

$$\lambda_1^n \rightarrow \begin{cases} 0 & \lambda_1 < 1 \\ 1 & \lambda_1 = 1 \\ \infty & \lambda_1 > 1 \end{cases}$$

Tulajdonképpen, ha $\lambda_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \geq 1$

$$\sqrt{a^2 + 4b} \geq 2 - a$$

2 eset:

1, $2 - a \leq 0$

$$a \geq 2$$

$$\alpha \text{ és } \gamma \geq 2$$

2, $2 - a > 0$ és $a^2 + 4b \geq 4 + a^2 - 4a$

$$a < 2$$

$$b \geq 1 - a$$

$$a \geq 1 - b$$

$$\alpha \text{ és } \gamma < 2$$

$$\alpha \text{ és } \gamma \geq 1 - \beta \gamma^2 (1 - \alpha) \gamma$$

Nonlineáris differenciaegyenletek

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad f \text{ tetszőleges}$$

pl: $x_{n+1} = \frac{ax_n}{b+x_n} \quad f(x) = \frac{ax}{b+x} \quad a, b > 0$

Def: x_* egyenlőhelyi helyzet / fixpont, ha $x_* = f(x_*)$

Állítás: Ha az $(x_n)_{n=0}^\infty$ megoldás konvergens és f folytonos, akkor egyenlőhelyi helyzetbe tart.

Biz: Tph: $x_n \rightarrow x_*, n \rightarrow \infty \quad x_{n+1} = f(x_n)$
 $\downarrow \quad \downarrow$ - folytonosság (Heine)
 $x_* \quad f(x_*)$
 $\underbrace{\quad}_{n \rightarrow \infty}$

pl: $x_{n+1} = \frac{ax_n}{b+x_n}$ eh

$$\frac{ax}{b+x} = x \quad \begin{cases} x_*^1 = 0 \\ x_*^2 = a - b \end{cases} \leftarrow \frac{a}{b+x} = 1$$

Def: $(x_n)_{n=0}^\infty$ megoldás p -periodikus, $p \in \{1, 2, \dots\}$, ha $\forall_n \quad x_{n+p} = x_n$
 $x_{n+i} \neq x_n, i = 1, \dots, p-1$

Def: f p -edik iteráltja $f^p \quad f^p(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_p$

megjegyzés: 1-periodikus mo ch
p-periodikus megoldás f^p egyenlőségi helyekre

Populációdinamika
2019.03.08.
⑧

pl: $f(x) = \frac{ax}{b+x}$

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{a \frac{ax}{b+x}}{b + \frac{ax}{b+x}} = \frac{a^2 x}{b^2 + bx + ax} = x$$

$x=0$ ch

$$\frac{a^2}{b^2 + bx + ax} = 1$$

$$a^2 = b^2 + bx + ax$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)x$$

$x = a-b$ ch $\Rightarrow$ nincs 2-periodikus megoldás

Def: x_* stabil, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x_0 - x_*| < \delta \Rightarrow |x_n - x_*| < \varepsilon \quad \forall n \geq 0$

Def: x_* instabil, ha nem stabil

Def: x_* (globális) attraktív, ha $\exists \Delta > 0 \quad |x_0 - x_*| < \Delta \Rightarrow x_n \rightarrow x_*, n \rightarrow \infty$

Def: x_* (globális) aszimptotikusan stabil, ha stabil és globális attraktív

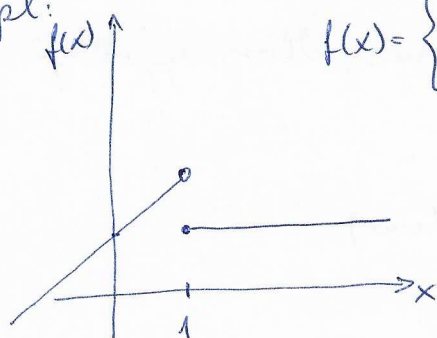
pl: $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

ch: $f(x) = x$

$$x < 1 \quad x+1 \neq x$$

$$x \geq 1 \quad x = 1$$



Amíg $x_n < 1$, addig $x_{n+1} = x_n + 1$

ha $x_n \geq 1$, akkor $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = 1$

~~$x_0 = 1 - 10^{-100}$~~

$$\forall x_0 \quad x_n \rightarrow 1$$

$x_0 = 1 - 10^{-100}$ közel van 1-hez

$x_1 = 2 - 10^{-100}$ távol van 1-től

Ha $\varepsilon < 1$, akkor nincs hozzá $\delta(\varepsilon)$

$x_* = 1$ globálisan attraktív, de instabil

Összes:

