

1)

Jülélnek - e are egyaráni növények

$$p_{n+1} = \underbrace{(\alpha \ 0 \ \gamma)}_a \cdot p_n + \underbrace{(\beta \sigma^2 (1-\alpha) \gamma)}_b p_{n-1}$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} < \frac{a - \sqrt{a^2}}{2} < 0$$

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \quad p_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$$

tölthetnek, ha $\lambda_1 > 1$

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} > 1$$

$$a + \sqrt{a^2 + 4b} > 2$$

$$\sqrt{a^2 + 4b} > 2 - a$$

$$1 - a < 0$$

$$a > 1$$

$$\alpha \beta \gamma > 1$$

vagy

$$1 - a \geq 0 \text{ és } a^2 + 4b > 1 - 2a + a^2$$

$$2a + 4b > 1$$

$$\alpha \beta \gamma \leq 1 \text{ és}$$

$$2\alpha \beta \gamma + 4\beta \gamma (1 - \alpha) \gamma > 1$$

$$2\beta \gamma (\alpha + 2\beta \gamma (1 - \alpha)) > 1$$

Nemlineáris diszkrét idejű modellek

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad f \text{ nem lineáris}$$

pl

$$f(x) = \frac{ax}{b+x}$$

def.

x_* egyensúlyi helyzet / fixpont, ha $x_* = f(x_*)$.

2, Biz, h. ^{ha f folyt.} konvergens megoldás csak egyensúlyi helyzettel tarthat.

Iff $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ma, $x_{n+1} = f(x_n)$

$$x_n \rightarrow x_*, \quad n \rightarrow \infty$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$\downarrow$

x_*

$\downarrow$

x_*

$$= f(x_*)$$

$n \rightarrow \infty$

d

$$\frac{ax}{b+x} = x$$

$x \neq 0$

v

$$\frac{a}{b+x} = 1$$

1

$$a = b + x$$

$$x = a - b$$

def: x_n p-periodikus mo, ha

$$x_{n+p} = x_n, \quad x_{n+i} \neq x_n, \quad 0 < i < p, \quad \forall n$$

f p-edik iteráltja:

$$f^p(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_p$$

pl.

van-e 2-per. mo?

$$f^2(x) = x$$

$$f(x) \neq x$$

$$f^2(x) = \frac{a \frac{ax}{b+x}}{b + \frac{ax}{b+x}} = x$$

$$\frac{a^2 x}{b^2 + bx + ax} = x \quad x \neq 0$$

$$a^2 = b^2 + bx + ax$$

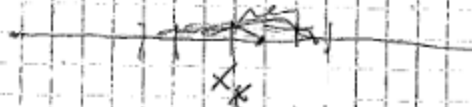
$$a^2 - b^2 = (a+b)x$$

$$a - b = x$$

$\Rightarrow$ nincs 2-per. mo.

def: x_* egy helyet stabil, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x_0 - x_*| < \delta \Rightarrow |x_n - x_*| < \varepsilon \quad \forall n \geq 0$$



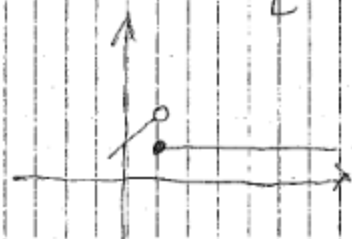
x_* instabil, ha nem stabil

x_* lokálisan attraktív, ha $\exists \Delta > 0$

$$|x_0 - x_*| < \Delta \Rightarrow x_n \rightarrow x_*, \quad n \rightarrow \infty$$

x_* lok. aszimptotikusan stabil, ha
stabil és lok. attraktív.

$$p1 \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < 1 \\ 1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$



$$f(x) = x \quad x \neq x+1 \\ x_* = 1$$

$$x_0 = 1 - 10^{-100} \quad \text{közel 0-hez}$$

$$x_1 = 2 - 10^{-100} \quad \text{távol}$$

$$x_2 = x_3 = \dots = 1$$

all: f folyt. diff. és $x_* = f(x_*)$ Ekkor

$$|f'(x_*)| < 1 \Rightarrow x_* \text{ assz. stabil}$$

$$|f'(x_*)| > 1 \Rightarrow x_* \text{ instabil}$$

biz:

$$|x_{n+1} - x_*| = |f(x_n) - f(x_*)| \stackrel{\text{Lagrange közérték tétel}}{=} |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_*|$$

