

Unger Tamas Istvan
FT01Y3

Bevezetés a pénzügyi matematikába

vizsga, 2019. június 28.

1. Tegyük fel, hogy a FED államkötvényt bocsájt ki 100 dollár névértékben 2 illetve 5 éves lejáratú idővel. A kamatot egy összegben, a lejáratkor fizetik ki. A kötvényekre kiírt (éves) kamatláb megtalálható az alábbi táblázatban. A kötvényeket nem a névértéken lehet megvásárolni, a kibocsájtási ár szintén szerepel a táblázatban.

- a. Mennyit érnek az egyes kötvények a lejáratkor? Határozza meg a lejáratig számított hozamot (Yield-to-Maturity) mindkét lejáratú idő esetén!
- b. A kötvények lejáratkor (tehát 2 és 5 év múlva) egyéb üzleti tevékenységünk révén bevételre illetve kiadásra kerül sor. Ennek összegét a táblázat utolsó oszlopa tartalmazza. Határozza meg ennek a cash flownak a jelenértékét! A diszkontálás során használja az előző feladatrészen kapott YTM értékeket!

Év	Kamatláb	Kibocsájtási ár (\$)	Cash flow (\$)
2	2%	95	-1000
5	4%	90	2000

2. Adott két részvény, mindkettőt 100 dolláros áron lehet megvásárolni a mai napon. Egy év múlva a két részvény értékének várható értéke 110 illetve 120 dollár, a részvények értékének szórása 20 illetve 30 dollár, az értékek közötti korrelációs együttható $-0,2$. 10 ezer dollárból állítunk össze egy portfóliót.

- a. Jelölje a azt, hogy hány darabot vásárolunk az első részvényből! Írja fel formulával majd ábrázolja koordináta-rendszerben, hogy hogyan függ a portfólió jövőbeli értékének várható értéke és szórása az a paramétertől! Határozza meg a várható értéket arra a két portfólióra, mikor a pénzünket teljes mértékben az első illetve a második részvénybe fektetjük be! Mely a mellett lesz a portfóliónk értékének a szórása minimális?
- b. Vázlatosan ábrázolja az elérhető portfóliókat a várható érték és a szórás által meghatározott koordináta-rendszerben! Külön tüntesse fel az előző pontban vizsgált három portfóliót! Az ábrán jelölje be a portfólió határt (portfolio frontier) és a hatékony portfólió határt (efficient portfolio frontier)!
- c. Tegyük fel, hogy a piacon kötvényt is vásárolhatunk 100 dolláros névértéken kockázatmentes 5%-os hozammal! Vázlatosan ábrázolja az előző pont grafikonján a tőkepiaci egyenest és a piaci portfóliót! Szövegesen magyarázza el, hogy mi ezeknek a jelentése!

3. Tekintsük azt a kombinált opciót, amiben két származékos termék található: egy határidős ügylet és egy európai eladási opció, mindkettő long pozíció. A határidős ügylet és az eladási opció esetében azonos a referencia eszköz, azonos a T lejáratú idő és azonos a K kötési ár. Határozzuk meg ennek a kombinált opciónak a kifizetési függvényét. A kifizetési függvény alapján ez a kombinált opció lényegében micsoda?

4. A gumimacik gumibogyószörp eladásával próbálnak bevételre szert tenni. A gumibogyó a nyár folyamán érik be, a szörpöt ezután készítik el. Van egy élő szerződésük az udvari varázslóval, aki a szörpöt augusztus közepén spot áron fogja megvásárolni. Jelenleg a szörp ára a határidős piacon augusztus 15. lejáratú idővel 10 arany. Ez az ár a gumimaciknak megfelelően, és attól tartanak, hogy augusztusban a spot ár ennél alacsonyabb lesz.

a. Mit tegyenek a gumimacik a kockázat kiküszöbölésére?

b. Tegyük fel, hogy augusztusban a szörp ára a spot piacon 8 arany lesz. Ebben az esetben mennyi lesz a macik üzemi illetve pénzügyi tevékenységből származó eredménye?

