

Balázs István az előadó.

Projekt (feladatok) + dolgozat a végén.

Nyomasszé.

Fibonacci:

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1} \quad \text{rekurzió.} \quad \text{népszerű példa.}$$

Exponenciális szaporodás:

Sely/Bakteriumpopuláció.

$$M_0, \dots, M_n$$

0. és n generációban a sely száma.

$$M_{n+1} = a M_n$$

$$\uparrow \\ a \in \mathbb{R}^+$$

$$M_n = a^n M_0 \quad \text{lesz, ugye.} \quad \text{Ha } |a| = 1 \Rightarrow |M_n| \text{ konstans,}$$

$$|a| > 1 \Rightarrow |M_n| \rightarrow \infty \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad \text{szaporodás}$$

$$|a| < 1 \Rightarrow |M_n| \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad \text{kihalás}$$

Rovarpopuláció

a_n : nőstények száma az n . generációban.

p_n : peték száma az n . generációban.

f : 1 nőstény mennyi petét rak le.

m : P (egy rovar nem éli meg az ivarérett kora).

r : peték között a nőstények aránya.

Ebből építkezünk.

$$p_n = f a_n$$

$$(1-m)f a_n = c \quad \text{legyen.}$$

$$a_{n+1} = c a_n \quad \text{kapjuk.}$$

(1) Ez is expo.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1-m)r p_n = \\ &= (1-m)r f a_n \end{aligned}$$

① (Euler) Ha az embiség lélekszáma hat volt, 1 millióra
 Nő és arodina.
 nőtt 200 év alatt, akkor mennyi volt az éves növekedési
 rata?

$$C^{200} \cdot 6 = 1\,000\,000$$

$$C = \sqrt[200]{\frac{1\,000\,000}{6}} \quad \text{lenne!}$$

DE!

$$N_{n+1} = \overbrace{(1+d)}^C N_n$$

↑
 növekedési rata. éves. 1 egyednek átlagosan hány
 utóda születik 1 év alatt.

$$N_n = (1+d)^n N_0$$

$\uparrow$ 1000 000 $\uparrow$ 6

$$\Rightarrow (1+d)^{200} = \frac{1\,000\,000}{6}$$

$$d = \sqrt[200]{\frac{10^6}{6}} - 1 = \underline{\underline{0,062}}$$

Euler ezt csak becsülhette volna!

Adjunk becslést!

$$(1+d)^n = 1 + nd + \underbrace{\binom{n}{2} d^2 + \dots}_{\text{mind becsülhető.}}$$

kicsi. ha d kicsi.

$$N_n \approx (1+nd) N_0 \Leftrightarrow \frac{\frac{N_n}{N_0} - 1}{n} = d \approx 0,062$$

durva becslés.

Ha további 400 év telik, mennyi lesz a népesség?

$$N_{600} = ? \text{ ugye.}$$

$$N_{600} = (1+d)^{600} N_0 = \dots$$

$$= \left((1+d)^{200} \right)^3 N_0 = \left(\frac{N_{200}}{N_0} \right)^3 N_0 =$$

$$= \frac{N_{200}^3}{N_0^2} = \frac{10^{18}}{6^2} = 2,77 \cdot 10^{16} \approx \underline{\underline{3 \cdot 10^{16}}}$$

ez már elég gyorsan nő, a végülén fele. Azt látjuk.

② (Euler) Ha 1 évszázad alatt megduplázódik a népesség, akkor mennyi az éves növekedési ráta?

$$N_0 \text{ adott.} \quad N_{100} = (1+d)^{100} N_0 = 2N_0$$

$$2 = (1+d)^{100} \Leftrightarrow \sqrt[100]{2} - 1 = d = \underline{\underline{6,95 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\approx \underline{\underline{0,007}}.$$

"Euler-becslés":

$$d \approx \frac{\frac{N_n}{N_0} - 1}{n} = \underline{\underline{0,01}} \quad \text{Nem olyan rossz.}$$

