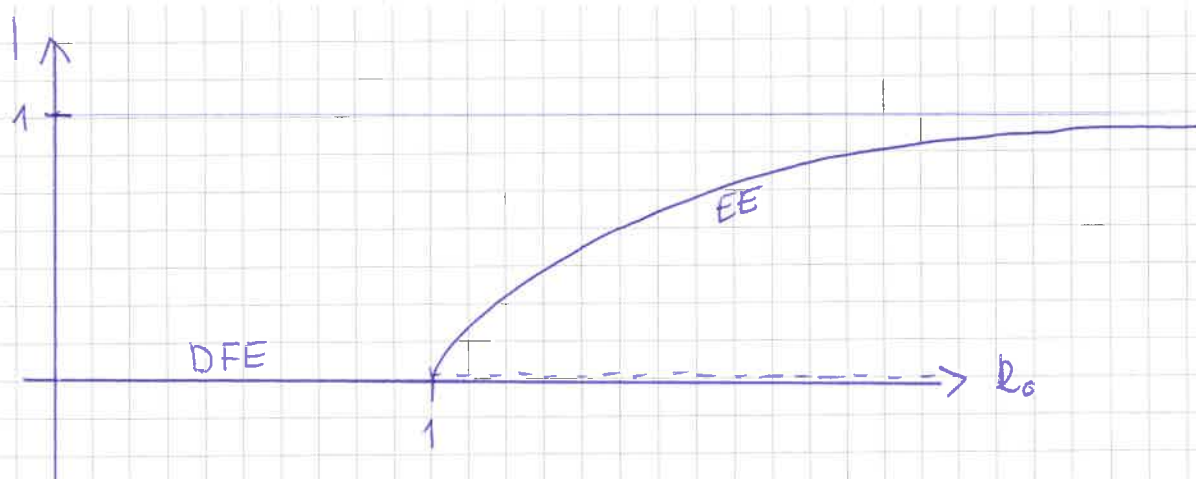
$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha + \mu}$$

$R_0 < 1$: DFE stabil és

~~∃~~ endemikus egyensúly

$R_0 > 1$: DFE instabil és

~~∃~~ ∃ EE. asz. stabil.



$$(S_*, I_*) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1) \right)$$

globális stabilitás:

1. $R_0 < 1$:

$$\dot{I} = I(\beta S - \alpha - \mu) < -\epsilon I$$

$$S < 1, \quad \beta < \alpha + \mu$$

$$\beta S - \alpha - \mu < 0 \Rightarrow \beta S - \alpha - \mu \leq -\epsilon \quad \epsilon > 0.$$

Emiatt: $\dot{I} \leq -\epsilon I \Rightarrow \boxed{I(t) \leq I_0 e^{-\epsilon t}} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.$

es. kijött. $S \rightarrow 1.$

Tehát $I \rightarrow 0$ és $S \rightarrow 1$

$(1, 0)$ globálisan aszimptotikusan stabil

GAS

② $R_0 > 1$:

$$V(S, I) = S - S_* - S_* \ln \frac{S}{S_*} + 1 - I_* - I_* \ln \frac{I}{I_*}$$

Ljapunov-függvény és. Ljapunov II. tétel,