

Derivatívák

Tőzsde (vált): szabályozott kereskedési helyszín.

OTC piac. Over-the-Counter. Két fél, fehér asztal, szerződés. Ugye.

Σ is volt. Nincs szabályozottság (caós!).

Matematikai feltételek:

- előlt szabályok
 - $\forall$ résztvevő azonos infóval rendelkezik; (csak technikai feltétel)
 - (tiltott a bennfentes kereskedés)
 - minden eszköz esetében lehetőség van fedezetlen eladásra; (short selling).
- a valóságban nem teljesülő feltételek:
 - $\forall$ eszköz korlátlanul osztható és likvid;
 - nincsenek tranzakciós költségek;
 - banki betéti és hitelkamatok egyenlőek;
 - nincs határizás a bankkölcsön és az értékpapír-vásárlás voluménében.

Matematikai modellek: - rögzített időintervallumra vonatkozó: $[0; T]$

T : lejárat idő.

- diszkrét idejű piacok: kereskedési időpontok:

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = T$$

- folytonos idejű piacok: a $[0; T]$ -n belül bárhol kereskedhetünk, bez. obmedzeni.

Értékpapírpiacon: vannak ~~kötvények~~ ^{BOND} ~~(STOCK)~~: kockázatmentes befektetés.
vannak részvények (STOCK): minden előre rögzített

hozama. KOCKÁZTOS.

Így néz ki a terminológia.

Jelölések: S_t : részvény ára t időpontban

B_t : kötvény ——— || ———.

Spot (azonnali) ügylet. Klasszikus ügylettípus.

Az aktuális piaci árak kereskedése.

Határidős ügylet. Olyan A-V szerződés, mely egy jövőbeni időpontra vonatkozik, de előre meghatározott árak.

late delivery - fixed price.

Future: klasszikus tőzsdei termékkel szemben. STANDARDIZÁLT.

Forward: OTC piac, ebben az esetben.

Mi ennek a célja?

- kockázatsökkentés.
- spekulációs cél. ($\Rightarrow$ keresni az árak mozgata).

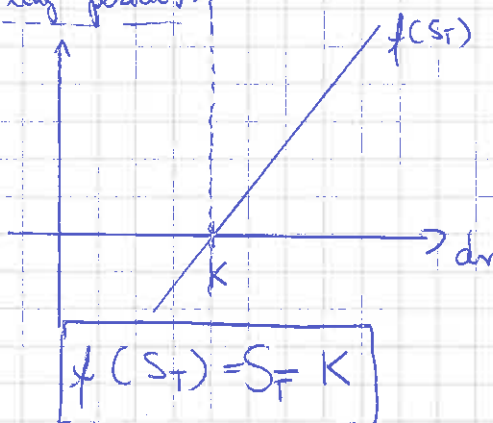
Kifizetési függvény: az egyes felek mennyit nyerne az ügyleten. Ezt adja meg.

• lejáratkor idő (szall. idő): $T > 0$

• előre rögzített ár: K

• spot ár: S_T

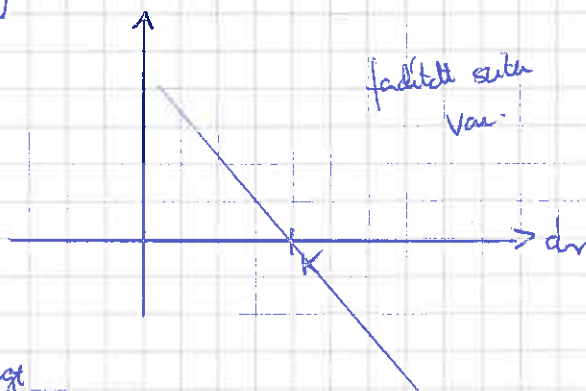
Vevő (long pozíció):



Eladó (short pozíció):

$f(S_T) = K - S_T$

$\nearrow$ vettén egy forint
nyerget



Vegyük észre, hogy ez egy relatív összegű biztosság.

Ha valaki vett egy, azt az eladó nyerte, mert a másik azt elbírta.

Opció (option): Olyan szerződés, amely csak az egyik félre nézve kötelező érvényű. A másik fél elállhat tőle, ha akar.

Példák: • Kötelezettséget vállaló fél (short pozíció): az opció kibocsátója, ő nem állhat el a szerződéstől.

• Kedvesményezett (long pozíció): ő állhat el

fontos: mindig van lejárat idő.