(9)

a, ha $|f'(x_*)| < 1$, akkor x_* aszimptotikusan stabil

b, ha $|f'(x_*)| > 1$, akkor x_* instabil

Biz: Tegyük fel, hogy x_n megoldás, $x_0 \neq x_*$

a, $|x_{n+1} - x_*| = |f(x_n) - f(x_*)| = |f'(\xi)| |x_n - x_*|$, $\xi \in \langle x_*, x_n \rangle$
Lagrange-féle középérték-tétel

$$|f'(x_*)| < 1 \quad \exists q \in [0, 1) \quad |f'(x_*)| < q < 1$$

f folytonosan differenciálható $\Rightarrow f'$ folytonos

$$\exists \varepsilon > 0 \quad |\xi - x_*| < \varepsilon \Rightarrow |f'(\xi)| < q$$

$$\text{Típus } |x_0 - x_*| < \varepsilon$$

$$|x_1 - x_*| < |f'(\xi)| \cdot |x_0 - x_*|$$

$$|\xi - x_*| < |x_0 - x_*| < \varepsilon \Rightarrow |f'(\xi)| \leq q$$

$$|x_1 - x_*| < q |x_0 - x_*| < q \varepsilon < \varepsilon$$

indukció: $\forall n \geq 0 \quad |x_n - x_*| < q^n |x_0 - x_*| < \varepsilon$ stabil $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_*$ aszimptotikusan stabil $\quad \exists \varepsilon, \delta$ attraktív

b, $\exists \varepsilon \quad |\xi - x_*| < \varepsilon, |f'(\xi)| \geq q > 1$

$$|x_{n+1} - x_*| > q |x_n - x_*|, \text{ amíg } |x_n - x_*| < \varepsilon$$

$$\text{indukció: } |x_n - x_*| > q^n |x_0 - x_*| \text{ amíg } |x_n - x_*| < \varepsilon$$

a megoldás $\xrightarrow{\infty}$ kilép az ε sugarú körpályából

A megoldás instabil.

□

pl: $f(x) = \frac{ax}{b+x} \quad x_*^1 = 0 \quad x_*^2 = a-b$

$$f'(x) = \frac{a(b+x) - ax}{(b+x)^2} = \frac{ab}{(b+x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b} \quad \text{az.} \quad \text{stabil, ha } \frac{a}{b} \in (-1, 1)$$

$$a, b > 0$$

$$a \in (-b, b) \quad a > 0$$

$$0 < a < b$$

instabil: $\frac{a}{b} \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$\frac{a}{b} > 1, a > b > 0$$

Populáció dinamika
2019.03.08.

(10)

$$f'(a-b) = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a} \quad \begin{array}{l} \text{arz. stabil, ha } a > b \\ \text{instabil, ha } a < b \end{array}$$

megjegyzés: Ha $|f'(x_*)| \neq 1$, x_* hiperbolikus, ha $|f'(x_*)| = 1$ nem hiperbolikus, akkor nem elég a deriváltak vizni a stabilitáshoz.
Periodikus megoldások stabilitását is definiálhatjuk.

