

Halmazelm.

$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$$

megfelel a számosságuk.

$$|\emptyset| = 0 \quad |\{1, 2, 5\}| = 3.$$

$|N| = \aleph_0$ volt ugye. Alapok lehetek: Georg Cantor (1845 - 1918).

forradalmi elmélet volt, azt a jelöléssel is éreztették.

más típusú végtelent is látnak: $|R| = c$ kontinuum-számosság.

↑
folytonosságot
jelöl.

régi magyar könyvekben: intervallumok $\equiv$ kontinuumok.

$$\frac{F}{2} \quad \frac{F}{5}.$$



de látni fogjuk más végtelen számosságot is.

Ez gyakorlatilag a számfogalom bővítése is.

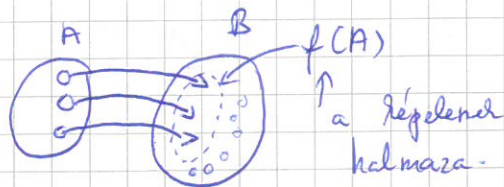
Ismerünk dolgokat a végesről $\Rightarrow$ át lehet-e vinni őket a végtelenre?

KÉRDÉS. Ezzel megünnel tovább.

$|A| = \kappa, \lambda, \mu, \dots$ ilyen betűket használhatunk majd.

$$\kappa \leq \lambda$$

↑
azt akarjuk vizsgálni megfogalmazni.



Def: $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ injektív függvény.

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

$A \sim f(A)$ és f bijektív korlátozva,
ez világos.
(1)

Állítás:

(1) $\kappa \leq \kappa$ reflexív reláció

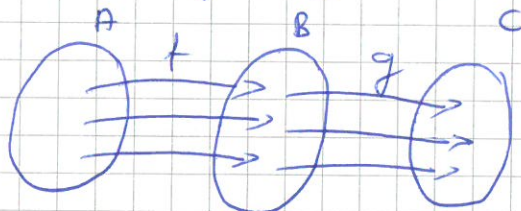
(2) $\kappa \leq \lambda, \lambda \leq \mu \Rightarrow \kappa \leq \mu$ transzitiv.

Biz.:

(1) $A \rightarrow A$ injektív függvény kell.

pl: $\text{id}_A: A \rightarrow A$. $\square$

(2) $\left. \begin{array}{l} \exists f: A \rightarrow B \text{ injektív.} \\ \exists g: B \rightarrow C \text{ injektív.} \end{array} \right\} g \circ f: A \rightarrow C \text{ injektív. } \square$



eml.: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ egyez.

Tétel: Ha $\kappa \leq \lambda$ és $\lambda \leq \kappa \Leftrightarrow \kappa = \lambda$.

antiszimmetria.

És Cantor nem tudta bebizonyítani.

(Cantor-Bernstein-tétel)

↑ ő látta be 18 évesen.

Bonyolultabb bizonyítást igényel, nem nézzük meg.

bizonyos irodalmakban Schröder neve is említésre kerül.

Tétel: $\forall \kappa, \lambda: \kappa \leq \lambda$ vagy $\lambda \leq \kappa$.

Biz: nehéz. $\square$

Def: $\kappa < \lambda \Leftrightarrow \kappa \leq \lambda$ és $\kappa \neq \lambda \Rightarrow \kappa \neq \lambda$.

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

POWER (SET).

pl.: $|A| = 10$, $|P(A)| = 2^{10}$ hatványhalmaz.

Tétel: Bmely A halmazra

$$|A| < |P(A)|.$$

Biz.: Kell: $A \leq P(A)$ először.

$f: A \rightarrow P(A)$ injektív függvény kell.

$f(a) = \{a\}$ jó lesz. Mint megfeleltetés.

Σ injektív, eddig jó.

Kell még: $A \neq P(A)$. Induktív úton látjuk be.

Tfh $\exists g: A \rightarrow P(A)$ bijekció.

Legyen $B = \{a \in A : a \notin g(a)\}$. Ekkor $B \subseteq A$, ezért $B \in P(\{A\})$ is.

miel g ráképezés: $\exists b \in A$ $g(b) = B$.

Kérdés: $b \in B$?

$$b \in B \Leftrightarrow b \notin g(b) \xRightarrow{g(b)=B} b \notin B$$

$\uparrow$
B def. szerint

$\downarrow$ $\square$

Mire jutottunk: $|H_0| \leq |P(H_0)| \leq |P(P(H_0))| \leq \dots$

$\uparrow$
 H_0

$\uparrow$
 C

(ezt majd belátjuk) végtelen sor van.

Van-e vmi H_0 és C között?

Ezen gondolkodott Cantor.

Állítás: Nem létezik λ számosság, hogy $H_0 < \lambda < C$.

És lett az ún. Kontinuum-hipotézis (KH).

Cantor ezt nem tudta bebizonyítani.

1900-as mat. világtalálkozó. Hilbert. És a problémái.

23 db ilyen problémát írt le (adott meg).

Ezek közül még nem mindegyik megoldott. Első volt a Kontinuum-hipotézis.

A listán.

1938: Gödel. A KH „nem cáfolható”.

1963: Cohen. A KH „nem bizonyítható”.

Russel-paradoxon: vannak látszólagos és valódi ellentmondások.

↑

pl. $\forall \Delta$ egyenlősségi.

hibás bizonyítás, de látszólag jó.

$$H = \{x \text{ halmaz} \mid x \notin x\}$$

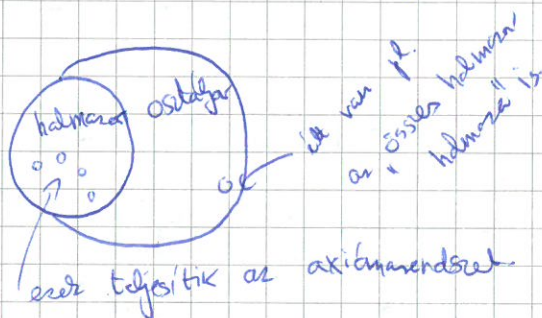
igaz-e, hogy $H \in H$.

$H \in H \Leftrightarrow H \notin H$. $\downarrow$ ez egy valódi ellentmondás

Zermelo kezdett először axiomatizálni a témát.

Zermelo - Fraenkel lett végül az axiómarendszer

Végül ők oldották fel az adott paradoxont



Minden, ami nem, az osztály. És leszámol az addig

ismét paradoxonokkal