• Lejárás: a kedvesményezett fél jelzi, hogy az ügylet még él

• Az opció ára: Milyen áron lehet megvásárolni a $t=0$ időpontban.

példát nézzünk.

Európai vételi (call) opció: vételi jog, de nem kötelezettség

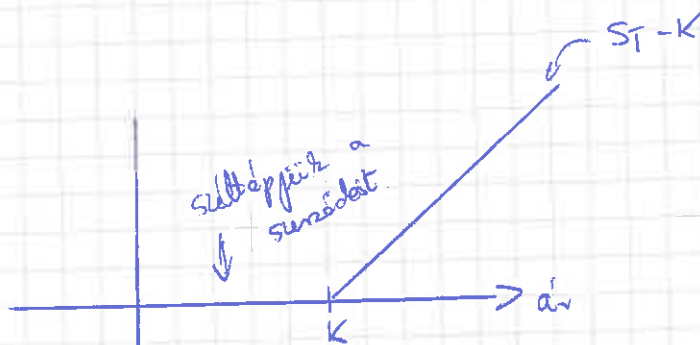
Rögzített: • milyen eszközre vonatkozik;

• lejárat idő;

• kötés: ár (K) (ezen az áron vehetünk meg, ha akarunk).

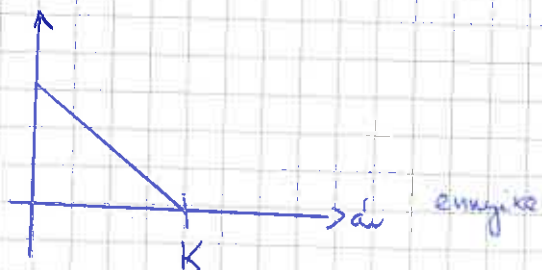
Opció kifizetési függvénye: a kedvesményezett mekkorát keres az ügyleten, ha optimálisan használja fel az opciót.

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T - K & , S_T > K \\ 0 & , S_T \leq K \end{cases} \stackrel{\text{maximális véle}}{=} [S_T - K]^+$$



Európai eladási opció (put): eladási jog, de nem kifizettség.

- Rögzített:
- milyen eszközre vonatkozó
 - lejárat idő: $T > 0$
 - kötés: ár: K



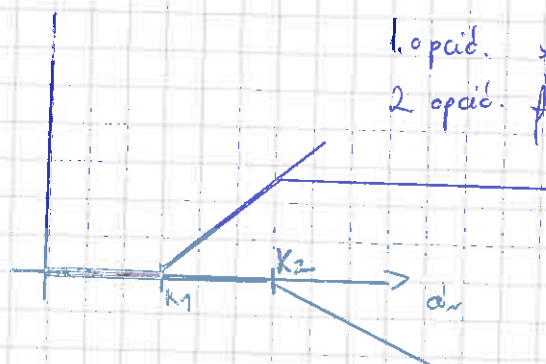
$$f(S_T) = \begin{cases} K - S_T, & S_T < K \\ 0, & S_T \geq K \end{cases}$$

eladón
 ↓
 befektető
 ↓
 megveszi

Kombinált opció: Olyan opciós szerződés, amiben több opció található, de mindegyik azonos eszközre vonatkozik.

Bull spread: Európai call opció vásárlására (K_1, T)
 Európai call opció eladásra (K_2, T)

Tfh: $K_1 < K_2$



1. opció: $f_1(S_T) = [S_T - K_1]^+$

2. opció: $f_2(S_T) = [S_T - K_2]^+$

Kombinált $f(S_T) = f_1(S_T) + f_2(S_T)$

Optimális felhasználás:

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 - 0 & S_T \leq K_1 \\ (S_T - K_1) - 0 & K_1 < S_T \leq K_2 \\ \cancel{(S_T - K_1)} - (S_T - K_2) & S_T > K_2 \end{cases}$$

nem hívják le az opciót, nem éri meg.
 egyik opciót sem hívják le, nem éri meg.
 1. opciót hívják le, a 2. opciót nem hívják le.
 $\forall 2$ -t hívják le.

$K_2 - K_1 = (S_T - K_1) - (S_T - K_2)$

Tehát tényleg, $f(S_T) = f_1(S_T) + f_2(S_T) \geq 0$.

Ezért jö ez a cuccos, látszik.

másik példa

Származékos termék (derivativa, angl. derivatis)

Olyan tőzsdei termékek, melyek értéke más eszközök árától függ.

Európai opciók: csak lejáratkor hívhatók le, működésük ~~előre megjelölt árak~~
a kifizetési függvény csak a lejáratkori részvényárból függ.