• $|f'(x_*)| < 1$, $|f'(\xi)| \leq q < 1$, mert f folyt. diff. Lagrange közérték tétel

$$|x_{n+1} - x_*| \leq q |x_n - x_*|$$

indukció: $|x_n - x_*| \leq q^n |x_0 - x_*| \rightarrow 0$

• $|f'(x_*)| > 1$, $|f'(\xi)| \geq q > 1$, $|\xi - x_*| < \epsilon$

$$|x_{n+1} - x_*| \geq q |x_n - x_*|$$

indukció: $|x_n - x_*| \geq q^n |x_0 - x_*|$ amíg $|x_n - x_*|$

p1

$$f(x) = \frac{a(b+x) - ax}{(b+x)^2} = \frac{ab}{(b+x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{a}{b}$$

stabil, ha $a < b$
instabil, ha $a > b$

$$f'(a-b) = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a} \quad \text{forditva}$$

megj: Ha $|f'(x_*)| > 1$ hiperbolikus egyensúly
 Ha $|f'(x_*)| = 1$, akkor derívték nem elég a
 stab. meghatározásához.

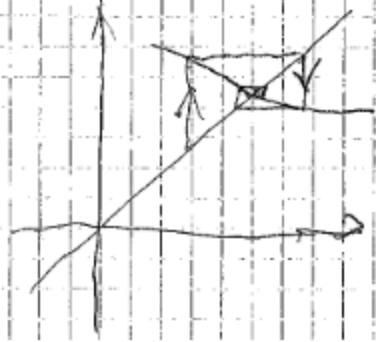
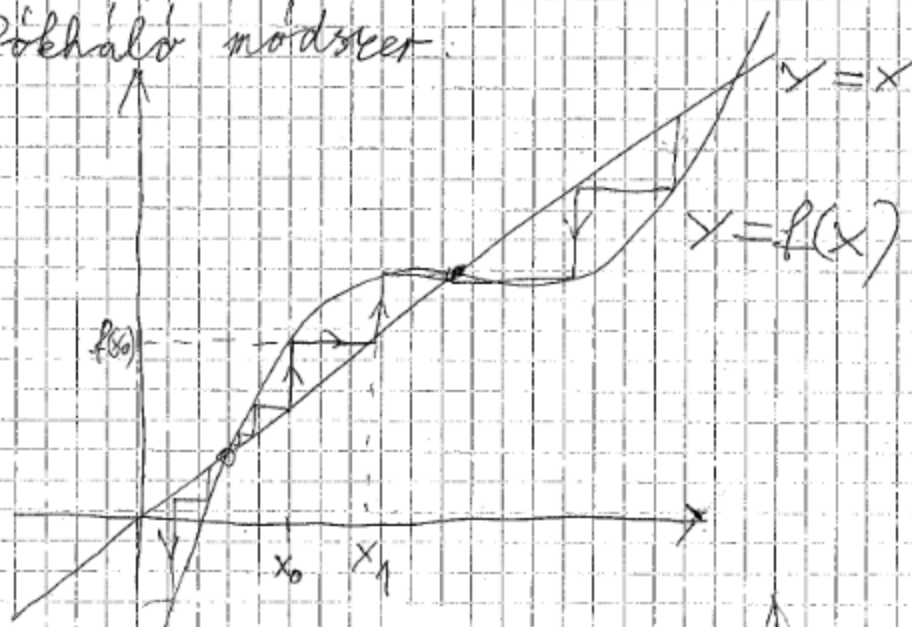
megj: Per. mo. stabilitásait is lehet def.

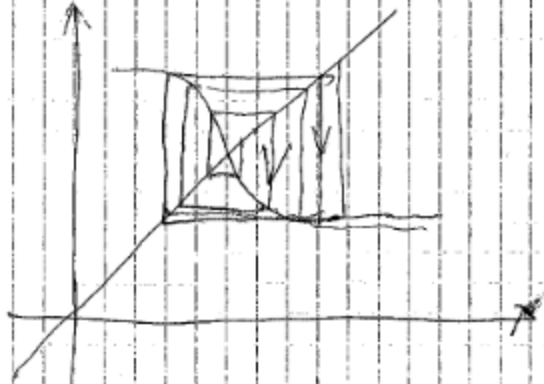
$x_{11}, x_{21}, \dots, x_p$ per mo

$$\left| \frac{d f^p(x_p)}{d x_p} \right| = \underbrace{|f'(f^{p-1}(x_p))|}_{x_{p-1}} \underbrace{|f'(f^{p-2}(x_p))|}_{x_{p-2}} \dots |f'(x_p)| =$$

$$= \left| \prod_{i=1}^p f'(x_i) \right| \geq 1$$

Pékháló módszer:





all: Ha f monoton növe, akkor x_n monoton
 bír: $x_n < x_{n+1} \Rightarrow f(x_n) < f(x_{n+1})$

