

Halmazelmélet

4. konzultáció

2019. 03. 09.

paradoxonokkal megismer.

Összes halmazok halmazának paradoxona

Legyen H az összes halmazok halmaza.

$$\text{Ehhez } P(H) \subseteq H \Rightarrow |P(H)| \leq |H|.$$

$$\text{De } |H| < |P(H)|. \quad \downarrow$$



Feloldás: H nem halmaz, hanem osztály. Valódi osztály.

Összes számosságok halmazának paradoxona

Ehhez bevezető: $|N| \leq |P(N)| < |P(P(N))| < \dots$ azaz. Nincs legnagyobb számosság.

Lemma: Ha $\{K_i : i \in I\}$ számosságok tetszőleges halmaza, akkor
 $\exists K$ számosság, melyre $K_i < K \quad \forall i \in I$ esetén.

Biz: $|A_i| = K_i$, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ így $\forall i \in I: A_i \subseteq A$.

Legyen $K = |P(A)|$.

$$\Downarrow \\ K_i \leq |A| < |P(A)| = K. \quad \blacksquare$$

És a paradoxon: Legyen S az összes számosságok halmaza.

Alkalmazva a lemmát $\exists K : \forall \lambda \in S : \lambda < K$.

De S az összes számosságot tartalmazza, így $K \in S$. Ezért $K < K$. $\downarrow$

Feloldás: S nem halmaz, hanem osztály.

Kategoriatheória: más alapokon építkező matematikatudomány.

Nem halmaz az alap építő, hanem a függvény. Enderes.

Def: $K + \lambda = |A \cup B|$, $|A| = K$, $|B| = \lambda$, $A \cap B = \emptyset$.

És jóldefiniált! $\textcircled{D}$

All: (1) $K + \lambda = \lambda + K$

(2) $K + (\lambda + \mu) = (K + \lambda) + \mu$

(3) $0 + K = K$

Biz: (1) $A \cup B = B \cup A$ $\square$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $\square$

(3) $\emptyset \cup A = A$ $\square$

Példák

(1) $3 + 5 = 8$

(2) $1 + \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0$

$\{0\} \cup \{1, 2, \dots\} = \{0, 1, 2, \dots\}$

(3) $\mathbb{Z} + \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0$

$\uparrow$ véges
 $\{1, \dots, 2\} \cup \{2, 1, \dots\} = \mathbb{N}$ nem

(4) $\mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0$

$\{1, 3, 5, \dots\} \cup \{2, 4, 6, \dots\} = \mathbb{N}$

(5) $1 + \mathbb{C} = \mathbb{C}$

$\{0\} \cup (0, 1) = [0, 1)$

$(0, 1) \subseteq [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$

$C \leq |[0, 1)| \leq C \Rightarrow |[0, 1)| = C$
C-B-tétel.

(6) $\mathbb{C} + \mathbb{C} = \mathbb{C}$

$[0, 1) \cup [1, 2] = [0, 2]$ pl.

(7) $\mathbb{N}_0 + \mathbb{C} = \mathbb{C}$

$(0, 1) \subseteq A = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$

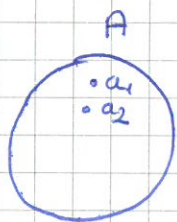
$C \leq |A| \leq C$

$\updownarrow$
 $|A| = C$

Végtelen számosság esetén elég látni, hogy a nagyobb dominál.

All: Bármely végtelen halmaznak létezik megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.

Biz:



$a_1 \in A$

A végtelen $\Rightarrow \exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$

$\vdots$

$\vdots a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

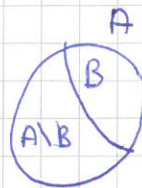
nem üres, mert A végtelen.

$B = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$ és $|B| = \aleph_0$ $\square$

Következmény: A K végtelen számosság esetén $\aleph_0 \leq K$.

Tétel: Ha K végtelen számosság, akkor
 $K + \aleph_0 = K$.

Biz.: $|A| = K$, $B \subseteq A$, $|B| = \aleph_0$. $|A \setminus B| = \lambda$.



$K = \lambda + \aleph_0$ lesz ebben.