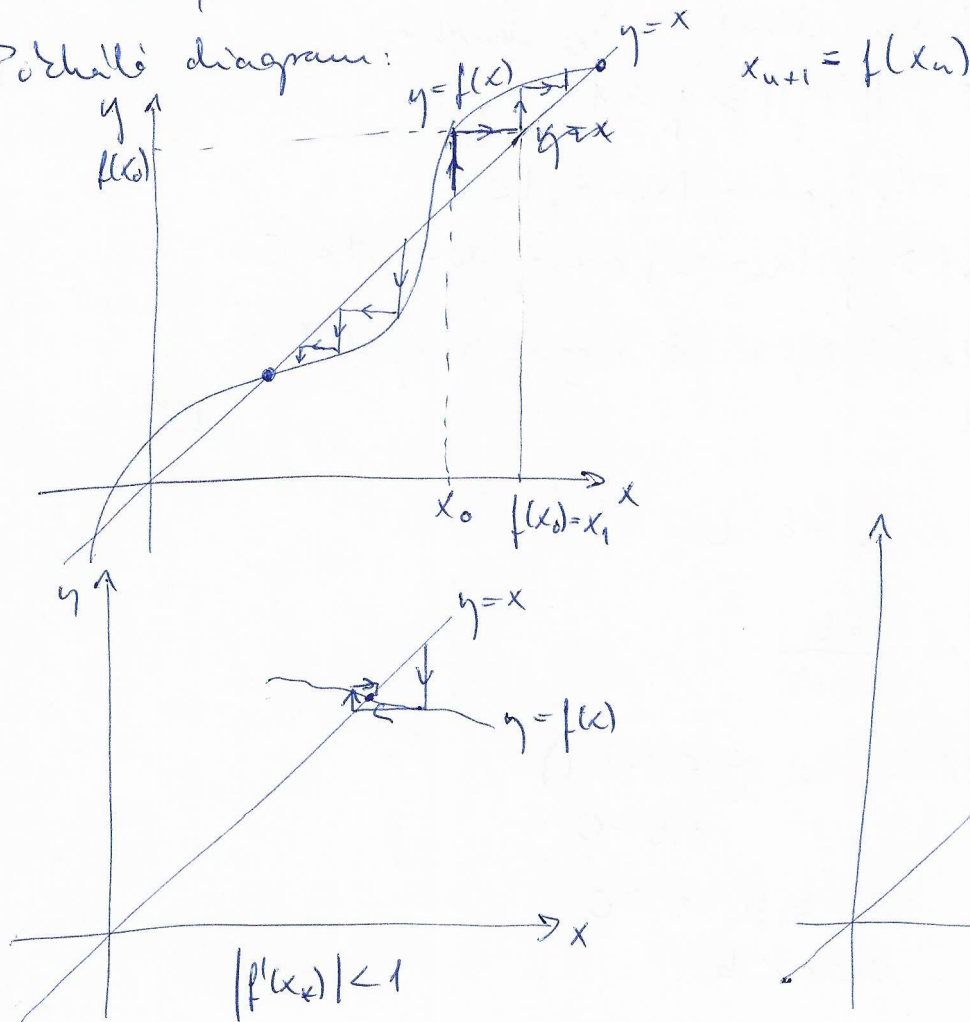
$x_1, \dots, x_p$ periodikus pálya

$$\left| \frac{d f^p(x_p)}{d x_p} \right| = \left| \frac{d}{d x_p} f(\dots f(x_p) \dots) \right| = \left| f'(f^{p-1}(x_p)) \cdot f'(f^{p-2}(x_p)) \dots f'(x_p) \right|$$

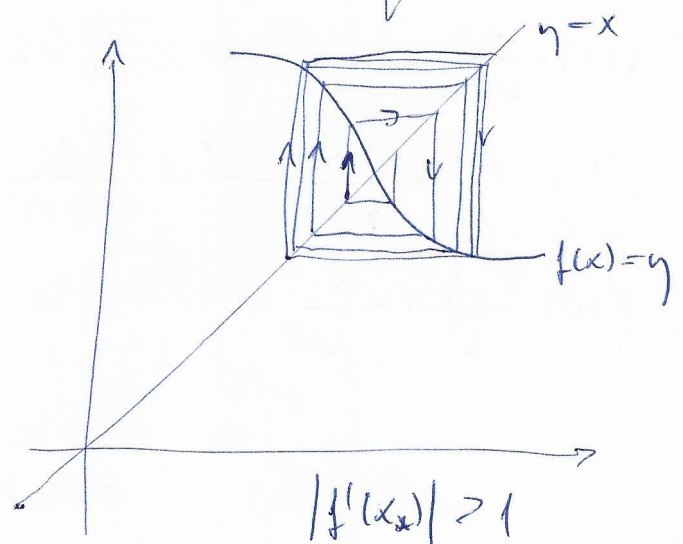
$$= \left| \prod_{i=1}^p f'(x_i) \right|$$

Ha $\alpha < 1$, akkor a periodikus pálya aszimptotikusan stabil, ha > 1 , akkor instabil

Portré diagram:



arz. stabil 2-pr. pálya



All: Ha f monoton növe, akkor x_n monoton

Biz: $x_{n+1} > x_n$, akkor $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

$$x_{n+2} > x_{n+1}$$

indukció $\Rightarrow x_n$ monoton növe

$x_{n+1} < x_n$, akkor $f(x_{n+1}) < f(x_n)$

$$x_{n+2} < x_{n+1}$$

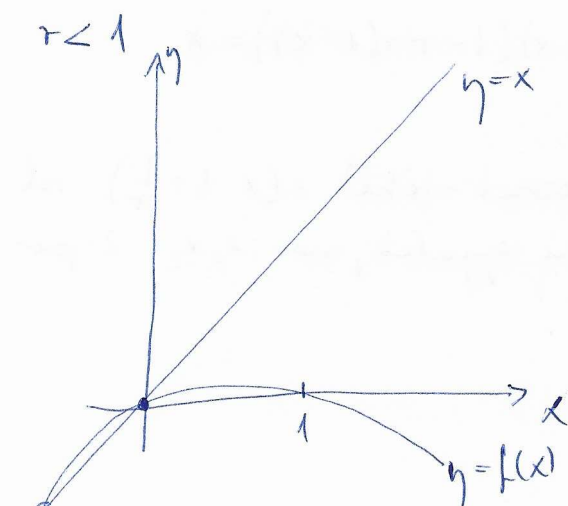
indukció $\Rightarrow x_n$ monoton csökkenő

