

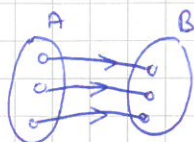
Halmazelmélet, logika

1. dolgozzátok rául a felvételre, majd valaminek lesz.

Halmazelmélet.

végülis halmazok jönnek.

Georg Cantor, 1870-től kezdve inkább az elmélet megalkotása.



A és B ugyanakkor, ha elemei párok állíthatók.  
ezt mondta Cantor.

De a két halmaz  
nem megszámlálható.

Def. A és B ekvivalens halmazok, ha  $\exists f: A \rightarrow B$  bijekció.

$f$  injektív, szürjektív.

jelölés:  $A \sim B$  vagy  $A \sim_+ B$ .

ennyi.

Példa ekvivalens halmazokra.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

①  $N \sim \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



$$f(n) = n-1.$$

②  $N \sim \{2, 4, 6, 8\}$

$$f(n) = 2n \text{ jó bijekció.}$$

③  $N \sim \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

$$f(n) = n^2 \text{ jó bijekció.}$$

↑ négyzetes számok

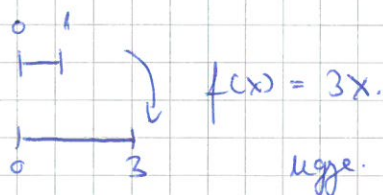
ez is meglepő success.

"Galilei - paradoxon" ez.  $C \sim 1600$  körül már  
létezik.  
1638.

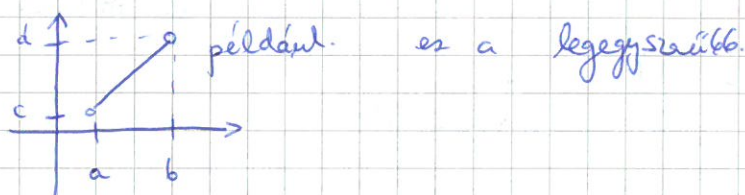
Mit lehet? 1. halmaz ekvivalens a reálhalmazzal. Végtelen halmazok esetén.

Példa:

$$[0, 1] \sim [0, 3]$$



$$(a, b) \sim (c, d) \text{ általánosra.}$$



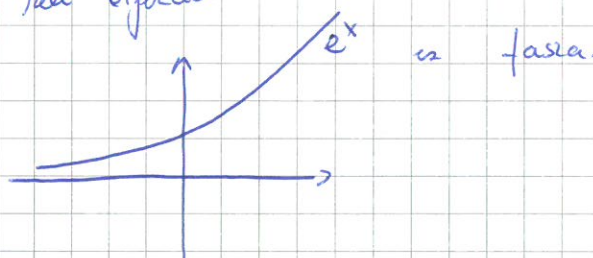
feladat:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

all:

$$\mathbb{R} \sim (0, \infty) \text{ jól bijektív.}$$

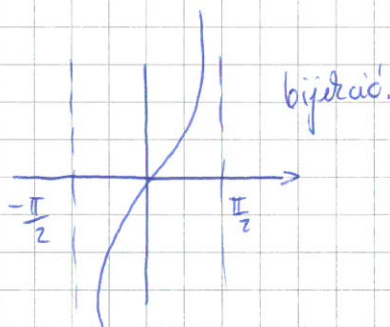
$$f(x) = e^x$$



all:

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan x$$



all:

$$[0, 1) \sim [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & x \neq 0 \end{cases}$$

jó bijektív.

$$g(x) = 1 - x \text{ is jó.}$$

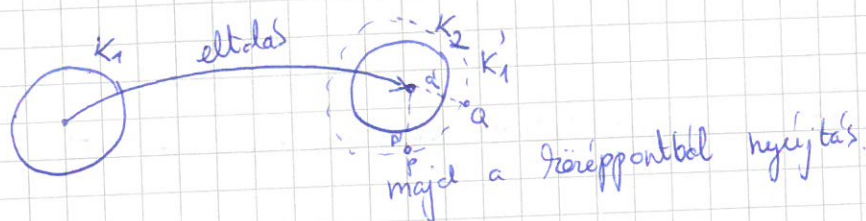


$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{C}.$$

$$f(x,y) = x + iy. \quad \text{ugye.}$$

Tfh  $K_1, K_2$  tetszőleges körvonalak a síkban.

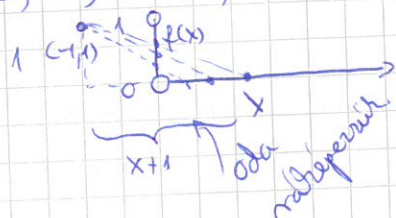
Igazolja, hogy  $\forall$  bijektív homeomorfizmus  $K_1 \sim K_2$



ennyi.