$A = (A \setminus B) \cup B$ miatt.

$$K + \aleph_0 = (\lambda + \aleph_0) + \aleph_0 = \lambda + (\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0}_{\aleph_0}) = \lambda + \aleph_0 = K. \quad \blacksquare$$

Következmény: Az irracionális számok halmazának számossága c .

$$\mathbb{R} = \mathbb{I}_{\text{rac}} \cup \mathbb{Q}$$

$$c = K + \aleph_0$$

$$|\mathbb{I}_{\text{rac}}| = K \geq \aleph_0 \text{ est tudjuk.}$$

$$\Downarrow$$
$$c = K + \aleph_0 = K \Rightarrow K = c.$$

Következmény: A transzcendens számok halmazának számossága c .

$$\mathbb{R} = \text{Alg} \cup \text{Trans.}$$

~~$\mathbb{R} \neq \text{Alg}$~~

Szorzás jön.

Def.: $K \cdot \lambda = |A \times B|$, ahol $|A| = K$, $|B| = \lambda$.

jóldefiniált (nem függ a halmazok választásából).

Állítás:

$$(1) \quad K \cdot \lambda = \lambda \cdot K$$

$$(3) \quad K(\lambda + \mu) = K\lambda + K\mu$$

$$(2) \quad K(\mu \lambda) = (K\mu) \lambda$$

$$(4) \quad 1 \cdot K = K$$

$$(5) \quad 0 \cdot K = 0$$

Biz: (1) $A \times B \sim B \times A$, $(a, b) \mapsto (b, a)$. $\square$
 $\uparrow$ NEM EGYENLŐEK! EZ FONTOS.

Állítás: $\kappa \leq \lambda$ (monotonitás)

(1) $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$

(2) $\kappa \mu \leq \lambda \mu$

szivonás:

$$\kappa + ? = \lambda$$

$$\aleph_0 - \aleph_0 = ?$$

$$\aleph_0 + \dots = \aleph_0$$

nem egyértelmű. (az osztás sem).

Példák:

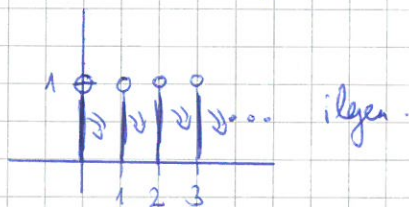
(1) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

(2) $\aleph_0 \cdot \mathbb{C} = \mathbb{C}$

$$\{0, 1, 2, \dots\} \times [0, 1) \sim [0, \infty)$$

(3) $\mathbb{C} \cdot \mathbb{C} = \mathbb{C}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nem látjuk be.



ezeket elforgatva kapjuk a $[0, \infty)$ -t, ami $\mathbb{C}$ számosságú.

Hatványozás

$|A| = 5$

$|B| = 3$

5^3 - elemű halmast kellene mutatni.

$$|\{f \mid f: B \rightarrow A\}| = 5^3 \text{ lesz. Elmélet.}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$f(1) = L \quad 5$$

$$f(2) = L \quad 5$$

$$f(3) = L \quad 5$$

$\Rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 5$ lehetőség.

Def: Ha $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $\kappa^\lambda = |\{f \mid f: B \rightarrow A\}|$.

Állítás: (1) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

(3) $((\kappa^\lambda)^\mu)^\nu = \kappa^{\lambda \cdot \mu \cdot \nu}$

(2) $\kappa^\lambda \kappa^\mu = \kappa^{\lambda + \mu}$

Példák: ahogyan bizonyított, hogy az első is tétel.

Tétel: $2^{\aleph_0} = c.$

Biz: $\{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}\}$ halmaza.

ez tulajdonképpen a végtelen 0-1-sorozat halmaza. $\equiv V$

$| (0,1) | = c$ legyen.

$F: (0,1) \rightarrow V$

~~$(0,1)$~~ $(0, x_1 x_2 x_3 \dots)_2 \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$\mathbb{E}$ injektív.

De nem bijektív!

$\frac{1}{n} = (0, 01000\dots)_2 = (0, 001111\dots)_2$

$G: V \mapsto (0,1)$ kell.

$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1 x_2 \dots)_{10}$
 $\uparrow$ itt a trükk.

$x_i \in \{0,1\}.$

$0,43000\dots = \cancel{0,4299\dots}$

$\mathbb{E}$ injektív lesz

$\Rightarrow V \sim (0,1). \quad \square$
C-B-tétel

$c \cdot c = \frac{\aleph_0}{2} \cdot \frac{\aleph_0}{2} = \frac{2\aleph_0}{2} = \frac{\aleph_0 + \aleph_0}{2} = \frac{\aleph_0}{2} = c.$ Innen látszik.