Diszkrét logisztikus egyenlet (Robert May - 1976)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad r > 0$$

$$f(x) = r x (1 - x)$$

Ha $r \in [0, 4]$, akkor f a $[0, 1]$ -et önmagába képezi.



$$\text{ah: } f(x) = x \\ r x (1 - x) = x$$

$$x = 0$$

$$r(1-x) = 1$$

$$1-x = \frac{1}{r}$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{r}$$

$$\text{stabilitás: } f'(x) = r(1-x) - rx = r(1-2x)$$

$$f'(0) = r \text{ stabil, ha } r \in (-1, 1) \\ r < 1$$

$$f'(1 - \frac{1}{r}) = r(1 - 2(1 - \frac{1}{r})) = 2 - r$$

$$\text{stabil, ha } 2 - r \in (-1, 1)$$

$$-r \in (-3, -1)$$

$$r \in (1, 3)$$

$r=1$ -nél bifurkáció történik, a dinamika lényegesen megváltozik

Hand-drawn bifurcation diagram for the equation $x' = x(1-x) - r$. The vertical axis is labeled h and the horizontal axis is labeled r . The diagram shows a stable branch at $h=0$ for $r < 1$, which bifurcates into two branches at $r=1$. The upper branch is labeled $1 - \frac{1}{r}$. A point at $r=3$ is labeled "períodus duplica'cio". To the right, a vertical dashed line is labeled "2-per. per" and "E".

$$f^2(x) = f(f(x)) = r f(x) (1 - f(x)) = r \cdot rx(1-x)(1-rx(1-x)) = x$$

$x=0$ és $x=1-\frac{1}{\tau}$ megoldás, ezért (Beroulet-tétel) $x(x-1+\frac{1}{\tau})$ -re
egyszerűsíthetünk. Mivel egy másodfokú egyenlet, van x_1, x_2 2-pár
rész

x_1, x_2 literiz, $\text{ka } r \geq 3$

stabil, da $r \in (3, 1 + \sqrt{6})$

$$x_{n+1} = \frac{\mathcal{H} \lambda x_n}{\mathcal{H} + (\lambda - 1)x_n}$$
$$\kappa > 0, \lambda > 1$$

$$a = \frac{5\lambda}{\lambda - 1} x_n$$

$$x_{n+1} = \frac{\frac{a}{\lambda-1} x_n}{b + \frac{a}{\lambda-1} x_n} = \frac{a x_n}{b + x_n} \quad \text{megoldható}$$

$$b = \frac{55}{\lambda - 1} + x_n$$

$$x_n := \frac{1}{y_n} \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\frac{a}{y_n}}{b + \frac{1}{y_n}} = \frac{a}{by_{n+1} + 1}$$

$$y_{n+1} = \frac{by_n + 1}{a} = \frac{b}{a} y_n + \frac{1}{a}$$

$$y = \frac{b}{a} y + \frac{1}{a}$$

$$y_* = \frac{1}{a-b} \quad a > b, \text{ mit } \lambda > 1$$

$$y_n = y_* + z_n = \frac{1}{a-b} + z_n$$

$$\frac{1}{a-b} + z_{n+1} = \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a-b} + z_n \right) + \frac{1}{a} = \frac{b}{a} z_n + \frac{1}{a-b}$$

$$z_{n+1} = \frac{b}{a} z_n$$

$$z_n = \left(\frac{b}{a} \right)^n z_0$$

$$y_n = y_* + z_n = \frac{1}{a-b} + \left(\frac{b}{a} \right)^n z_0 = \frac{1}{a-b} + \left(\frac{b}{a} \right)^n \left(y_0 - \frac{1}{a-b} \right)$$

$$x_n = \frac{1}{y_n} \Rightarrow x_n = \frac{1}{\frac{1}{a-b} + \left(\frac{b}{a} \right)^n \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{a-b} \right)} \quad y_0 = \frac{1}{x_0}$$

