

Korstruktúra modell

m db korcsoport van

- pl:
1. $\overset{0}{\text{0}} - h$ évesek
 2. $5 - 9 - 11 -$
 - $\vdots$ atd^v

$$X(n) = (X_1(n), X_2(n), \dots, X_m(n))$$

Átmeneti vektor.

$X_i(n)$: i . korcsoportban lakó ember egyedeinek száma az n -edik korcsoportban.

~~XXXXXX~~ $X_1(n+1) = b_1 X_1(n) + b_2 X_2(n) + \dots + b_m X_m(n)$ születési

$$X_2(n+1) = a_1 X_1(n)$$

$$X_3(n+1) = a_2 X_2(n)$$

$\vdots$

atd^v

$$X_m(n+1) = a_{m-1} X_{m-1}(n) + a_m X_m(n)$$

feljebb lépni.

b_i : születési ráta

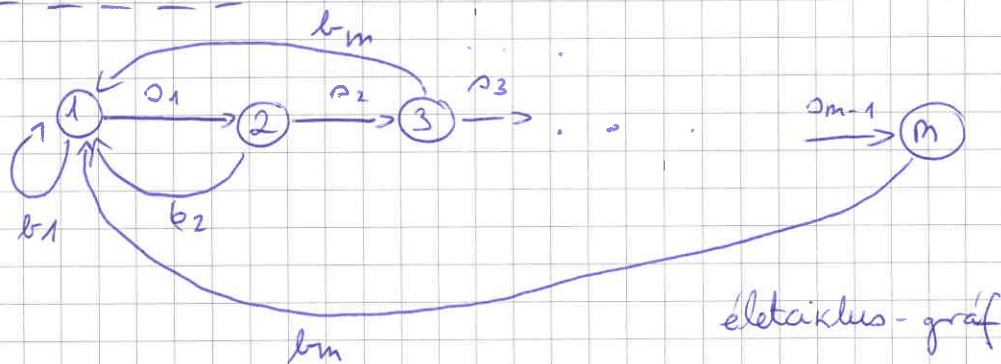
a_i : túlélési ráta

Matricos alak:

$$\begin{pmatrix} X_1(n+1) \\ X_2(n+1) \\ \vdots \\ X_m(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ a_1 & 0 & & \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \\ \vdots \\ X_m(n) \end{pmatrix}$$

① L Leslie-mátrix.

Másik modell:



Tfh L -nek van m db lineárisan független sajátvektora.
(s.v.)

$$V_1, \dots, V_m.$$

Hozzá tartozó sajátértékek: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.
(s.v.)

$$X(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i V_i$$

$$L V_i = \lambda_i V_i$$

$$X(1) = L X(0) = L \sum_{i=1}^m \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i L V_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i V_i$$

indukcióval:

$$X(n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^n V_i$$

$$R = \max_{i=1, \dots, m} |\lambda_i| \quad \text{spektrálsugár.}$$

Tfh: $|\lambda_1| = R$ és $|\lambda_i| < R \quad \forall i > 1 - n.$

$$\frac{X(n)}{R^n} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\lambda_i^n}{R^n} V_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{R} \right)^n V_i$$

$\downarrow$
 0 ha $i > 1$.

Ha n nagy, akkor:

$$\frac{X(n)}{R^n} \approx \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{R} \right)^n V_1$$

$$\Rightarrow \boxed{X(n) = \alpha_1 \lambda_1^n V_1}$$

V_1 : stabil kerekoszlás

Def: A mátrix pozitív, ha $\forall i, j \quad a_{ij} > 0$
 $A > 0$.

Def: A mátrix primitív, ha $\exists k > 0$, hogy
 $A^k > 0$.

Def: A mátrix irreducibilis, $\Leftrightarrow \nexists$ nemtrivialis invariáns altér.
 $\Leftrightarrow$ életciklus-gráf erősen összefüggő.

Perron - Frobenius - tétel:

① Ha A pozitív $\Rightarrow \exists$ 1 szigorúan ~~max~~ domináns sajátértéke,
azaz $\lambda_1: |\lambda_i| < \lambda_1 \quad \forall i > 1$.

Pozitív sajátvektorral

② Ha A primitív $\Rightarrow$ — 1 — .

③ Ha A irreducibilis $\Rightarrow \exists$ olyan sé, ami nem szigorúan
domináns a többi.
Pozitív sajátvektorral.

Ha $b_i > 0, S_i > 0 \Rightarrow L$ irreducibilis. Sőt, primitív.

