

A vizsga írásbeli lesz. De még az oktató sem tudja, hogy milyen.

Kamatrántás jön.

B_0 lővé megy be a bankba. $B_0 > 0$ pénzösszeg.

$B(t)$:= pénzünk a $t \geq 0$ időpillanatban. t : mindig IÉV az időegység.

Tulajdonságok:

$$\left. \begin{array}{l} - B(t=0) = B_0 \\ - B(t) \text{ monoton növekvő} \end{array} \right\} \Rightarrow B(t) \geq B_0 > 0 \text{ lesz igaz } \forall t.$$

Tehát $B(t) = B_0 + \underbrace{(B(t) - B_0)}_{\substack{\text{Z(t) lesz a jelle.}}}$

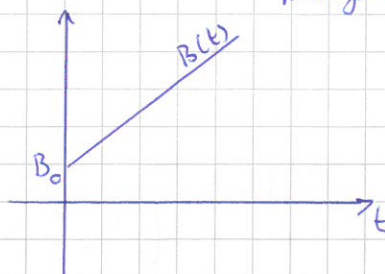
B_0 : tőke, kezdőtőke (capital)

$Z(t)$: tőkenövekedés vagy kamat. (interest).

1/A Egyszerű kamatozás. $Z(t) = B_0 \cdot r \cdot t$

r : kamatrátá. pozitív.
rögzített
mennyiség.

$$\begin{aligned} \text{így } B(t) &= B_0 + B_0 \cdot r \cdot t = \\ &= B_0 (1 + r \cdot t) \end{aligned}$$



ennyi.

Feladat:

$$B_0 = 100.000$$

$$i = 6\% \text{ kamatláb. éves.} \Rightarrow r = 0,06$$

$$B(t) = B_0 (1 + r \cdot t) = 100.000 (1 + 0,06t)$$

$$Z(t) = 100.000 \cdot 0,06 \cdot t = 6000t$$

Hatvan forint az éves kamat.

①

tőkenövekedés. Azonos hassal időnként azonos.

Milyen kamatláb esetén duplázunk tíz év alatt?

Cél: $B(10) = 2B_0$ $r = ?$

$$B(10) = 100.000 (1 + r/10)$$

↓

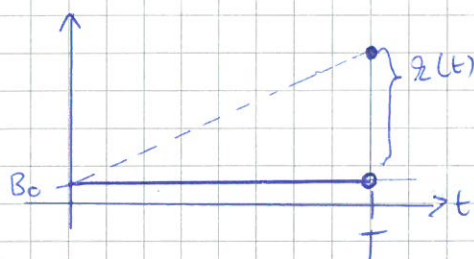
$$2 = 1 + r/10 \Leftrightarrow r/10 = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{10} = \underline{\underline{0,1}}$$

$i = 10\%$ kell.

független a kezdőtőkéjétől.

Lehetséges véges vagy nemvéges lejáratú idővel is. (megj.)

①B) Egyszerű kamatozás egyszerű kamatjövőről. LEKÖTÉS, az összegyű.



T : lejáratú idő

a kamatjövőről csak

a legutolsó pillanatban kapom meg.

feltörés esetén bulijuk a kamatot.

$$B(t) = \begin{cases} B_0 & \text{ha } t < T \\ B_0(1+rT) & \text{ha } t = T \end{cases}$$

es a kamatfizetés
számolása most
nem fontos.

②A) Ujratörésítés. Köznagy: Kamatos kamat.

pl: havonta felveszem, majd vissza is cuccolom a pénzem a bankba.

A kamatperiódusok száma 1 évben: $\frac{n}{m}$

Es tipikusan: $\frac{m}{n} = 1, \frac{m}{n} = 2, \frac{m}{n} = 4, \frac{m}{n} = 6, \frac{m}{n} = 12$

