

Halmazok és logika

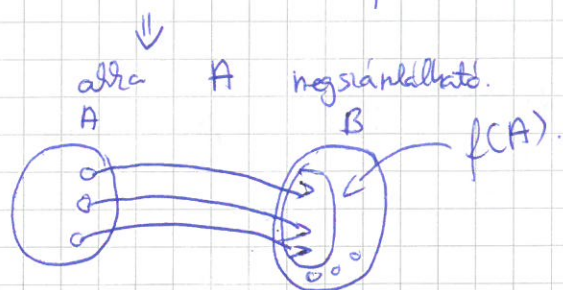
Végtelen halmazokkal meg a nyitulás, lezárás. Tovább.

Megszámíthatóan végtelen: $\sim \mathbb{N}$

+ a végesek, egye.

All: Megszámítható halmaz amely részhalmaza is megszámlálható.Biz: A megszámlálható.A : $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorrendben. $a_1, a_2, (a_3), (a_4), a_5, (a_6), a_7, \dots$ legyen $B \subseteq A$. B elemei a bekarikázottak.

Létezik a nem bekarikázottak között B egy sorrendbe rendezése.

B : $b_1, b_2, \dots$ All: B egy megszámlálható halmaz $\wedge \exists f: A \rightarrow B$ injektívBiz: Vegyük A elemeinek képét. $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$. f injektív. $f: A \rightarrow f(A)$ bijektív is lett.

$$\Rightarrow A \sim f(A) \subseteq B$$

 $\uparrow$
 megszámlálható. $\square$
All: Két megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Biz: $\exists$: $A: a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatbarendezés.
 $B: b_3, b_2, b_1, \dots$

$A \cup B: a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ sorozatbarendezés.

(A és B fűzés egyesítése)

Ha vannak közös elemek? Neembaag. Ami már volt, törlhető.
 ennyi: ■

All: $A_1, \dots, A_n$ megszámlálhatók $\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ is az.

Biz: Következni az előzőből, teljes indukcióval.

All: Nem. Inkább tétel.

Tétel: Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítése megszámlálható.

Biz: Legyen $A_1, A_2, A_3, \dots$ sorozatbarendezhető megszámlálható halmazok.

$A_n = \overbrace{A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \dots}^{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots}$ A_n halmaz is sorbarendezhető.

$A_1: a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$

$A_2: a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots$

$A_3: a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots$

$\vdots$

a vonalmenti jóolvasás egy sábo-
 rendezés.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n: a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, \dots$ ■

ennyike.

Tétel: A, B megs. $\Rightarrow A \times B$ is az.

Biz.: $A: a_1, a_2, a_3, \dots$ $B: b_1, b_2, b_3, \dots$ sorozatbarendezés.

$$A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\{a_n\} \times B)}_{\text{megszámolható.}} \quad \{a_n\} \times B \sim B \text{ nat} \quad \leftarrow (a_n, b) \rightarrow b \text{ bijekció.}$$

$\Rightarrow$ ezek egyesítés $A \times B$, tehát $A \times B$ is megszámlálható. ■

All.: $A_1, \dots, A_n$ megszámlálható $\Rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$ is az.

Biz.: Az most elmarad.

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid \forall i: a_i \in A_i \}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \{ (a_1, a_2, \dots) \mid \forall n \ a_n \in A_n \} \text{ végtelen sor halmaza}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\} = \text{végtelen 0-1 sorozatok halmaza} := V.$$

Tétel: V nem megszámlálható.

Biz.: Tfh V megszámlálható. Legyen

$V: s_1, s_2, s_3, \dots$ sorozatbarendezés.

$$s_1: \underbrace{(a_{11})}_{\text{ }} a_{12}, a_{13}, \dots \quad a_{ij} \in \{0, 1\}$$

$$s_2: a_{21}, \underbrace{(a_{22})}_{\text{ }} a_{23}, \dots$$

$$s_3: a_{31}, a_{32}, \underbrace{(a_{33})}_{\text{ }}, \dots$$

$\vdots$

Legyen $b_n = 1 - a_n$ bitcsereve vonatkozó réplet.

Legyen $S: b_1, b_2, \dots$

Ezért $\forall n: S \neq S_n$ mert $b_n \neq a_n$.

