

alt. példa:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = 1 - \lambda\beta\gamma \text{ egyszerűen.}$$

- o -

Közösleges differenciálegyenletek (KDE)

Def: KDE olyan függvényegyenlet, amiben az ismeretlen függvény egyváltozós,
a deriváltja(i) is szerepel(nek) benne ugyanazzal az argumentummal, mint
a függvény argumentuma.

$n \geq 1$ egész. $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ nyílt halmaz.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.

DE rendje: Legmagasabb rendű derivált rendje. Az egyenletben.

Elsőrendű KDE: $\dot{X} = f(t, X)$

t_0, X_0 pont $\in D$

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \text{ kezdeti érték - probléma. (KÉP)}$$

megoldás: $X = X(t)$ függvény

autonóm KDE:

$$\dot{X} = g(X)$$



Peano-tétel: $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ nyílt, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos,

$(t_0, X_0) \in D$. Ekkor $\exists I$ intervallum (nyílt), hogy $t_0 \in I, \exists x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

megoldása a KÉP-nél.

Def: $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-feltételt lokálisan x -ben, ha bármely $(t_1, x_1) \in D$ $\exists$ olyan U nyílt környezet D -ben és $L = L(t_1, x_1)$,
 $\forall (t_1, x_2) \in U$ $\|f(t_1, x_1) - f(t_1, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$. 0

"A számszerűségi feltétel."

fgvny C^1 sima $\Rightarrow$ Lip-feltétel

Picard - Lindelöf - tétel:

$D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ nyílt, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan Lip. folytonos $(t_0, x_0) \in D$.

Ez $\exists I$ nyílt intervallum, $t_0 \in I$.

$\exists!$ $x: I \rightarrow D$ mo a KÉP-nél.

Def: $x: I \rightarrow D$ és $y: J \rightarrow D$ megoldások a KÉP-nél,

ha $I \cap J \neq \emptyset$. Ekkor y az x folytatása.

x nem folytatható, ha nincs neki folytatása.

Ekkor x maximális megoldás

$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ nem folytatható megoldását

$\varphi(t; t_0, x_0)$ -al jelöljük

All: $\forall$ folytatható megoldásnál $\exists$ nem folytatható folytatása

Tétel: $\forall$ amely $(t_0, x_0) \in D$ -re ha $\varphi(\cdot; t_0, x_0)$ az ET -je

$(L; \beta)$, akkor két eset lehetséges:

• $\beta = \infty$

• $\beta < \infty$ $\forall K \subset D$ zárt és zárt, $\exists \varepsilon = \varepsilon(t_0, x_0, K) > 0$

$$\forall t \in (\beta - \epsilon, \beta) \quad \varphi(t, t_0, x_0) \in D \setminus K.$$

Közelítő állítás igaz α -ra is.

Tétel: $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ nyílt, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan Lip.-folytonos,
 $\varphi(t_0, x_0): (a, \beta) \rightarrow D$, $I \subseteq (a, \beta)$ korlátos és zárt,
 $t_0 \in I$.

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(t_0, x_0, \epsilon, I) > 0$, hogy

$$\text{ha } (t_1, x_1) \in D, |t_1 - t_0| < \delta, \|x_1 - x_0\| < \delta,$$

I része a $\varphi(\cdot; t_1, x_1)$ $\mathbb{R}^1$ -jének és

$$\forall t \in I: \|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_1, x_1)\| < \epsilon.$$

Azaz a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételtől.

Példa jön.

Folytonos idejű egyfajás modellek:

1.) Exponenciális növ./csökk. $k=1$

$$\begin{cases} X' = rX \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

$X(t)$: populáció nagysága

r : szaporodási ráta.

k idő alatt 1 egyednek átlagosan rk utódja születik.

$$X' = rX$$

szétválasztható változójú
diff. egyenlet

X -es és t -tagokat külön oldalra rendezve, hogy

X szétválasztandó legyen

$X \equiv 0$ megoldás, mert $\frac{0}{0} = r \cdot 0$.

$$\frac{X'}{X} = r$$

$$\frac{1}{X} \frac{dx}{dt} = r$$

$$\int \frac{1}{X} dX = \int r dt$$

$$\ln|X| + C_1 = rt + C_2$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\ln|X| = rt + \underbrace{C_2 - C_1}_{C_3}$$

$$C_3 \in \mathbb{R}.$$

$$|X| = \underbrace{e^{C_3}}_{C_4} \cdot e^{rt}$$

$$C_4 \in \mathbb{R}^+.$$

$$X = \underbrace{\pm C_4}_C e^{rt}$$

$C \in \mathbb{R}$

$$C \neq 0$$

$C = 0$ - val

$X \equiv 0$ - t is

totalmárta.