$x_{n+1} < x_{n+2}$ indukció
 x_n monoton

$$x_n > x_{n+1} \Rightarrow f(x_n) > f(x_{n+1})$$

$x_{n+1} > x_{n+2}$ x_n monoton

Diszkrét logisztikus egyenlet (Robert May, 1976)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad r > 0$$

$$f(x) = r x (1 - x) \quad r \in [0, 4] \text{-re}$$

$[0, 1]$ -et invariancia
 képeri

e.k.: $r x (1 - x) = x$

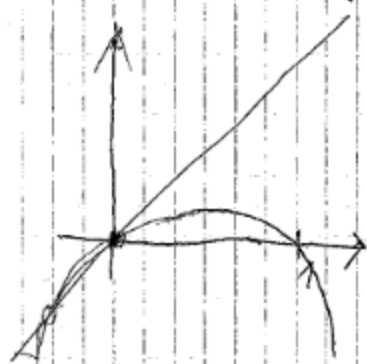
$$x \neq 0$$

$$r(1 - x) = 1$$

$$1 - x = \frac{1}{r}$$

$$x = 1 - \frac{1}{r}$$

$$r \leq 1$$



$$1 - \frac{1}{r}$$

$$1 - \frac{1}{r} > 0, \text{ ha}$$

$$1 > \frac{1}{r}$$

$$r > 1$$

$$f'(x) = r(1-x) - rx = r(1-2x)$$

$$f'(0) = r \quad 0 \text{ stabil, ha } r < 1$$

$$f'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = r\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) = r\left(\frac{2}{r} - 1\right) = 2 - r \in (-1, 1)$$

$$-r \in (-3, -1)$$

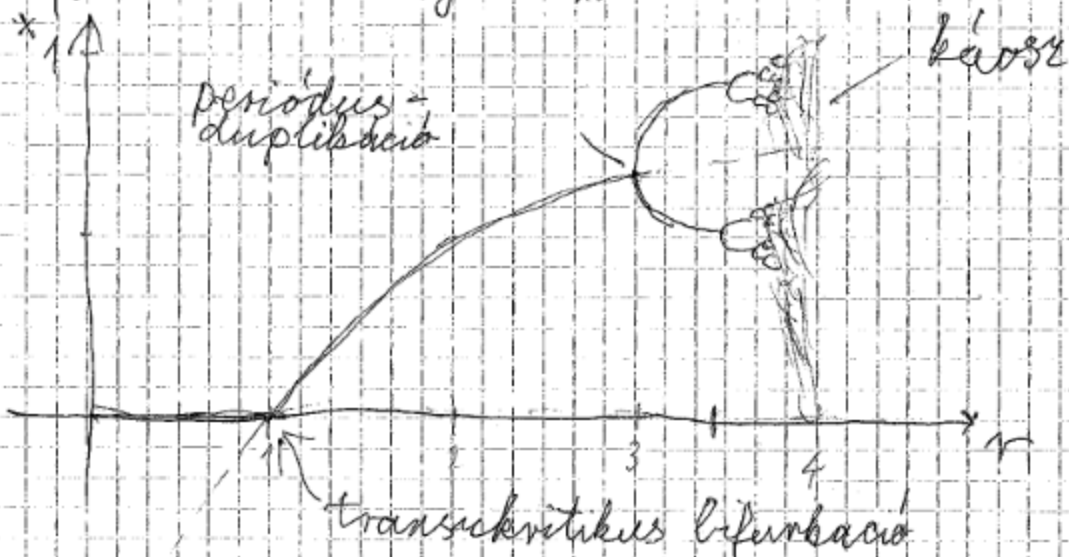
$$r \in (1, 3) \quad \text{ekkor stabil az } 1 - \frac{1}{r}$$

$$r \in (1, 3)$$



$r = 1$ -nél bifurkáció történik, a dinamika lényegesen megváltozik.

bifurkációs diagram.