Ez az S -t nem tartalmazza az előre táblázat.

Ez ellentmondás. $\square$

(megj.: ez a Cantor-féle átlós módszer).

Tétel: A valós számok halmaza nem megszámlálható. (Cantor) ^{1874-624.}

Biz: Elég belátni, hogy ~~$(0, 1)$~~ $(0, 1)$ nem megszámlálható.

Ez triviális.

$f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{V}$ injektív.

$\Downarrow$
 X

feltehetően tén.

$$X = (0, x_1, x_2, \dots)_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots$$

$$x_n \in \{0, 1\}.$$

$$X = (0, x_1, x_2, \dots)_2 \xrightarrow{f} (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Ezért f injektív.

f nem bijekció!

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= 0,25000\dots \\ &= 0,24999\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 1,000000\dots \\ &= 0,9999\dots \end{aligned}$$

A TÍZEDESTÖRTIAK NEM EGYÉRTÉLMŰ!!!

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots =$$

$$= \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \underline{\underline{1}}. \quad \text{☺}$$

Keltes számrendszer:

$$\frac{1}{2} = (0,1000\dots)_2 = (0,01111\dots)_2 \text{ lesz.}$$

emíatt f nem bijektív. Hoppse, elbasztuk! Síán az egész!

lípra.

Kell: $f: V \rightarrow (0,1)$ legyen

$$(a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_{10}$$

f így injektív lesz. Így nem eshet egybe két tizes számrendszerbeli szám.

$(0,1)$ megszámlálható $\Rightarrow V$ megszámlálható

De V nem az. ☹

All: $n \in \mathbb{N}$. Az A legfeljebb n -edfokú egész együtthatós polinomok halmaza megszámlálható. legyen az a halmaz P_n .

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

$$p \mapsto (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$$

$$\text{Így } P_n \sim \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots}_{\text{véges sok megsz. halmaz}} = \mathbb{Z}^{n+1}$$

$\Rightarrow P_n$ megszámlálható.

Köv: Az egész együtthatós polinomok P halmaza is megszámlálható.

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$$

⑤

algebrai számok. a valós számtesten mozogva, most.

Tétel: Az algebrai számok halmaza is megszámlálható.
(A)

Biz: $A = \bigcup_{f \in P \setminus \{0\}} \text{gyök}(f)$
 $\uparrow$ megszámlálhatóan sok +
n-edfokú polinomnak n-db gyöke van.

Véges halmaz mindig $\blacksquare$

Halmazok:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}.$$

$$x = \frac{p}{q} \text{ gyöke: } qx - p = 0. \text{ egye.}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ már nem rrac, mégis } x^2 - 2 = 0 \text{-nak gyöke}$$

(az algebrai számok anyag testét alkotnak)

$\Rightarrow$ All: Létezik transzcendens szám.

Hiszen $\mathbb{R}$ nem megszámlálható, $\mathbb{A}$ pedig megszámlálható.

All: $\mathbb{A}$ transzcendens számok halmaza ^(T) nem megszámlálható.

ez igazából csak közvetlen tény.

$$\mathbb{R} = \overset{\mathbb{A}}{\mathbb{A}} \cup \mathbb{T}.$$

1844: Liouville megmutatta, hogy létezik.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} \approx 0,110001000\dots 01\dots$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 1. 2. 6. 24

ennek egge belátta, hogy transzcendens.

1874: Cantor belátta, hogy sok ilyen van.

1873: Hermite belátta e transzcendenciáját.

1882: Lindemann a π -ről is belátta.
($e + \pi$ -ről viszont még semmit sem tudunk).

$$R = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nem} \\ \text{megsz.}}}{Q} \cup \underset{\uparrow}{I} \text{ mac} \qquad T \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{melléksz.}}}{I} \text{ mac}$$

Halmaz elemszáma: $|A| = n$ véges halmazra.

$$|\{1, 5, 83\}| = 3.$$

$$|\emptyset| = 0.$$

$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B| \quad \text{számosságuk.}$$

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \quad (\text{alef - nulla})$$

$$|\mathbb{R}| = c \quad (\text{kontinuum - számosság})$$