Becslesnek

$$n = 100$$

$$\frac{N_n}{N_0} = 2$$

③ (Euler) Ha az éves növekedési ráta $\frac{1}{100}$, akkor mennyi idő kell, hogy megtszaporodjon a népesség?

$$d = 0,01. \quad 10 N_0 = (1+0,01)^n N_0$$

$$10 = 1,01^n \Leftrightarrow n \ln 1,01 = \ln 10$$

③

$$n = \frac{\ln 10}{\ln 1.01} \approx \underline{\underline{231,4}} \quad \text{Logaritmust számoltuk.}$$

Becslést kell adni: Δ kicsi

$$(1 + n\Delta) N_0 = N_0 \cdot 10$$

$$\frac{10-1}{\Delta} = n = \frac{9}{0.01} = 900 \dots$$

$$n \approx \frac{N_n - N_0}{\Delta N_0} = 900 \text{ jól elegendő.}$$

Nem az igazi a becslés. Ehelyett a modell.

Egynyári növények modellje:

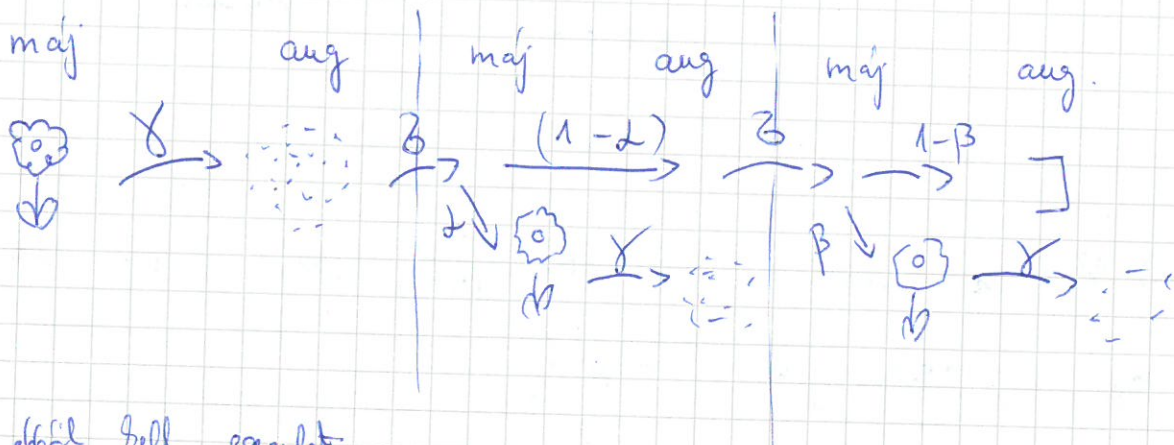
májusban kihajt a növény. augusztusban rászedi magvait. ezek egy v. 2 év múlva ~~kihajtat~~ $\leftarrow$ x_i . HASZTHATNAK

γ : egy növény hány magot szed x_i

β : P(1 mag túlél egy telet)

Δ : P(1 éves mag kihajt)

β : P(2 éves mag kihajt)



ebből kell egyenlet

P_n : n -edik év májusában ennyi növény ~~van~~ ^{hajt} x_i

Δ_n^0 : n . év augusztusában ennyi ~~új~~ ^{új} mag van.

Δ_n^1 : n . év áprilisban 1 éves magok száma.

Δ_n^2 : n . év áprilisban 2 éves —||—.