②

k -adik kamatperiódus végén: $\frac{k}{n}$

$$B(0) = B_0$$

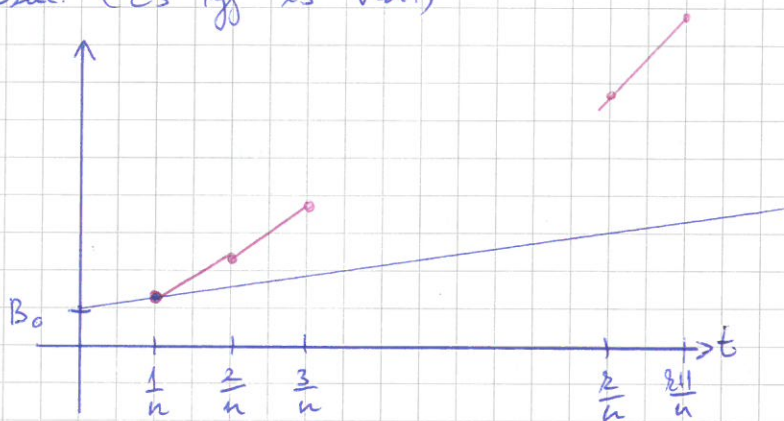
$$B\left(\frac{1}{n}\right) = B_0 \cdot \left(1 + r \frac{1}{n}\right) = B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$B\left(\frac{2}{n}\right) = B\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{r}{n}\right) = B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$$

$\vdots$

$$B\left(\frac{k}{n}\right) = B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k \quad \square$$

itt ugye már nem csak a tőke kamatozik. Talán jobban járunk, úgy érezzük. (És így is van.)



A piros pontok exponenciálisan szorozódnak. DE! A végpontok között lineáris kamatozás van! Lásd pirossal.

legyen $t \geq 0$ tetszőleges.

kamatperiódusok száma t -vel bezárólag: $\left\lfloor \frac{t}{1/n} \right\rfloor = \lfloor nt \rfloor$

így $t = \lfloor nt \rfloor \cdot \frac{1}{n}$ a legutolsó egyrátörésési időpont.

$$t = \lfloor nt \rfloor \cdot \frac{1}{n} + \underbrace{\left(t - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)}$$

ez pedig a legutolsó egyrátörésési óta eltelt idő.

Tehát a függvény a következő
fájlalával írható le.

$$B(t) = \underbrace{B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{nt}{n}}}_{B\left(\frac{nt}{n}\right)} \left(1 + \left(t - \frac{nt}{n}\right)r\right), \quad t \geq 0 \text{ formula.}$$

Nem nagyon fogjuk használni, de azért felírtam, hogy lássuk.
példák jönnek.

① $B_0 = 100.000$

$i = 6\% \Rightarrow r = 0,06$

B-havi újratőkésítés. $\Rightarrow n = 4$

$$B(t) = 100.000 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{\frac{4t}{4}} \left(1 + \left(t - \frac{4t}{4}\right)0,06\right).$$

$$B(10) = 100.000 \left(1,015\right)^{40} = \dots$$

és itt most ott lesz számolható.

↑
10 év
múlva.

$$B(10) = 181.402.$$

Cél: 10 év múlva 2-szer annyi pénz kell.

$$B(10) = 2B_0, \quad r = ?$$

$$B(10) = B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{40}$$

$$\Downarrow$$

$$2 = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{40} \Leftrightarrow \sqrt[40]{2} = 1 + \frac{r}{4}$$

$$\Uparrow$$

$$r = (\sqrt[40]{2} - 1) \cdot 4 = 0,0699$$

ennyire ez is.

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{i = 6,99\%}}$$

② Havi újratőkésítés. $i = 3\%$

✓ hónap elején beteszünk 20.000-t.

$B(5) = ?$ Ez az 4 ótárka.

$$B(0) = 20.000$$

$$B\left(\frac{1}{12}\right) = 20.000 \left(1 + \frac{0,03}{12}\right) + 20.000 = 40.050.$$

$$B\left(\frac{2}{12}\right) = 40.050 \left(1 + \frac{0,03}{12}\right) + 20.000 = 60.160.$$

⋮

$$B(5) = B\left(\frac{60}{12}\right) = ? \text{ nehéznek tűnik, sok lépés lenne eddig eljutni}$$

így.

algebrai átalakítást igényel.

Íj ötlet: $\forall$ hónapban íj számlát nyitunk.

$B(5)$ = a számlákon lévő pénz összege.

$$B(5) = \sum_{k=1}^{60} 20.000 \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^k$$

az a számla, melyet a lejárat
előtt k hónappal nyitok

$$1 + \frac{0,03}{12} = 1,0025$$

$$B(5) = 20.000 \cdot 1,0025 \sum_{k=1}^{60} 1,0025^{k-1} =$$

$$= 20.000 \cdot 1,0025 \cdot \underbrace{\frac{1,0025^{60} - 1}{1,0025 - 1}}_{64,81} = \underline{\underline{1.296.200}}$$

Használhatóbb formulát fogjuk.

