

Kompaktsági tétel: $\Delta :=$ bármelyleges formula-halmaz

Δ konzisztens $\Leftrightarrow \forall \Delta_0 \subseteq \Delta$ véges részhalmaza konzisztens.

Tfh $\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}}_{\text{elemen, hogy ez mind igaz.}} \uparrow \alpha_{101}, \dots$ megsz.
 α_2 nem biztos, hogy az lesz.

De nem bizonyíthat. NEHEZ.

$$\left. \begin{array}{l} a \\ a \rightarrow b \end{array} \right\} \Rightarrow b \quad \text{MODUS PONENS}$$

$$b \rightarrow c \quad \text{Látható, hogy igaz.}$$

$$c \rightarrow d$$

$$d$$

① $\frac{a, a \rightarrow b}{b}$ "bevezetés"

② $\frac{b, b \rightarrow c}{c}$ modus ponens

③ $\frac{c, c \rightarrow d}{d}$ modus ponens

így is d lehet járni.

$\uparrow$ az egy bevezetés volt.

Def:

Legyen Δ a premissák halmaza.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ egy bevezetés β -hez Δ -ból, ha

- $\alpha_n = \beta$

- $\forall i, 1 \leq i \leq n \quad \alpha_i \in \Delta$ vagy

α_i tautológia vagy

$\exists i, j < i$, hogy

$\frac{\alpha_i, \alpha_j}{\alpha_i}$ modus ponens segítségével.

Def: β levezethető Δ -ból, ha $\exists$ ilyen bevezetés.

1.

feladat: $\Delta \vdash \beta$.

Az ítéletkalkulus teljeségi tétele:

$$\Delta \models \beta \iff \Delta \vdash \beta.$$

$\Leftarrow$ bizonyítása könnyű. ("Helyességi tétel").

$\Rightarrow$ bizonyítását nézzük!

Biz: Tfh $\Delta \models \beta$ ha ez igaz, akkor a kompakttsági tétel miatt

$$\exists \Delta_0 \subseteq \Delta \text{ véges, hogy } \Delta_0 \models \beta.$$

$$* \text{ Tfh } \Delta \not\models \beta \iff \exists v \forall \alpha \in \Delta: v(\alpha) = i \text{ és } v(\beta) = h.$$

értékelés fogalma: $v: \{p_1, p_2, \dots\} \rightarrow \{i, h\}$

$$\alpha = p_1 \vee p_2$$

$$v(p_1) = i \quad v(p_2) = h$$

$$v(\alpha) = i.$$

$$\iff \exists v \forall \alpha \in \Delta: v(\alpha) = i \text{ és } v(\beta) = h.$$

$$\iff \Delta \cup \{\neg \beta\} \text{ konzisztens}$$

$$\Delta \models \beta \iff \Delta \cup \{\neg \beta\} \text{ inkonzisztens.} *$$

$$\text{Tfh } \Delta \models \beta.$$

$$\Delta \cup \{\neg \beta\} \text{ inkonzisztens} \Rightarrow \exists \Delta_0 \subseteq \Delta \cup \{\neg \beta\} \text{ véges résköltség, kompaktsg} \text{ amely inkonzisztens.}$$

$$\text{1. eset: Ha } \neg \beta \in \Delta_0 \Rightarrow \Delta_0 = \Delta_1 \cup \{\neg \beta\} \text{ véges és } \Delta_1 \subseteq \Delta.$$

$$\Delta_1 \cup \{\neg \beta\} \text{ inkonzisztens} \Rightarrow \Delta_1 \models \beta.$$

$$\text{2. eset: Ha } \neg \beta \notin \Delta_0. \quad \underbrace{\Delta_0 \cup \{\neg \beta\}}_{\text{inkonzisztens}} \Rightarrow \Delta_0 \models \beta. \quad \square$$

$\Delta_0 = \{d_1, \dots, d_n\}$ legyen.

Tény: $d_1, \dots, d_n \models \beta \Leftrightarrow (d_1 \wedge \dots \wedge d_n) \rightarrow \beta$ tautológia.

$\Leftrightarrow (d_1 \rightarrow (d_2 \rightarrow \dots \rightarrow (d_n \rightarrow \beta)))$ tautológia.

β egy levezetése $\{d_1, \dots, d_n\}$ -ből.