Ezt igényez. Más típusok:

Look-back vételi opció: Vételi jog, de nem kötelezettség

$T > 0$ - ban.

$K = \min_{0 \leq t \leq T} (S_t)$ áron.

Kifizetési függvény: $f(S_t^t, 0 \leq t \leq T) = S_T - \min_{0 \leq t \leq T} S_t \geq 0$.
ez látszik.

Emiatt ezt mindig lehívják.

Olyan opció, amit a lejárat előtt is le lehet hívni:

Amerikai vételi opció: Vételi jog, de nem kötelezettség.

fix K áron, de bármikor lehívható a $[0; T]$ intervallumon.

T : lehívás időpontja. T véletlen változó.

$$f(S_t^t, 0 \leq t \leq T) = \begin{cases} S_T - K & , \text{ ha lehívja} \\ 0 & , \text{ ha nem.} \end{cases}$$

Ilyen is van

Opcióárak:

Egylépéses bináris piac lesz.

Egylépéses: $t_0 = 0$, $t_1 = T = 1$ legyen káthé semmi.

Bináris: S_0 (determinisztikus) részvényár.

$$P(S_1 = S^\uparrow) = p \quad P(S_1 = S^\downarrow) = 1 - p.$$

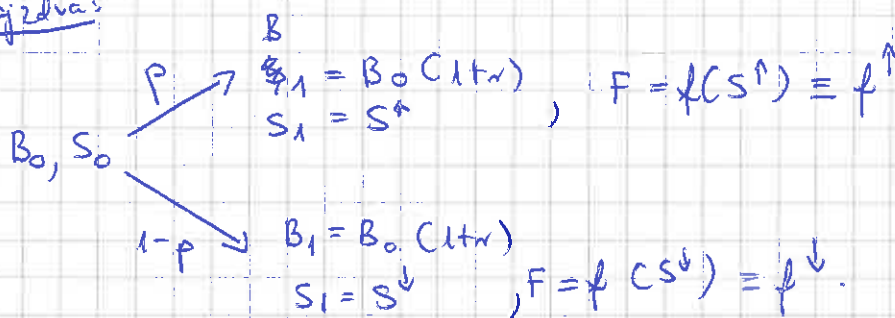
$S^\uparrow, S^\downarrow$ ismételt.

Zótvény: B_0 $B_1 = B_0(1+r)$ $r > -1$ determinisztikus

Európai típusú opció. Kifizetési függvénye: $f(S_1)$.

$$F = f(S_1).$$

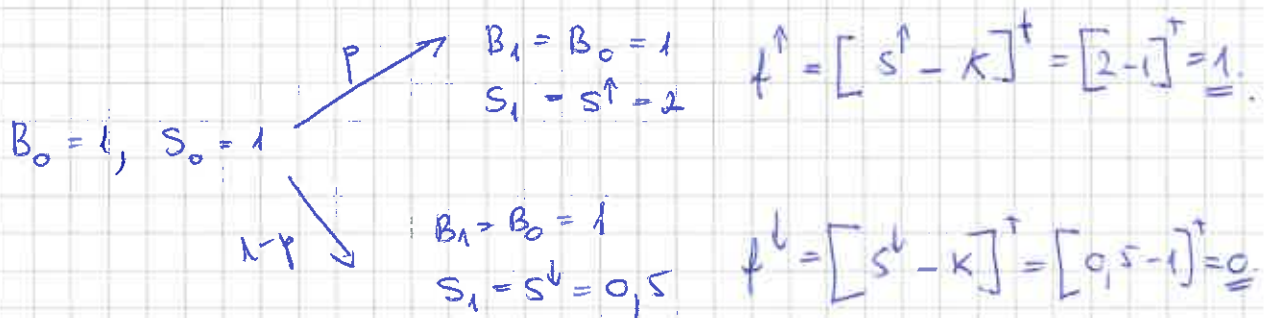
Rajzolás:



Példa

Európai call opció, $K = 1$. $r = 0$ legyen.

$$S_0 = B_0 = 1. \quad S^\uparrow = 2, \quad S^\downarrow = 0,5$$



Kérdés: milyen árban adjuk el az opciót?

Mennyit kellene érte. Ez az optima.

Szerencsésjétek, biztosítások ára:

$X_1, X_2, \dots$ a kifizetés nagysága.

$X_1, X_2, \dots \geq 0$ lesz. A kifizetés függetlenek.