Feigenbaum diagram

2-periodikus mo:

$$f^2(x) = r(r x(1-x))(1 - r x(1-x)) = x$$

4. fokú egyenlet

$x=0$ és $x=1-\frac{1}{r}$ mo, ezért az

$x(x-1+\frac{1}{r})$ polinomial lehet egyenlet

$\Rightarrow x_1, x_2$ per pálya,

stabil, ha $r \in (3, 1+\sqrt{6})$

Beverton: (1957) halgazdászok '50-es
években, tőkehal

$$x_{n+1} = \frac{2Kx_n}{K + (\lambda - 1)x_n} \quad K > 0, \lambda > 1$$

$$a \frac{2K}{\lambda - 1} x_n$$

$$\frac{K}{\lambda - 1} + x_n$$

$$x_{n+1} = \frac{a x_n}{b + x_n}$$

megoldható:

$$\frac{1}{x_n} = y_n$$

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\frac{a}{y_n}}{b + \frac{1}{y_n}}$$

$$y_{n+1} = \frac{b + \frac{1}{y_n}}{\frac{a}{y_n}} = \frac{b}{a} y_n + \frac{1}{a}$$

$$y_* = \frac{b}{a} y_* + \frac{1}{a}$$

$$a y_* = b y_* + 1$$

$$y_* = \frac{1}{a-b}$$

$$Y_n = Y_* + Z$$

$$Y_{n+1} + Z_{n+1} = \frac{b}{a} Y_n + \frac{b}{a} Z_n + \frac{1}{a}$$

$$Z_{n+1} = \frac{b}{a} Z_n$$

$$Z_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n Z_0 \quad Z_0 = Y_0 - Y_* = Y_0 - \frac{1}{a-b}$$

$$Y_n = Y_* + Z_n = \frac{1}{a-b} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \left(Y_0 - \frac{1}{a-b}\right)$$

$$Y_0 = \frac{1}{X_0}$$

$$X_n = \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{\frac{1}{a-b} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \left(\frac{1}{X_0} - \frac{1}{a-b}\right)}$$

Ricker modell (1954/58)

csendes-óceáni larva:

- petét rak, néhány nap után meghal
- karnibalizmusra hajlamos

X_n : larvák száma

$B_n = \alpha X_n$ ikrák

$Z(t) = \alpha X_n e^{-\delta T X_n}$ db ikrák éri meg a t időt kort
 T : ivarérettség

$$X_{n+1} = Z(T) = \alpha X_n e^{-\delta T X_n} = \alpha X_n e^{-\beta X_n}$$

erősen versengő populációkra működik

$$\text{e.h.: } f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$$

$$\alpha x e^{-\beta x} = x$$

$$x = 0$$

$$\alpha e^{-\beta x} = 1$$

$$\ln \alpha - \beta x = 0$$

$$x = \frac{\ln \alpha}{\beta}$$

> 0 , ha $\alpha > 1$

$$\text{stato } f'(x) = \alpha e^{-\beta x} - \alpha \beta x e^{-\beta x} =$$

$$= \alpha (1 - \beta x) e^{-\beta x}$$

$$f'(0) = \alpha \quad 0 \text{ stabile, ha } \alpha < 1$$

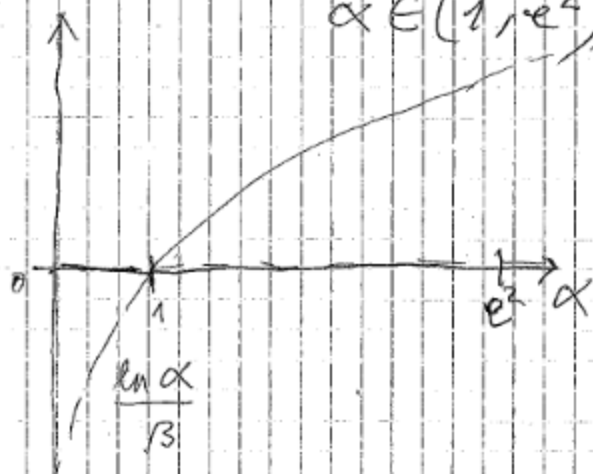
$$f'\left(\frac{\ln \alpha}{\beta}\right) = \alpha (1 - \ln \alpha) e^{-\ln \alpha} =$$

$$= \alpha (1 - \ln \alpha) \frac{1}{\alpha} \in (-1, 1)$$

$$-\ln \alpha \in (-2, 0)$$

$$\ln \alpha \in (0, 2)$$

$$\alpha \in (1, e^2)$$



$$x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{x_n}, & x_n \geq \frac{1}{4} \\ 2x_n, & x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n \ln x_n$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{\alpha x_n^b} \right) x_n$$