5. Modellezzük az angolai tőzsdét a következő egylépéses bináris piaccal. A piacon egy kötvénnyel és egy részvénnel lehet kereskedni, és a két kereskedési időpont a 0 és az 1. A 0 időpontban a kötvény ára 1 kwanza, a részvény ára 10 kwanza. A kötvény nem kamatozik, tehát az 1 időpontban is 1 kwanza lesz az értéke. A részvény ára az 1 időpontban 12 vagy 8 kwanza lehet, a 12-es érték valószínűsége 0,79.

a. Van arbitrázslehetőség a piacon?

b. Tekintsünk egy európai eladási opciót a részvényre $T=1$ lejáratú idővel és $K=9$ kwanza kötési árral. Ábrázolja az opció kifizetési függvényét! Írja fel a fedezeti portfóliót definiáló egyenletrendszert, és az egyenletrendszer megoldásával adja meg a portfóliót! Mennyi az opció arbitrázsmentes ára?

Jó munkát!

5 100%

① $B_0 = 100$ névlelték.

2,5 év.

$r = 0,02$ $r' = 0,04$

a)

$$B_1 = B_0 (1 + 2 \cdot 0,02) =$$

$$= 100 (1 + 2 \cdot 0,02) = 104$$

$$B_1' = B_0 (1 + 5 \cdot 0,04) =$$

$$= 100 (1 + 5 \cdot 0,04) = 120$$

Első't névlelték. $B_0 = 95$ zib. ár. és egy kamatos kamat van.

~~$B_1 = 104 = B_0 (1 + YTM)^2$~~

$$B_1 = 104 = B_0 (1 + YTM)^2$$

$$104 = 95 (1 + YTM)^2 \Leftrightarrow \frac{104}{95} = (1 + YTM)^2$$

$$YTM = \sqrt{\frac{104}{95}} - 1 \approx 0,0463$$

$$YTM = 4,63\%$$

Hátsó díjat névlelték. $B_0 = 90$ zib. ár.

$$B_1' = B_0 (1 + YTM)^5 \Leftrightarrow$$

$$120 = 90 (1 + YTM)^5$$

$$YTM = \sqrt[5]{\frac{120}{90}} - 1 \approx 0,059$$

$$YTM = 5,92\%$$

b) $PV = \frac{-1000}{(1 + 0,0463)^2} + \frac{2000}{(1 + 0,059)^5} \approx 588,13$

↑
diszkonttényezővel szorozzuk.