Árazás: az átlagkifizetésen alapul. $X_1, X_2, \dots, X_n$.

$$\parallel \quad \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \approx E(X) \text{ úgy.}$$

Árazás célja: $d_1 \geq \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$

igazságos $d_1 = E(X)$.

Opcióknál ez nem megy! opciók esetén ugyanis a függetlenség nem teljesül!! Mindenkinél ugyanazt kell kifizetni.

C : opció ára, ennyit adunk el a 0 időpillanatban.

Összeállítunk egy portfóliót. Ebben: β : kőtvény, $\in \mathbb{R}$
 γ : részvény száma $\in \mathbb{R}$.

$$X_0 = \beta B_0 + \gamma S_0 = \text{portfólióérték a 0-ban.}$$

$$X_1 = \beta B_1 + \gamma S_1 = - \parallel - \quad \parallel - \parallel -$$

Fedezeti portfólió kell.

$$X_1 \geq F \quad \text{m.b.} \quad \text{sz. kell.}$$

Tökéletes fedezet:

$$X_1 = F \quad \text{m.b.}$$

Az opció igazságos ára az a legkisebb X_0 érték, melyből összeállítható egy fedezeti portfólió. $\oplus$

A továbbiakban feltesszük: $S^\downarrow < S_0(1+r) < S^\uparrow$

Ha ez nem teljesül, akkor arbitrázs van lehetőség.

Arbitrázs: ingyenebéd (free lunch) kockázatmentes nyereség.

Nem buchhatunk rajta. Az üzletben és pozitív valószínűséggel nyertünk rajta.

- Tfh $S_0(1+r) \leq S^\downarrow$

Legyen az, hogy kölcsönt veszünk fel $B_0 S_0$ értékben, melyből részvényt veszünk.

$$\gamma = B_0, \quad \beta = \overset{\text{hitel}}{-S_0}$$

$$X_0 = \beta B_0 + \gamma S_0 = -S_0 B_0 + B_0 S_0 = 0.$$

$$X_1 = \beta B_1 + \gamma S_1 = -S_0 B_1 + B_0 S_1 \geq -S_0 B_{0,1} + B_0 S^\downarrow.$$

$$\geq -S_0 B_0(1+r) + B_0 S_0(1+r) = (1+r) \underbrace{(-S_0 B_0 + B_0 S_0)}_{0 \text{ mb}}$$

$\Rightarrow$ nem buchhatunk rajta.

Pozitív eséllyel (ha $S_1 = S^\uparrow$): $X_1 > 0$ végiggondolható

Ha $S_0(1+r) \geq S^\uparrow$.

szint sellőget csinálunk

$$\gamma = -B_0, \quad \beta = S_0$$

Mat: $X_0 = \beta B_0 + \gamma S_0 = S_0 B_0 - B_0 S_0 = 0.$

$$X_1 = \beta B_1 + \gamma S_1 = S_0 B_1 - B_0 S_1 \overset{S_1 \leq S^\uparrow}{\geq} S_0 B_1 - B_0 S^\uparrow$$

$$\geq S_0 B_0(1+r) - B_0 S_0(1+r) = 0 \text{ mb.}$$

Ha $S_1 = S^\downarrow$, akkor $X_1 > 0$ $\square$

Cél: adjunkt tökéletes fedezetek

$$X_1 = F \quad \text{mb.}$$

Tehát: $\beta B_1 + \gamma S^{\uparrow} = f^{\uparrow}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ismét}}}{\beta} B_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ismét}}}{\gamma} S^{\downarrow} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ismét}}}{f^{\downarrow}}$$

β, γ ismét len. Lin. rendszer!

$$\gamma = \frac{f^{\uparrow} - f^{\downarrow}}{S^{\uparrow} - S^{\downarrow}}$$

$$\beta = \frac{S^{\uparrow} f^{\downarrow} - S^{\downarrow} f^{\uparrow}}{(S^{\uparrow} - S^{\downarrow})(1+r)B_0}$$

a megoldás.

$$X_0 = \beta B_0 + \gamma S_0 = \dots = \frac{1}{1+r} \frac{[(1+r)S_0 - S^{\downarrow}]f^{\uparrow} + [S^{\uparrow} - (1+r)S_0]f^{\downarrow}}{S^{\uparrow} - S^{\downarrow}}$$

$\uparrow$
algebrai
manipuláció

ennyire közel

Legyen $p^* = \frac{(1+r)S_0 - S^{\downarrow}}{S^{\uparrow} - S^{\downarrow}} \in (0, 1)$ valószínűség

$$1 - p^* = \frac{S^{\uparrow} - (1+r)S_0}{S^{\uparrow} - S^{\downarrow}}$$

Tehát: $X_0 = \frac{p^* f^{\uparrow} + (1-p^*) f^{\downarrow}}{1+r}$ lesz.