$\varphi_1 = d_1$
 $\varphi_2 = d_2$
 $\vdots$
 $\varphi_n = d_n$

$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = d_1 \\ \varphi_2 = d_2 \\ \vdots \\ \varphi_n = d_n \end{array} \right\} \in \Delta_0$ premissahalmaz

$\varphi_{n+1} = d_1 \rightarrow (d_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (d_n \rightarrow \beta)))$ tautológia

$\varphi_{n+2} = d_2 \rightarrow (d_3 \rightarrow (\dots \rightarrow (d_n \rightarrow \beta)))$ φ_1 -ből és φ_{n+1} -ből MP segítségével!

$\varphi_{n+3} = d_3 \rightarrow (d_4 \rightarrow (\dots \rightarrow (d_n \rightarrow \beta)))$ φ_2, φ_{n+2} -ből

$\vdots$

$\varphi_{2n+1} = \beta$ ■

ELSŐRENDŰ LOGIKA

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =, \dots, \underbrace{c_1, c_2, \dots}_{\text{KONSTANS JELEK}}, \underbrace{r_1, r_2, \dots}_{\text{RELÁCIÓ-JELEK}}, \underbrace{f_1, f_2, \dots}_{\text{FÜGGVÉNY-JELEK}}$
 $\underbrace{x_1, x_2, \dots}_{\text{Változó jelek}}$
 $\# r_n$: hány változás mellett
 $\# f_n$: - 1 - függvény.

Példa elsőrendű nyelvekre:

A halmazelmélet nyelve: $\# \in = 2$

A rendezett halmazok nyelve: $\# \leq = 2$

A csoportelmélet nyelve: $\# 0 = 2$ $\#^{-1} = 1$ függvényjelek
 e. konstans jel (egységlem)

Aritmetika nyelve: $\# + = \# \cdot = 2$ $0, 1$ = konstans jelek

③ $\# \leq = 2$ relációjel

aritmetika nyelv:

$$(1+1) \cdot 0 + 1 + x \leq (x \cdot y + 1) \cdot z$$

$$x \cdot x + 5$$

Igaz? Hamis? Hülye kérdés!

$$(\forall x) (x \cdot x + 1 \geq 0)$$

Már lehet illető kérdés, de még mindig nem tudjuk, igaz.

$$x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C} \text{ igaz.}$$

Kifejezés:

adott egy nyelv.

(1) $\forall$ változójel kifejezés;

$x_1, x_2, \dots$

(2) $\forall$ konstans jel $-11-$;

$c_1, c_2, \dots$

(3) Ha adott egy $\#f = n$ és $z_1, \dots, z_n$ kifejezés,
akkor $f(z_1, \dots, z_n)$ is kifejezés.

gyakorlatban: ~~$+ (z_1, z_2)$~~ $\Rightarrow z_1 + z_2$

Példák:

(1) halmazelmélet: $x_1, x_2, \dots$

(2) rendezett halmazok: $x_1, x_2, \dots$

(3) csoportelmélet: $x_1, x_2, \dots, e,$

$x_1 \circ x_2, x_3 \circ x_3, x_5 \circ e, x_4^{-1}, \bar{e}, \dots$

$(x_1 \circ x_2)^{-1}, x_3 \circ (x_5 \circ e), \dots$

$(x_4^{-1})^{-1}$ - sokféle van.

(4) aritmetika: $x_1, x_2, \dots, \overbrace{c_1, c_2, \dots}^{0, 1}, x_1 + x_1, x_2 \cdot x_3, 0 + x_5, \dots$
④

Formula:

primformulák: $\begin{cases} (1) z_1 \text{ és } z_2 \text{ kifejezés, akkor } z_1 = z_2 \text{ primformula} \\ (2) \#r = n \text{ relációjel, } z_1, \dots, z_n \text{ kifejezés, akkor} \\ \quad r(z_1, \dots, z_n) \text{ is primformula.} \end{cases}$

(3) ha α formula, akkor $\neg \alpha$ is formula.

(4) ha α, β formulák, akkor $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta, \alpha \Leftrightarrow \beta$ is formulák.

(5) ha α formula és x változójel, akkor
 $(\forall x)\alpha, (\exists x)\alpha$ is formulák.

más formula nincs.

Példák:

(1) halmazelmélet.

prim formulák: $x_2 = x_2$
 $x_2 \in x_2.$

formulák: $(\forall x)(\neg(x_1 \in x_2) \wedge (x_3 = x_5) \Rightarrow (x_6 \in x_1))$

$(\forall x)(\forall y)(\forall t)((t \in x) \Leftrightarrow (t \in y)) \Rightarrow (x = y)$

például.

Létezik üres halmaz.

$(\exists x)(\forall y)(\neg(t \in x)).$



$\emptyset$ jelölés bevezethető.

pontosan 1 üres halmaz van.
emitt egyértelmű.