10p

$$a \text{ dt: } S_0 = 100 \quad E(S_1) = 110$$

$$b \text{ dt: } S_0' = 100 \quad E(S_1') = 120$$

$$X_0 = 10000$$

$$D(S_1) = 20$$

$$\text{Corr}(S_1, S_1') = -0,2$$

$$D(S_1') = 30$$

$$\text{Corr}(aS_1, bS_1')$$

$$0 \leq a \leq 100$$

$$0 \leq b \leq 100$$

$$a.) \quad X_0 = a S_0 + b S_0'$$

$$10000 = 100a + 100b$$

$$100 = a + b \Leftrightarrow \boxed{b = 100 - a}$$

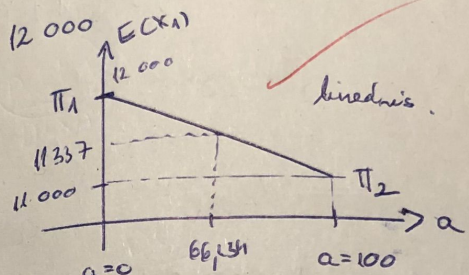
$$X_1 = a S_1 + b S_1'$$

$$E(X_1) = E(a S_1) + E(b S_1') =$$

$$= a E(S_1) + b E(S_1') = 110a + (100 - a) \cdot 120 =$$

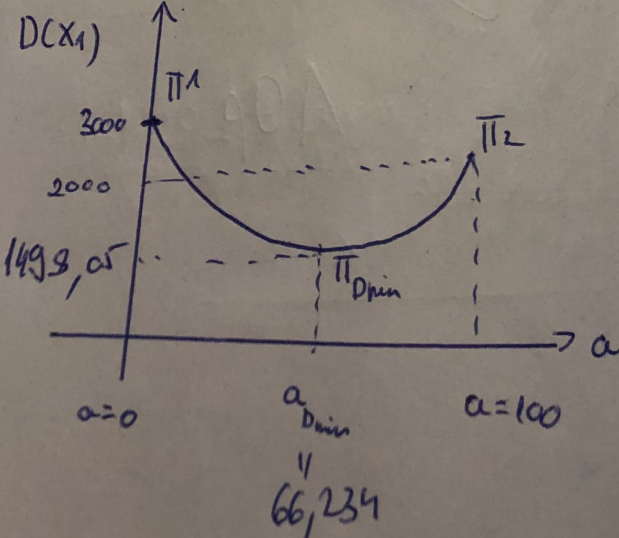
$$= 110a - 120a + 12000$$

$$\text{Teht} \quad E(X_1) = 12000 - 10a$$



$$\begin{aligned} D^2(X_1) &= D^2(a S_1 + b S_1') = D^2(a S_1) + D^2(b S_1') + 2 D(a S_1) D(b S_1') \text{Corr}(S_1, S_1') = \\ &= a^2 D^2(S_1) + b^2 D^2(S_1') + 2 a b D(S_1) D(S_1') \text{Corr}(S_1, S_1') = \\ &= 400 a^2 + (10000 - 2000a + a^2) \cdot 900 + 2a(100 - a) \cdot (-120) = \\ &= 400 a^2 + 9000000 - 180000a + 900 a^2 - 240000a + 240 a^2 = \\ &= 1540 a^2 - 204000 a + 9000000 \end{aligned}$$

$$1g) \quad D(X_1) = \sqrt{\underbrace{1540 a^2}_A - \underbrace{204000 a}_B + \underbrace{9000000}_C}$$



$$a_{\min} = -\frac{B}{2A} \approx 66,234$$

Tehát: π_1 portfólió:

$a = 0$ (csak a második részre vesztünk)
 $EC(X_1) = 12000$
 $DC(X_1) = 3000$

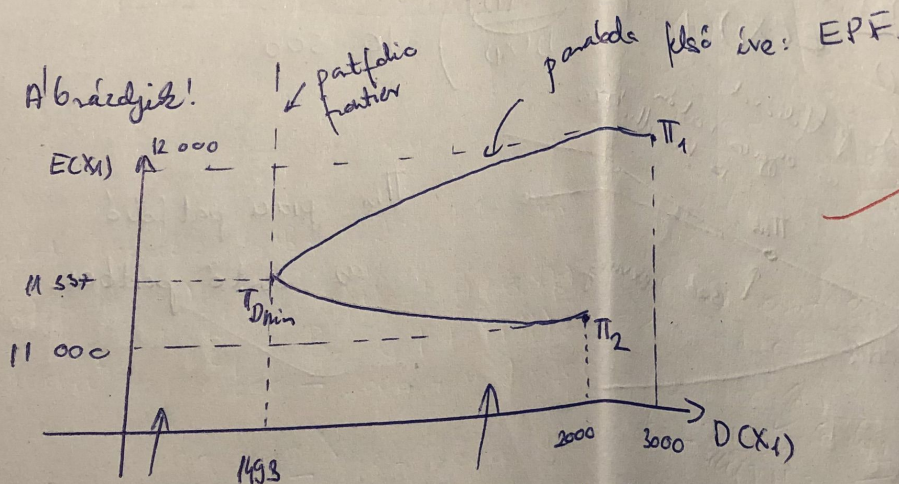
π_2 portfólió:

$a = 100$ (csak az első részre) - 11 -)
 $EC(X_1) = 11000$
 $DC(X_1) = 2000$

π_{Dmin} portfólió:

$a = 66,234$ itt a minimális a portfólió szórása.
 $EC(X_1) = 11337,66$
 $DC(X_1) = 1498,05$

b) Ábrázold!



ezek itt vannak a piácon (közvetlen vásárlás)

az első ív is átírta a piácon, de csak a helyek jelölésére.

Gondolj meg! Növekedő szóráshoz (riskóhoz) csökkenő várható érték tartozik (csökkenő hozam).

c) $B_0 = 100$

$B_1 = B_0(1 + 0,05) = 105$ ugye.