alt megoldás:

$$X(t) = C e^{rt}, \quad C \in \mathbb{R}$$

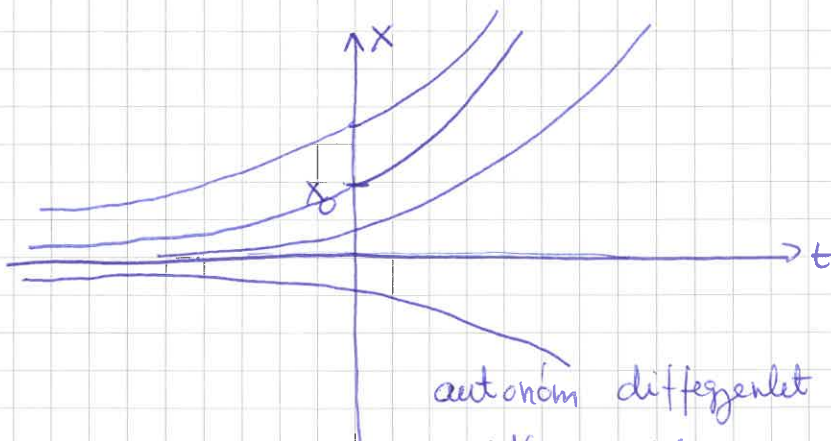
KÉP:

$$X(t=0) = X_0 = C e^{r \cdot 0} = C \Leftrightarrow \boxed{X_0 = C}$$

$$\boxed{X(t) = X_0 \cdot e^{rt}}$$

Fázislép

tfh $r > 0$.



autonóm differenciál
megoldások időben
eltérhetnek.

Def: X_* egyensúlyi helyzete az

$$X' = f(X) \text{ -nek DE-nek, ha}$$

$$f(X_*) = 0. \quad \frac{X'}{X} = r \text{ volt. Szaporodási ráta.}$$

$$\frac{X'}{X} = r \cdot \left(1 - \frac{X}{z}\right) \Leftarrow$$

2. példa:

$$X' = rX \left(1 - \frac{X}{z}\right) \quad \frac{\text{logisztikus egyenlet}}{r, z \in \mathbb{R}^+ \text{ param.}}$$

z : kapacitás / állatférőhelyesség.

$$X \left(1 - \frac{X}{z}\right) = 0$$

$$\swarrow \\ X = 0$$

$$\searrow \\ X = z \quad \text{megoldások, egyensúlyi helyzetek.}$$

$$\frac{X'}{X \left(1 - \frac{X}{z}\right)} = r$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{X \left(1 - \frac{X}{z}\right)} dx}_{= rt + c_1} = r t + c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\left(1 - \frac{X}{z}\right) + \frac{X}{z}}{X \left(1 - \frac{X}{z}\right)} dx = \int \left(\frac{1}{X} \cdot \frac{1}{1 - \frac{X}{z}} + \frac{1}{X} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X-z} \right) dx = \ln |X| - \ln |X-z| - \\ = \ln \left| \frac{X}{X-z} \right| + c_2$$

$$\ln \left| \frac{X}{X-z} \right| = rt + c_1$$

$$\frac{X}{X-z} = \pm e^{c_1} \cdot e^{zt}$$

$$X = C_2 e^{zt} X - C_2 z e^{zt}$$

$$X - C_2 e^{zt} X = -C_2 z e^{zt}$$

$$X(t) = \frac{-C_2 z e^{zt}}{1 - C_2 e^{zt}} = \frac{z}{-\frac{1}{C_2} e^{-zt} + 1} = \frac{z}{1 + C e^{-zt}} \quad C \in \mathbb{R}^+$$

$C=0$ -val $X=z-t$ is tatalmazza az de

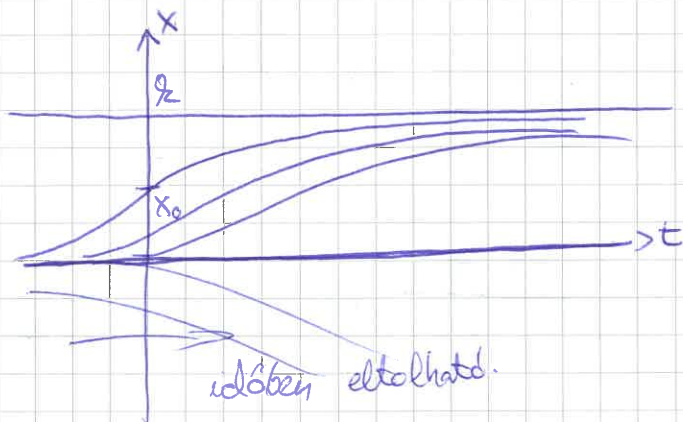
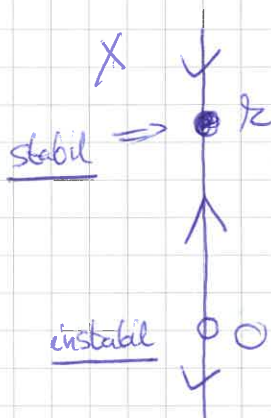
De $x=0$ -at nem!

alt. megold: $X(t) = \frac{z}{1 + C e^{-zt}} \quad C \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{vagy}}$

$$X \equiv 0.$$

HF: $C=?$ úgy $X(0)=X_0$ teljesüljön

Fáziskép:



○ tasítók }
z vané } egyensúlyi helyzet