

2019.04.27.

☺ = konstanciák

Halmazelm.

 $c_1, c_2, \dots, \underbrace{v_1, v_2, \dots}_{\text{relációk}}, f_1, f_2, \dots$ cccccc voltak.

Csopotalmélet nyelve.

$$\#f_1 = 2, e \quad f_1(x, y) = x \circ y$$

$$d_1 = (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) \quad \text{asszociatív}$$

$$d_2 = (\forall x)((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x))$$

$$d_3 = (\forall x)(\exists y)((x \circ y = e) \wedge (y \circ x = e)).$$

$$A = \mathbb{Z}, \quad x \circ y = x + y, \quad e = 0 \quad \text{példa csopatra.}$$

$$A = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x > 0\} \quad x \circ y = xy, \quad e = 1. \quad \text{is jó példa.}$$

$$A = n \times n\text{-es mátrixok,} \quad 0: \text{mátrixszero,} \quad e: \text{egység mátrix.}$$

ha $\det A \neq 0$.

Interpretációt keresünk. (= struktúra vagy modell)

$A \neq \emptyset$ nemüres alaphalmaz.

$\bar{c}_1, \bar{c}_2$: konstans jelekhez tartozó interpretációk.

$$(1) \quad \bar{c}_i \in A$$

$$(2) \quad \bar{r}_i \subseteq A^n \text{ ha } \# r_i = n$$

$$(3) \quad \bar{f}_i: A^n \rightarrow A \text{ ha } \# f_i = n$$

Nyitott előfeltevés: $x + x + 1 = 0$ mi az A ? mi az x ?

Kötött előfeltevés: $(\forall x)(x + y)(y + z) = 0$.

$\uparrow$
 ez
 kötetlen
 ①

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{nyitott előfeltevés}}$

pl: $(\forall x)(x+y=0) \vee (\exists y)(y+z=1)$
 $\nearrow$ zárt $\nearrow$ nyitott $\nearrow$ zárt $\nearrow$ nyitott

Ha minden változó le van zárt: zárt formula - t zártunk.

$(\forall x)(x \cdot x + 1 = 0)$ ÉRTÉKEKELÉS: $V: \{x, y, z, \dots\} \rightarrow A$
 egy betétfüztetés, tulajdonképpen.

$\mathcal{M} \models \beta$ jelölés: $\mathcal{M}$ -ben teljesül a β -formula.
 β mindig zárt formula. Így van értelme.

Def.: β logikai igazság, ha bármely modellben ($\mathcal{M}$) igaz.

példa: volt: $p \vee \neg p$ ítéletkalkulusban.

DE: $(\exists x)(x \cdot x + 1 = 0) \vee \neg (\exists x)(x \cdot x + 1 = 0)$.

es tautológiából származik, ugye. DE:

$(\forall x)(x = x)$ már nem ilyen, mégis logikai igazság.

$\beta_1 \equiv \beta_2$ ha β_1 és β_2 ugyanazon struktúrákban igazak.

$\mathcal{M} \models \beta_1 \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \beta_2$.

Példa:

$\neg(\forall x)(\neg(x)) \equiv (\exists x)\neg(x)$. ugye.
 $\vdots$

Def.: $\Delta \models \beta$, ha $\forall \mathcal{M}: \forall d \in \Delta: \mathcal{M} \models d$, akkor $\mathcal{M} \models \beta$.

Eldöntéshatár algoritmus arra, hogy a logikai igazság-e.

Alonso Church (1936): ILYEN ALGORITMUS NEM LÉTEZIK.

TAUTOLOGIA jelölése: $\models \beta$
 $\uparrow$
itt üres halmaz van.

Volt még: $\Delta \models \beta \Leftrightarrow \Delta \vdash \beta$
 $\wedge$ tálalható levezetés.

Gödel teljességi tétete (~1930).

Hegadható axiómák és levezetési szabályok úgy, hogy

$$\Delta \models \beta \Leftrightarrow \Delta \vdash \beta.$$

Biz: nehéz. $\square$

Példa: $\Delta = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ csoportaxiómák.

$\mathcal{M} \models \Delta$: $\forall \alpha \in \Delta$: $\mathcal{M} \models \alpha$. $\Rightarrow \mathcal{M}$ egy csoport.

$$\Delta \models \beta \Rightarrow \Delta \vdash \beta$$



$\mathcal{M} \models \Delta \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$: Ha β $\forall$ csoportban igaz, akkor levezethető
 $\mathcal{M}$ csoport a csoportaxiómákból.

Ez valahol aszt trivialis. Érinti a matematika alapjait.

Def.: Δ konzisztens, ha $\exists \mathcal{M}$: $\mathcal{M} \models \Delta$.

Δ ellentmondásos, ha $\exists \alpha$ formula: $\Delta \vdash \alpha$
és $\Delta \vdash \neg \alpha$.

Δ ellentmondástalan, ha nem ellentmondásos.

Állítás: Ha Δ ellentmondásos, akkor
 $\forall \beta$ formula $\Delta \vdash \beta$. (tehát $\neg \beta$ is levezethető).

Biz: $\vdash h$ $\Delta \vdash d$ és $\Delta \vdash \neg d$.

$d \rightarrow (\neg d \rightarrow \beta)$ tautologikus logikai igazság
és

$$p \xrightarrow{h} (\neg p \rightarrow q)$$

$$\begin{array}{ccccc} i & & i & h & h \\ \text{-----} & & & & \end{array}$$

ellentmondás! Tautológia és tehát.

$\neg d \rightarrow \beta$ modus ponenssel

β modus ponenssel. $\square$

Tétel: Δ konisztens $\Leftrightarrow \Delta$ ellentmondásmentes.

Def: Δ teljes, ha $\forall d: \Delta \vdash d$ vagy $\Delta \vdash \neg d$.

Gödel első nemteljességi tétele

→ tartalmazza a konzisztens
és teljes elvétel

Ha egy axiómarendszer konzisztens és „elég kifejező”, akkor nem teljes
(ilyen volt például a kontinuum-hypotézis)

Gödel második nemteljességi tétele

és első kifejező

Ha egy axiómarendszer konzisztens, akkor a konzisztenciája nem bizonyítható
a rendszeren belül.