$X_1 = aS_1 + bS_1' \}$ S mértékben

$S \in [0; 1]$

$B_1 = 100 \cdot 105 = 10500 \}$ (1-S) mértékben.

Tehát:

$$Y_1 = S X_1 + (1-S) 10\ 500$$

nem változik változó! (mivel locked)

$$E(Y_1) = S E(X_1) + (1-S) 10\ 500 =$$

$$= S (12\ 000 - 1000) + (1-S) 10\ 500.$$

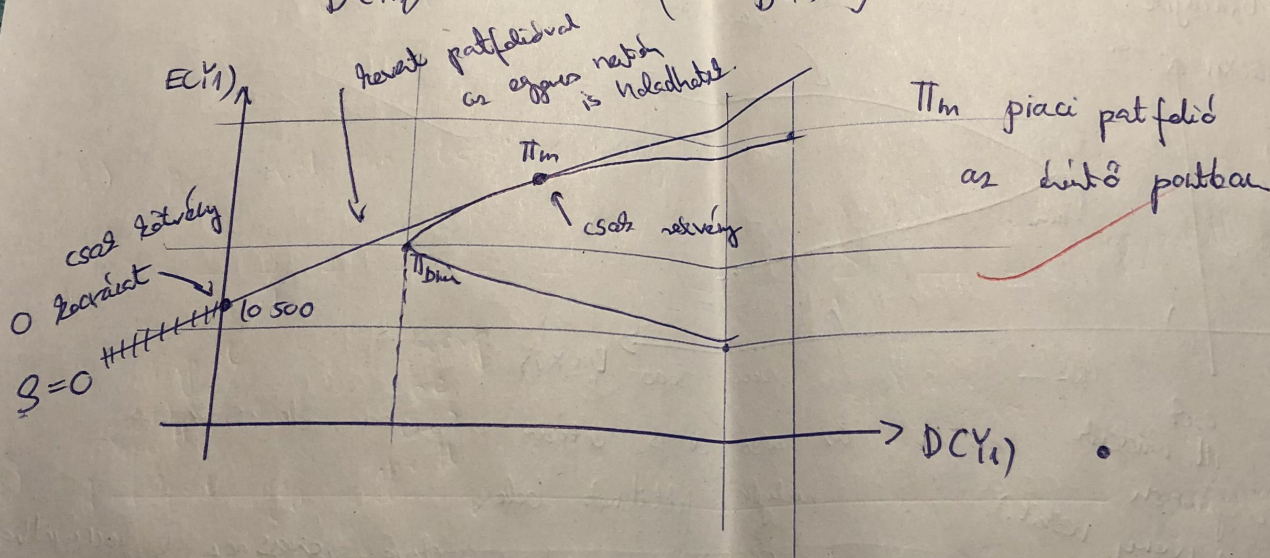
$$D(Y_1) = D(S X_1 + (1-S) 10\ 500) = D(S X_1) = |S| D(X_1) = S D(X_1).$$

így

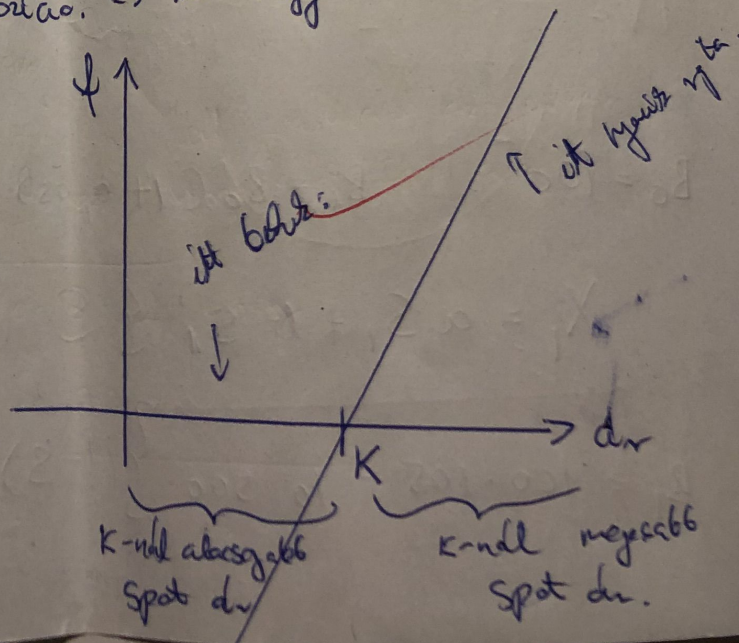
$$S = \frac{D(Y_1)}{D(X_1)}$$

lineáris függvény lesz.