Mennyi pénzt tegyek be havonta, ha az a célom, hogy 5 év elteltével
másfél millióm legyen.

$$B(5) = 1.500.000.$$

$$B(5) = B_0 \cdot \underbrace{64,81}_{\text{nem függ az inputtól}} = 1.500.000.$$

$$\Rightarrow B_0 = \underline{\underline{23.145}} \quad \square$$

Folytatos kamatozás:

$$\text{Kamatperiódus hossza} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

$$\text{Kamatperiódusok száma 1 év alatt} = n \rightarrow \infty.$$

Kamatós kamat:

$$B(t) = B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor} \left(1 + \left(t - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)r\right)$$

t rögzített, $n \rightarrow \infty$.

$$B(t) = B_0 \underbrace{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^r} \underbrace{\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{nt}\right)^t}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 + \underbrace{\left(t - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)}_{\rightarrow 0} r\right)}_{\rightarrow 1}.$$

Közt: $n \rightarrow \infty$, $\frac{\lfloor nt \rfloor}{nt} \rightarrow 1$, $\frac{\lfloor nt \rfloor}{nt} \rightarrow 1$ (klasszikus feladat)

Tehát $B(t) = B_0 e^{rt}$ est lehet, mint matematikai modell.

Folytatos kamatozás $\Rightarrow$ exponenciális növekedés

A valóságban persze pontosan így.

példa

$$B_0 = 100.000$$

$$i = 6\% \quad r = 0,06$$

$$B(10) = ?$$

$$B(10) = 100.000 \cdot e^{0,06 \cdot 10} = 182.212.$$

$\underbrace{160.000}_{\text{egyszerű kamatozás}} <$

$\underbrace{181.402}_{\text{3 havi jóváírás.}}$

Eszel kamatos kamat-összegeket elérjük a maximumot.

Kapcsolat a kamatozás között:

$$t = \frac{z}{n} \text{ legyen.}$$

Egyszerű kamatozás: $B\left(\frac{z}{n}\right) = B_0 \left(1 + \frac{z}{n} r\right)$

Kamatos kamatozás: $B\left(\frac{z}{n}\right) = B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^z$

Folytonos kamatozás: $B\left(\frac{z}{n}\right) = B_0 e^{\frac{z}{n} r}$

binom. tétel.

$$B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^z = \underbrace{B_0 \left(1 + z \cdot \frac{r}{n} + \left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{r}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-1}{2}\right) \left(\frac{r}{n}\right)^{z-1} + \left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{r}{n}\right)^z\right)}_{\text{egyszerű kamatozás} = t \text{ megkötött.}} = \underbrace{\dots}_{\text{többség } (> 0, \text{ ez világos)}}$$

$$B_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^z = B_0 \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \right]^{\frac{z}{n}} = B_0 e^{rt}$$

mon. növekedés

Példa Életjáradék.

30 éves vagyas. Havonta befizetlek X összeget. 60 éves koromban nyugdíjba vonulok. Előreszem azt a vagyast felélni, havonta kivesszek 50.000 forintot. Mennyet kell befizetni, hogy elég legyen, „ha örökké fogok élni” :).

Hosszútávú éves kamat: 6%. Havi újratőkésítés van.

$$X = ?$$

(A) Mennyi pénzem lesz 60 éves koromban?

$$30 \cdot 12 = 360 \text{ hónap.}$$

$$\sum_{z=1}^{360} X \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^z = X \cdot 1,005 \sum_{z=0}^{359} 1,005^z =$$

(7) 60. születésnapom előtt z hónappal befizetett pénz.

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{névtani} \\ \text{sor.} \end{array} = X \cdot 1,005 \cdot \frac{1,005^{360} - 1}{1,005 - 1} = \underline{\underline{X \cdot 1,009,54}}$$

Mennyi pénzre van szükségem 60 éves koromban?

$$\begin{aligned} 50.000 + \frac{50.000}{1,005} + \frac{50.000}{1,005^2} + \dots + \dots &= 50.000 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1,005} + \frac{1}{1,005^2} + \dots\right)}_{\text{geom. sz.}} = \\ &= 50.000 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1,005}} \right) = \underline{\underline{10.050.000}} \end{aligned}$$

Tehát: $X \cdot 1009,54 = 10.050.000 \Rightarrow \underline{\underline{X = 9955}}$ ennyi.

