

(A) Tétel: Ha κ, λ végtelen számosságok, akkor $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Nem tudjuk bizonyítani.

(B) Tétel: Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa^2 = \kappa$.

(A számosságaritmetika algtétele.)

Biz: nélkül. $\square$

Legyen $B \Rightarrow A$.

Biz: Tfh $\lambda \leq \kappa$

$$\kappa < \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa = 2\kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

$$\stackrel{C-B}{\Rightarrow} \kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \kappa \quad \square$$

Tétel: Ha $|A| = \kappa$, akkor $|P(A)| = 2^\kappa$

$$\begin{cases} \text{eml.:} \\ |A| = n \\ \Rightarrow |P(A)| = 2^n \end{cases}$$

Biz: $P(A) \xrightarrow{A} \{0,1\} = \{f \mid f: A \rightarrow \{0,1\}\}$

$$X \subseteq A, \quad X \mapsto 1_X, \quad 1_X(a) = \begin{cases} 1 & a \in X \\ 0 & a \notin X \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A) \sim \{0,1\}^A \text{ és tudjuk, hogy } |\{0,1\}^A| = 2^\kappa \quad \square$$

Spec. eset: $|P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = c$

Következmény: $\forall \kappa: \kappa < 2^\kappa$ (már beláttuk: $|A| < |P(A)|$).

$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c$ ez is kibővíthető.

(AKH)
Általánosított kontinuum-hipotézis: Ha κ végtelen számosság, akkor

$\nexists$ olyan λ számosság, melyre $\kappa < \lambda < 2^\kappa$.

Gödel bizonyította be 1938-ban: AKH nem cáfolható.

Cohen (1963): AKH "nem bizonyítható".

Hatványozás.

$$2^{H_0} = C$$

$$C = 2^{H_0} \leq 2^{H_0} \leq 2^{H_0} \leq C = \left(2^{H_0}\right)^{H_0} = 2^{\overbrace{H_0 \cdot H_0}^{H_0}} = 2^{H_0} = C$$

$2 \leq n < \infty$

$$\stackrel{C-B}{\Rightarrow} 2^{H_0} = 2^{H_0} = 2^{H_0} = C = C.$$

Mennyi az összes valós számsorozat halmazának számossága?

Sorozat: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

felírás: $|\mathbb{N}_{\mathbb{R}}| = C^{H_0} = C$

$C^C = ?$ Ez nem látszik.

$$2^C \leq H_0^C \leq C^C \leq (2^C)^C = 2^{\overbrace{C \cdot C}^C} = 2^C$$

$$\stackrel{C-B}{\Rightarrow} C^C = 2^C = H_0^C = C^C \text{ ennyit tudunk}$$

$\uparrow$ H_1 $\rightarrow$ $\rightarrow$

$$|\mathbb{R}_{\mathbb{R}}| = C^C \text{ tulajdonképpen}$$

$$\stackrel{||}{|R_{\mathbb{Z}, \mathbb{R}}|} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}| = 2^C$$

LOGIKA

Alk:

"Ha nem esik az eső és nem fúj erősen a szél, akkor
Sanyi horgászni megy."

kér:

Sanyi horgászni ment, ezért nem esik az eső és nem
fúj erősen a szél.

másik példa: Az nem lesz most.

Ókor, Arisztotelész Az alapok hídldozója.

Később Leibniz. javítani, tökéletesíteni.

1900-as évek: Boole és de-Morgan.

P: esik az eső

Q: erősen fúj a szél

R: Széki kurgászai meg.

Ha nem P és nem Q, akkor R.

állítások helyett betűk

Ha R, akkor nem P és nem Q.

További formalizmus: nem P $\equiv \bar{P}$ vagy $\neg P$

Ha..., akkor... $\equiv P \rightarrow Q$

X és Y $\equiv X \wedge Y$

Így:
$$\frac{((\neg P) \wedge (\neg Q)) \Rightarrow R}{R \Rightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))}$$
ennyi.

Esik az eső.

Erősen fúj a szél. } ítéletek, kijelentések, állítások hívjuk őket

Az ítéletet nem definiáljuk. A legegyszerűsége vesszük.

Vannak filozófiai aspektusai.

Van élet a Naprendszeren kívül. Ítélet. Vagy igaz, vagy hamis.

"Ez a mondat hamis." - NEM ÍTÉLET (a házig paradoxona.)

$X^2 + 3 = 11$ sem ítélet. Ha x nemkét szám, akkor nem az.
Vagy kvantorok: $\exists, \forall$.

igazságtételek: i, h.

P	$\neg P$
i	h
h	i

negáció igazságtáblája

ÉS:

P	Q	$P \wedge Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Konjunktio

VAGY:

P	Q	$P \vee Q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

diszjunktio megegyező vagy

(van igazság is, vagy.)

$P \oplus Q$: kizáró vagy

$$P \oplus Q = (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

HA, ..., AKKOR:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

implikáció

AKKOR ÉS CSAK AKKOR:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

ekvivalencia

iff. egyenlő