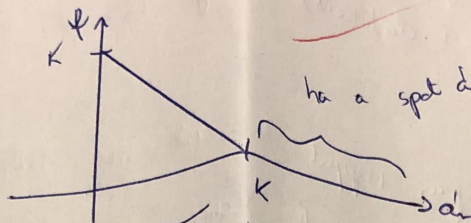
$$E(Y_1) = \frac{D(Y_1)}{D(X_1)} E(X_1) + \left(1 - \frac{D(Y_1)}{D(X_1)}\right) \cdot 10\ 500$$



3. Kataridás ügylet és long pozíció. $\Rightarrow$ mi vegyünk a részec.
Kifizetési függvénye:



európai eladási (put) opcióra is van kell említeni a
kifizetési függvénye.

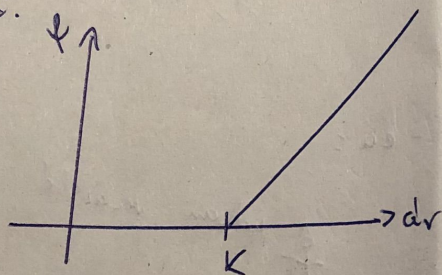


ha a spot ár
alacsonyabb, mint K , az értéke
zártként van.

ha a spot ár magasabb, mint K , akkor a spot
ár opcióval. Adott a spot
árak a piacra.

$$f(S_T) = [K - S_T]^+$$

A kombinált opció ezen két opció kifizetési függvényének összegével
jellemezhető.

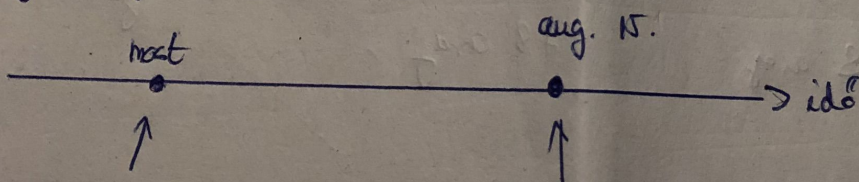


ezt kapjuk.

$$f(S_T) = [S_T - K]^+ \quad 10p$$

E_2 az európai call opció kifizetési függvénye.

4. A helyzet így áll.



- Szerződésünk van
az európai vételi opcióval
spot áron.

- akkor kell szállítani az európai
vételre spot áron.

- határidős piacon a
származék 10 arányt ér

a) A követkző javaslatnál lehet élni a gumináció felé:

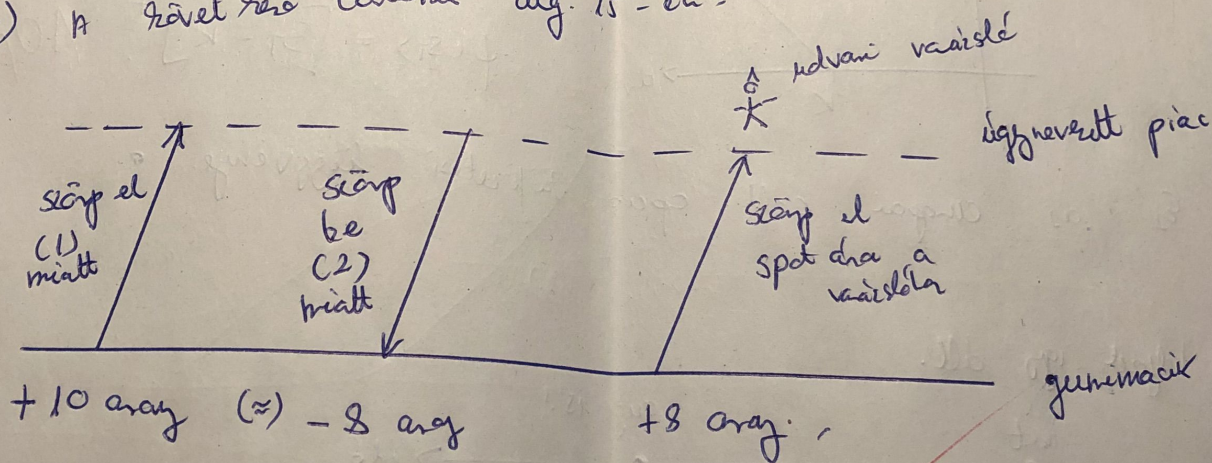
-6-

(1) MOST összenéz meg a sörpne ego határvidék együletét
slat porcióból (eladóként) aug. 15-ne az elkelte
 10 arany dr.;

(2) aug. 15. előtt pár nappal összenéz meg meg egy
 határvidék együletét, de esztal long porcióból (vásárlóként).
 Ennek ára ugge az idő közeledge miatt kábe argyi lesz,
 mint az aug. 15-i spot dr.;

~~aug.~~ aug. 15-en pedig végzet el az ig lehetett
 kötelességeket, plusz természetesen szállítsák le a cuccot
 az udvari várakslóhoz is.

b) A követkző ténénis aug. 15-en:



Tehát:

+ 10 arany

- 8 arany

+ 8 arany

phuizgi bevétel: $10 - 8 = 2$ arany

üzemi bevétel: 8 arany

$\Sigma 10$ arany.

⑤

egylépcsős bináris piacunk van.

$$\begin{array}{lcl}
 t=0 & & t=1 \\
 B_0 = 1 & \xrightarrow{p=0,19} & B_1 = B_0 = 1 \\
 & & S_1 = S^\uparrow = 12 \\
 S_0 = 10 & \searrow_{1-p=0,21} & B_1 = B_0 = 1 \\
 & & S_1 = S^\downarrow = 8
 \end{array}$$

európai put opció

$$F = [K - S_T]^+ = [9 - 12]^+ = 0 = f^\uparrow$$

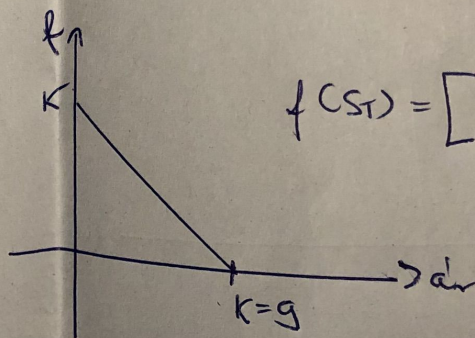
$$F = [K - S_T]^+ = [9 - 8]^+ = 1 = f^\downarrow$$

a) I: Nincs arbitráris lehetőség $\Leftrightarrow S^\downarrow < S_0(1+r) < S^\uparrow$.

mivel $r = 0$: $8 < 10 < 12$ teljesül.

$\Rightarrow$ nincs arbitráris lehetőség a piacon.

b) európai put opció van.



$$f(S_T) = [K - S_T]^+$$

a replicálási függvény.

Federatív portfelió:

$$X_0 = \beta B_0 + \gamma S_0 = c, \text{ ami az arbitrárismentesség miatt, ugye. (Cest be lehet látni könnyen!)}$$

kérdés:

~~$\beta B_1 + \gamma S_1^\uparrow = f^\uparrow$~~

~~$\beta B_1 + \gamma S_1^\downarrow = f^\downarrow$~~

$$\left. \begin{array}{l} \beta B_1 + \gamma S_1^\uparrow = f^\uparrow \\ \beta B_1 + \gamma S_1^\downarrow = f^\downarrow \end{array} \right\}$$

megoldandó.

$$\left. \begin{array}{l} \beta + 12\gamma = 0 \\ \beta + 8\gamma = 1 \end{array} \right\}$$

lin. rendszer.

megoldjuk.

-8-

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 3 \\ \gamma = -1/4 \end{matrix} \quad \text{Kell.}$$

Tehát a fedezeti portfólió:

$$X_0 = 3B_0 - \frac{1}{4}S_0.$$

Az arbitrázsmentes ár:

$$C = X_0 = 3 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 10 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$