Példa

2 életciklusos populáció.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^2 = L \cdot L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$L^3 = L^2 \cdot L = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2\beta \\ \alpha\beta^2 & 0 \end{pmatrix}$$

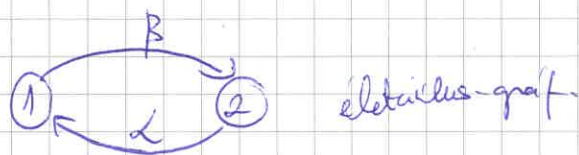
$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \text{ korrelációs-vektor.}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha Y_0 \\ \beta X_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = L^2 \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta X_0 \\ \alpha\beta Y_0 \end{pmatrix} = \alpha\beta \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

$\alpha\beta > 1$: növekszt a populáció

$\alpha\beta < 1$: csökken -||-



(HF:) belátni, hogy $L = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma > 0 \Rightarrow$ primitív.

Példa Kabóca populáció - pete

||
lárvák

||
ifj. rovar.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix} \text{ megbecsülések v. hogy.}$$

(4)

Keressük a stabil hareloszást!

$$L \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 60c \\ a \\ \frac{b}{4} \\ \frac{b}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 60c = \lambda a & \Rightarrow 60c = 40\lambda^3 c \\ a = 4\lambda b & \Rightarrow a = 40\lambda^2 c \\ b = 10\lambda c \end{cases}$$

$c > 0$, ezt beírjuk:

$$60 = 40\lambda^3 \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{6}{4}$$

$$\Updownarrow \\ \lambda^3 = \frac{3}{2}$$

$$\Updownarrow \\ \lambda = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx \underline{\underline{1,145}}$$

domináns sajátérték.

Ehhez kell sajátvektor.

Legyen $\boxed{c=1}$.

$$b = 10\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot 1 \approx \underline{\underline{11,45}}$$

$$a = 40\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot 1 \approx \underline{\underline{52,45}}$$

stabil hareloszlás: $\approx \begin{pmatrix} 52,41 \\ 11,45 \\ 1 \end{pmatrix}$ arányokat mutat
hosszabb távon ez
a arány.

Ha ebből indulunk:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ L\text{-el} \\ \text{szoroz}}} \begin{pmatrix} 60\% \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ L\text{-el} \\ \text{szoroz}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 15\% \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ L\text{-el} \\ \text{szoroz}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5\% \end{pmatrix}$$

Bernardelli populációs hullám.

Spektrálsugár becslése:

R nagyságrendjének becslése.

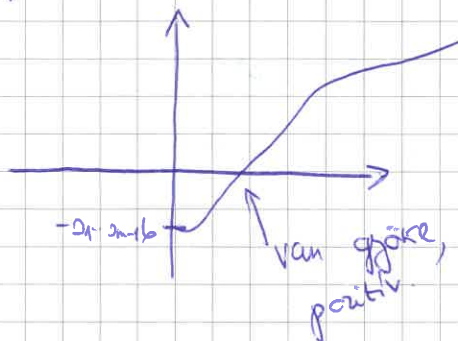
$$\det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} b_1 - \lambda & b_2 & \dots & b_m \\ \rho_1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \rho_2 & \ddots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$= (b_1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \dots & \dots \\ \rho_1 - \lambda & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} - \rho_1 \begin{vmatrix} b_2 & \dots & b_m \\ \rho_2 - \lambda & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$= (b_1 - \lambda) (-\lambda)^{m-1} - \rho_1 b_2 (-\lambda)^{m-2} + \rho_1 \rho_2 b_3 (-\lambda)^{m-3} - \dots$$

$$+ (-1)^m \rho_1 \dots \rho_{m-1} b_m$$

$$= (-1)^m \left(\underbrace{\lambda^m - b_1 \lambda^{m-1} - \rho_1 b_2 \lambda^{m-2} - \dots - \rho_1 \dots \rho_{m-1} b_m}_{p(\lambda)} \right) = 0.$$



$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(\lambda) = \infty$$

Descartes-féle lemlé:

p pozitív gyökeinek száma ~~1~~ $<$
eggyelvező előjelváltásainak száma. (2)

poz. gyökök számának paritása = előjelváltások számának paritása.

Tehát van gyök (1)

(1) + (2) $\Rightarrow \exists!$ pozitív gyök p -nek. $E_2 = R$.

$$p(1) = 1 - b_1 - a_1 b_2 - \dots - a_1 \dots a_{m-1} b_m$$

$$\text{Ha } p(1) < 0 \Rightarrow R > 1.$$

$$\text{Ha } p(1) > 0 \Rightarrow R < 1.$$

$$\text{Ha } p(1) = 0 \Rightarrow R = 1.$$

$p(1)$ -ből már látjuk, hogy csökken v. nő a populáció!

egyszerű modell,

érdekes:

Migrációs modell is van:

$$X(n+1) = L(X(n)) + b \quad \text{poz. veg. veg.}$$