p^* mesterségesen konstruált valószínűség nem jelöl körrel leül semmit.

$$p^*(S_1 = S^{\uparrow}) = p^*(F = f^{\uparrow}) = p^*$$

$$p^*(S_1 = S^{\downarrow}) = p^*(F = f^{\downarrow}) = 1 - p^*$$

$$X_0 = \frac{p^*(F=f^{\uparrow}) \cdot f^{\uparrow} + p^*(F=f^{\downarrow}) \cdot f^{\downarrow}}{1+r} = \frac{E^*(CF)}{1+r} = E^*\left(\frac{F}{1+r}\right)$$

③

p^* : riskázatsenleges valószínűség (főzárda)
 bináris martingálknetek (mat).

Az opció arbitrázsmentes ára: $C = E^*\left(\frac{F}{1+r}\right)$

Arra kérés, ha $C > E^*\left(\frac{F}{1+r}\right)$.

A példában:

$$p^* = \frac{(1+r)S_0 - S^{\downarrow}}{S^{\uparrow} - S^{\downarrow}} = \frac{1}{3}$$

$$1 - p^* = \frac{2}{3}$$

$$C = E^*\left(\frac{F}{1+r}\right) = E^*(F) = p^* f^{\uparrow} + (1-p^*) f^{\downarrow} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\gamma = \frac{f^{\uparrow} - f^{\downarrow}}{S^{\uparrow} - S^{\downarrow}} = \frac{2}{3}$$

$$\beta = \frac{S^{\uparrow} f^{\downarrow} - S^{\downarrow} f^{\uparrow}}{(S^{\uparrow} - S^{\downarrow})(1+r)B_0} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Ellenőrzés:

$$X_0 = \beta B_0 + \gamma S_0 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} = C \quad \checkmark$$

$$X_1 = \beta B_1 + \gamma S_1 = \begin{cases} -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = 1 = f^{\uparrow} & \text{ha } S_1 = S^{\uparrow} \\ -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 0 = f^{\downarrow} & \text{ha } S_1 = S^{\downarrow} \end{cases}$$

Látjuk a fedezeti stratégiát.

— 0 —

Ha nem C a piaci ár, akkor arbitrázs lehetőség van.

Biz:

$$C = \text{piaci ár} \quad \text{Tfh} \quad C > E^*\left(\frac{F}{1+r}\right)$$

Tételezett opció: ADJUK EL! C áron.

Összedolgoz a fedezeti portfóliót. $X_0 = E^*\left(\frac{F}{1+r}\right)$

} nyújtunk egy pozitív összeget

lejáratkor: $X_1 = F$ m.b.

Most $t < T$ $C < E^*\left(\frac{F}{1+r}\right)$ alul van árasva az opció.

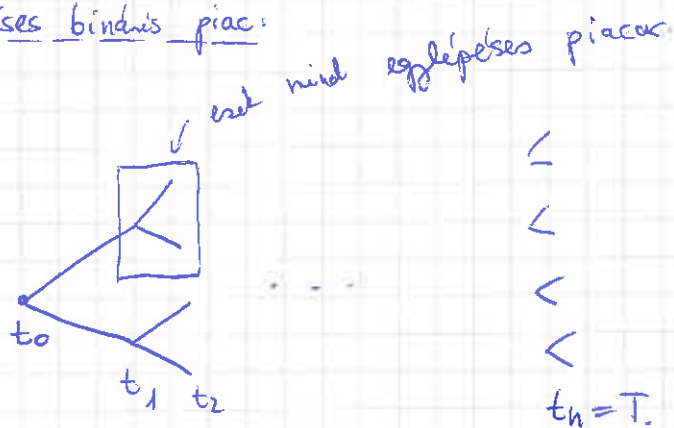
{ vegyük meg! C dron. short sellinggel eladjuk a fedezeti portfeliót
 $\Rightarrow$ kapunk $X_0 = E^*\left(\frac{F}{1+r}\right)$ összeget.

nyírn.

lejáratkor: ~~nyírn.~~ leírjuk az opciót, kapunk F összeget.

F -ből pont visszatérünk a short-sellinggel eladott opciót. $\square$

Kétlépéses bináris piac:



Kitelentés: Cox - Ross - Rubinstein

modellek vannak

Black - Scholes - modell