10.050.000 kifizethető. Het 1 hónap alatt a 10.000.000 újra kifizethető
körül az 50.000. ennyi.

Filozófiászerű következt. Mire jó a kamat?
(szóban.)

Jelenérték számítás

"A mai 1 Ft többet ér, mint a holnapi 1 Ft."

Tőke: B_0

$B(t)$ = pénzünk a t időpontban.

ma = 0 időpont.

a pénzünk $\frac{B(t)}{B_0}$ -szorosára nőtt.

Tehát: a mai 1 Ft $\frac{B(t)}{B_0}$ forintot ér a t időpontban
(kamatozás).

viszsa felé is gondolkodhatunk.

- a t időpontban kapott 1 Ft $\frac{B}{B(t)}$ forintot ér ma.

- C_t forintom van t időpontban $\Rightarrow C_t \frac{B_0}{B(t)}$ forintot ér ma.

Diszkonttényező: $D(t) = \frac{B_0}{B(t)}$

Jelenérték: cash flow: t időpontban $C_t \in \mathbb{R}$ pénst kapunk.

$$PV = \sum_t C_t \frac{B_0}{B(t)} = \sum_t C_t D(t).$$

↑
present
Value

példát nézzünk.

Befektetési lehetőség adott.

Kesdőtőke: 100.000

10 év múlva: 150.000 kockázat nélkül.

Van egy másik alternatíva. $i = 5\%$ kamat évente, kockázat nélkül.
ÉVES ÚJRA TÖKESÍTÉSSEL.

Melyik legyen?

1. megoldás: $B(t) = 100.000 \cdot \underbrace{\left(1 + 0,05\right)^{10}}_{\frac{B(t)}{B_0} \text{ úgyfe}} = 163.000 > 150.000$
a banki bef. jobban megéri.

2. megoldás: („közös-aspekt”)

$$PV = 150.000 \cdot D(t) = 150.000 \cdot D(10) \text{ lesz.}$$

$$D(t) = \frac{B_0}{B(t)}, \quad D(10) = \frac{B_0}{B(10)} = \frac{B_0}{B_0 (1,05)^{10}} = \frac{1}{(1,05)^{10}} = \underline{\underline{0,61}}.$$

$$PV = 150.000 \cdot 0,61 = \underline{\underline{91.500}}.$$

azaz kevesebb jelenértékben, mint 100.000.

emiatl ne ezt válasszuk.

jelenérték alapján érdemes dönteni így.

KÖTVÉNY: Értékpapír. Hitelviszonyt megtestesítő értékpapír.
angolul: BOND.

Mindig lock-inmentes

Mindig van egy véges lejárat időpont (T). $T \in (0, \infty)$

Kamatfizetés a névérték %-ban történik.

Megvásárolni a névértéken vagy más áron lehet.

Fontosabb típusok: - kupon nélküli (ZERO-COUPON BOND)

csak a lejáratkor
történik visszatérítés.

- kuponos (COUPON BOND)

Megkapom a név-
értéket és a kamatot
EGYSZER KAMATVALSSAL.

↓
fix időközönként van kamatfizetés
+ a lejáratkor megkapjuk a
névértéket is, ovkorsz.

Számoljuk.

① Zero-coupon bond, a névérték 20.000, a lejárat idő
 $T=10$ év, $i=2\%$.

$$B(10) = \underbrace{20.000}_{\text{névérték}} (1 + 10 \cdot 0,002) = 20.000 \cdot 1,2 = \underline{\underline{24.000}}$$

jó befektetés ez? Mennyi az éves kamat kamat?

Évenkénti újratőkésítéssel, azt
megítjék.

Legyen B_0 a kibocsátási ár. Most $B_0 = 20.000$.

$r = ?$

$$B(10) = 20.000 (1 + r)^{10} = 24.000$$

↓

$$r = 0,0184 (= 1,84\% \text{ éves kamat}).$$

Legyen most $B_0 = 20.500$. $B(10) = 20.500 (1 + r)^{10} = 24.000$

$\Rightarrow r = 0,0159$ (1,59%) alacsonyabb kamat adódik.