$\tilde{\Delta}_n^1, \tilde{\Delta}_n^2$: n . év májusában 1 éves magok száma.

n . év —||— 2 éves —||—.

$$- \Delta_n^0 = \gamma P_n$$

$$- \Delta_{n+1}^1 = \beta \Delta_n^0$$

$$- \Delta_{n+1}^2 = \beta \tilde{\Delta}_n^1$$

$$- \tilde{\Delta}_n^1 = (1-\alpha) \Delta_n^1$$

$$- \tilde{\Delta}_n^2 = (1-\beta) \Delta_n^2$$

$$- P_{n+1} = (1 \text{ éves magból hajt } x_i) + (2 \text{ éves magból hajt } x_i)$$

$$P_{n+1} = \alpha \Delta_{n+1}^1 + \beta \Delta_{n+1}^2 = \alpha \beta \Delta_n^0 + \beta \tilde{\Delta}_n^1 =$$

$$= \alpha \beta \gamma P_n + \beta \beta (1-\alpha) \Delta_n^1 =$$

$$= \alpha \beta \gamma P_n + \beta \beta^2 (1-\alpha) \Delta_{n-1}^0 =$$

$$= \underbrace{\alpha \beta \gamma}_{a} P_n + \underbrace{\beta \beta^2 (1-\alpha) \gamma}_{b} P_{n-1} = a P_n + b P_{n-1}$$

$a, b \in \mathbb{R}^+$

hasonló a Fibonaccihoz.

Ez egy lineáris differenciáegyenlet.

Lineáris differenciáegyenletek:

$$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \dots + a_k X_{n-k}.$$

k -adrendű. Kell a megoldást zárt alakban.

Keressük a megoldást $X_n = \lambda^n$ alakban, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_k \lambda^{n-k} \quad \bigg/ \cdot \lambda^{k-n}$$

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k \lambda^0$$

KAR EGYENLET.

$$\lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \dots - a_k = 0. \quad \text{K-adfokú polinom.}$$

k db komplex gyök van. multiplacitással.

$k=2$ -re nézzük:

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0.$$

3 eset:

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$

$$X_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad \text{lesz.}$$

(HF) ellenőrizni, hogy megoldás

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$

$$X_n = c_1 \lambda^n + c_2 n \lambda^n$$

c) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ugye

$$\lambda = \rho e^{i\varphi}$$

6.

$$\lambda = r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$$X_n = r^n (C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi))$$

$$C_1, C_2, r, \varphi \in \mathbb{R}.$$

HF: mindet ellenőrizni

Példa

4. Fibonacci - egyenlet.

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1} \quad \left. \begin{array}{l} X_0 = 1 \\ X_1 = 1 \end{array} \right\}$$

oldjuk meg.

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \quad / : \lambda^{n-1}$$

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

alt.
meg.

$$X_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Készenléti probléma: (KEP)

$$X_0 = 1 = C_1 + C_2$$

$$X_1 = 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

megoldandó

$$C_2 = 1 - C_1$$

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + (1-C_1) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$C_1 \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)}_{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$C_1 = \frac{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

$$C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \quad \text{enyi.}$$

$$X_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \text{ ez a kép.}$$

↓
0 ahogy $n \rightarrow \infty$.

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{9}-1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ésért $X_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$ becslés adható.

nincs expo-modell lenne.

⑤ $X_n = -4X_{n-1} - 4X_{n-2}$

$X_0 = 3, X_1 = 5$ oldjuk meg.

$$\lambda^n = -4\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0 \quad \boxed{\lambda_{1,2} = -2}$$

alt. megold:

$$X_n = C_1 (-2)^n + C_2 n (-2)^n$$

$$\boxed{C_1 = 3}$$

$$5 = -2C_1 - 2C_2$$

$$5 = -6 - 2C_2$$

$$11 = -2C_2 \quad \underline{\underline{C_2 = -\frac{11}{2}}}$$

$$\boxed{X_n = 3(-2)^n - \frac{11}{2}n(-2)^n}$$

⑥ $X_n = 2X_{n-1} - 4X_{n-2}$

$X_0 = 8, X_1 = 2$ oldjuk meg

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$1 + i\sqrt{3} = r e^{i\varphi} \quad r = \sqrt{1+3} = 2 \quad \varphi = \arctan(\sqrt{3}) = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

$$X_n = 2^n \left(C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

+ a részlet eltek.

$$\underline{\underline{C_1 = 8}}$$

$$\underline{\underline{C_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}}} \quad \square$$

g)