Ricker - modell (1954/58)

erwachsene - oeca'mi lazarac (i'ra't r'at, ar'tau p'ir na'y m'lt'a d'p'ur'at'ul)

1 n'ot'h'ig & d'as i'ra't r'at

Exponentializ'm's'ra h'ey l'a'm'e's

$$P(1 \text{ lazarac m'eg'h'i a t id'as t'at}) = e^{-\gamma t x_n}$$

T id'as t'at'au h'ey i'ra't'at

n+1 - ed'i'e g'nera't'i'o'ba'u:

$$x_{n+1} = \alpha x_n \cdot e^{-\gamma T x_n} = \alpha x_n \cdot e^{-\beta x_n}$$

er'au' v'er's'eng'e' p'op'u'l'a't'i'o'ba'u m'lt'ed'i'e

$$\text{ch: } f(x) = \alpha x e^{-\beta x} = x$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ x=0 \quad \alpha e^{-\beta x} = 1 \\ \quad \quad x = \frac{\ln \alpha}{\beta} \end{array}$$

$$\text{stabilitat: } f'(x) = \alpha e^{-\beta x} - \alpha \beta x e^{-\beta x} = \alpha e^{-\beta x} (1 - \beta x)$$

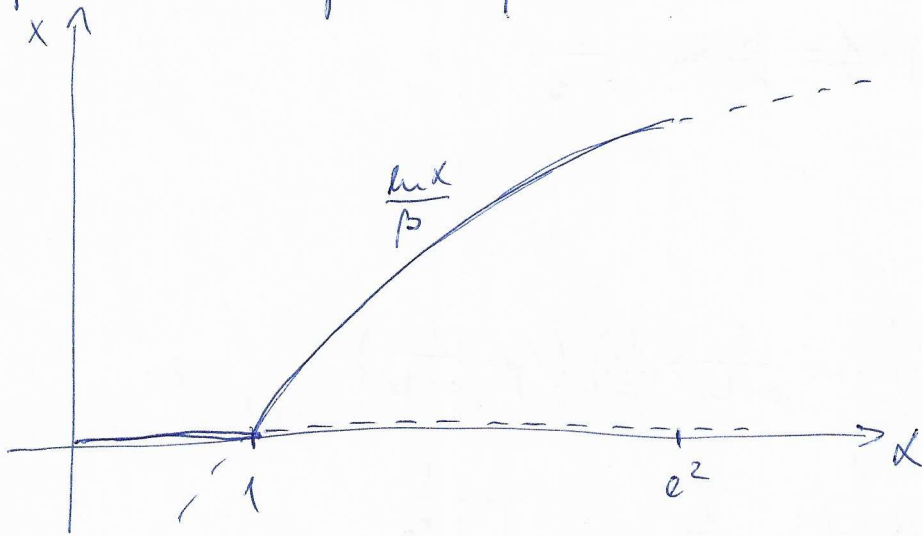
$$f'(0) = \alpha \quad 0 \text{ stabil, he } \alpha < 1$$

$$f'\left(\frac{\ln \alpha}{\beta}\right) = \alpha e^{-\beta \frac{\ln \alpha}{\beta}} \left(1 - \beta \frac{\ln \alpha}{\beta}\right) = 1 - \ln \alpha$$

$$\text{stabil, he } 1 - \ln \alpha \in (-1, 1)$$

$$\begin{aligned} -\ln x &\in (-2, 0) \\ \ln x &\in (0, 2) \\ x &\in (1, e^2) \end{aligned}$$

bifurkációs diagram: $\beta > 0$



Feigenbaum
Bifurcation
diagram

$$\text{HF: } x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{x_n} & , x_n \geq \frac{1}{4} \\ 2x_n & , x_n < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n \ln x_n$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{\alpha x_n^b} \right) \lambda x_n \quad \alpha, b, \lambda \geq 0$$

Környezetbarát modellek

in db keresztpont pl: 1 0-4 éves
2 5-9

2019.04.12.

$$x(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_m(u))$$

környezeti vektor

$x_i(u)$: u . népszerűségi index egyi egyed volt az i . keresztpontban

$$x_1(u+1) = b_1 x_1(u) + b_2 x_2(u) + \dots + b_m x_m(u)$$

$$x_2(u+1) = s_1 x_1(u)$$

$$x_3(u+1) = s_2 x_2(u)$$

⋮

$$x_n(u+1) = s_{m-1} x_{m-1}(u) (+ s_m x_m(u))$$

b_i : születési ráta

s_i : túlélési ráta