Ez egy kamatos kamt, ebben szaktunk, ebben szeretünk gondolkodni.

E_2 : Yield-to-Maturity (lejáratig számított hozam).

jelölés: YTM.

Az a kamatláb, mellyel jelenértéket számolva éppen a befektetési költséget kapjuk.

Formálisan:

$$\sum_t C_t D(t)$$

Ebben az esetben: $\sum_t C_t \frac{1}{(1+r)^t}$ adódik.
||
befektetési költség

Kérdés, hogy mennyi az r . $r = YTM = ?$

Előbb: $B_0 = 20.000$

Előre $PV = \frac{20.000}{(1+r)^{10}}$

Befektetési költségünk: 20.000.

$PV = 20.000$ igazságos kamt.

$\Rightarrow r = 1,84\% = YTM$ ennyi.

Példa: Kuponos kötvény van. névérték = 20.000. $i = 2\%$.

lejáratú idő = 10 év

évenkénti kamattérlesteret van.

$PV = ?$

Évente 400 forint kamatot kapunk, úgy.

$$PV = \frac{400}{1+r} + \frac{400}{(1+r)^2} + \dots + \frac{400}{(1+r)^{10}} + \frac{20.000}{(1+r)^{10}}$$

↑ mivel a kamatos kamat elől most!

① ERRE VAGYUNK KÍVÁNCSIAK.

$$PV = 400 \left(\underbrace{\sum_{z=1}^{10} \frac{1}{(1+r)^z}}_{\text{névtani sorozat}} \right) + \frac{20.000}{(1+r)^{10}} = \dots = \frac{400}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{10}} \right) + \frac{20.000}{(1+r)^{10}} =$$

= ...

Tfh a befektetési költség $B_0 = 20.500$.

$PV = B_0$ egyenletet kell megoldani.

Megoldás: Kijön: $r = 0,017$ (1,7%)

A banki kamatláb 1,7% éves kamattal valószínűleg meg.

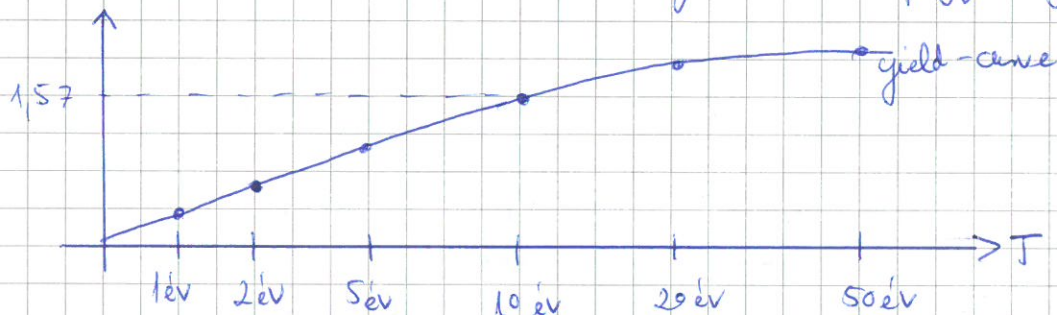
— 0 —

Fontos, hogy a YTM függ az újratőkesítési periódusok hosszától.

— 0 —

Hozamgörbe: Azonos minőségű, de különböző lejáratú kötvények (yield-curve)

esetén a YTM ábrázolása a lejáratú idő függvényében.



a görbe monoton nő. ha a piac normálisan üzemel.

Példa: Diszkontálás hozamgörbe segítségével.

t	C_t
1 év	20.000
2 év	10.000
5 év	50.000

$PV = ?$

Nézzük meg az egyes YTM-eket.

t	C _t	YTM _t
1. év	20.000	2%
2. év	10.000	2,5%
5. év	50.000	3%

$$\sum_t C_t D(t) = \frac{20.000}{1+0,02} + \frac{10.000}{(1+0,025)^2} + \frac{50.000}{(1+0,03)^5} = \underline{\underline{72.256}}$$

↑
jelenérték

Honnan jön a YTM? gyakorlati kérdés.

- Több hónap vagy év: valamilyen államkötvény
- Rövid időtáv (pár dni): LIBOR (London InterBank Offer Rate)
- valamint a jeggybanki alapkamat is mérhető lehet.