(pl)

$$(0, \infty) \sim (0, 1)$$



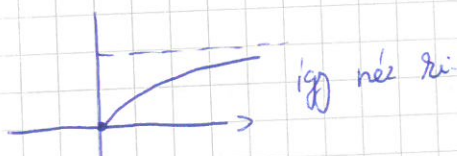
Réplettel is felírható.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+x} \text{ lesz.}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ lesz. ugye.}$$

a bijektív.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}.$$



Áll:

$$(1) \quad A \sim A$$

$$(2) \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$(3) \quad A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

$\sim$  tranzitív reláció.

de mi az alapelmélet? "A összes halmaskompozíció."

$\uparrow$  EZ NEM JO!

nem igaz. nem használható.

Biz: (1)  $\text{id}_A(a) = a \Rightarrow A \sim \text{id}_A A.$

(2)  $A \not\sim B, \Rightarrow B \not\sim A.$  inverz függvényrel

(3)

$$(3) \quad A \sim_f B, B \sim_g C \Rightarrow A \sim_{g \circ f} C.$$

Ha  $I \subseteq \mathbb{R}$  tetszőleges nyílt intervallum, akkor  $I \sim \mathbb{R}$ .

$$I \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R} \Rightarrow I \sim \mathbb{R}$$

a tranzitivitás miatt.

Def:  $A$  megszámlálhatóan végtelen, ha  $\mathbb{N} \sim A$ .

megszámlálható: megszámlálhatóan végtelen vagy véges. Ezt mondjuk

$f: \mathbb{N} \rightarrow A$  bijekció.

$f(1), f(2), f(3), \dots$  Sorozat  $A$   $\forall$  elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Az  $A$  halmaz tehát sorozatba rendezhető. Így is mondjuk.

$A: a_1, a_2, a_3, \dots$  adott. Legyen  $f(n) = a_n \rightarrow f: \mathbb{N} \rightarrow A$  bijekció.

Példa:  $\mathbb{Z}$ : egész számok halmaza.

$$\mathbb{Z}: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \quad \mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

ez kétirányú sorozat  
ez most nem jó.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  bijekció kell.

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$\uparrow$  egészrész

$$f(1) = (-1)^1 \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 0.$$

$$\text{utána } \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 1$$

de  $(-1)^n$  miatt hol  $-1$ ,  
hol  $+1$  jön be! mindig cserél.



Tétel: A racionális számok halmaza megszámlálható.

Biz:

( )  
↑ itt is végtelen sor racionális szám van.

Első bizonyítás. Legyen  $\mathbb{Q}$  a rac. számok halmaza.

$\mathbb{Q} \cap (0, 1)$  sorbanrendezése:  $\underbrace{\frac{1}{2}}_{2n}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}_{3n}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}}_{4n}, \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}}_{5n}, \dots$

így sorbanrendezhető.

$\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$  sorbanrendezése:  $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \dots$   
 $\uparrow \uparrow \quad \uparrow \uparrow \quad \uparrow \uparrow$   
 reciprocos rec. rec.  
 $\times, \frac{1}{x}$

és az összes pozitív racionális számot sikerült sorozatbanrendezni.

$\mathbb{Q} : 0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots$  így sorozatbanrendezhető

a teljes  $\mathbb{Q}$ . ■

Második bizonyítás.  $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$

|               |               |               |               |               |               |          |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{5}{1}$ | $\frac{6}{1}$ | ...      |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{6}{2}$ | ...      |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{6}{3}$ | ...      |
| $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$ |

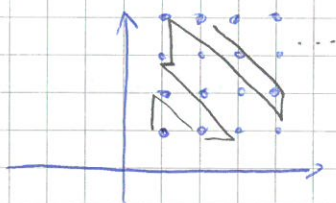
Kapunk egy nagy végtelen nagy mátrixot. Így -

Rendszert sorozatba vehetjük.

a törlött vonal mentén felolvasható a sorozat. ■

$N \times N$  halmaz legyen.

$$N \times N \sim N.$$



sorozatba rendezhető.

adható bijekció réplettel is.

$$f(k, n) = 2^{\overbrace{k-1}^{\text{páratlan szám}}} \underbrace{(2n-1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{pártszám}}}$$

ez egyben páratlan lesz.

prímtényező felbontás:

$$2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3} \dots$$

egzaktan.

minden pozitív egész egzaktan  
leírható így.

Eset jó.  $f$  eset bijekció  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -ből  $\mathbb{N}$ -ba.

Érdekeség:  $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(k, n) = 2^k 3^n$   
injektív, de  
NEM SZÜRJEKTÍV.